УДК 004.89 + 004.021

П. В. Казаков, канд. техн. наук, доц.,
Брянский государственный
технический университет,
e-mail: pvk_mail@list.ru

Оценка эффективности генетических алгоритмов многокритериальной оптимизации. Ч. 2*

На основе изложенных в части 1 статьи способов оценки качества работы генетических алгоритмов многокритериальной оптимизации (МГА) рассматривается практический пример анализа масштабируемости эффективности двух наиболее применяемых сейчас МГА при решении задач многокритериальной оптимизации разной сложности.

Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация, принципы Парето, граница Парето, индикаторы эффективности, многокритериальные генетические алгоритмы SPEA2, NSGA-II*

Введение

В настоящее время генетические алгоритмы [1] являются одним из наиболее эффективных средств решения задач многокритериальной оптимизации (МО). Анализ статистики использования многокритериальных генетических алгоритмов (МГА) для решения задач МО позволяет сделать заключение об уровне их сложности, а также о наиболее часто используемых при этом МГА. Сейчас среди задач, решаемых с применением МГА, около 68 % являются двухкритериальными, 18 % — трехкритериальными и лишь 14 % имеют число критериев больше трех [2]; самыми используемыми при этом являются МГА второго поколения SPEA2 [3], NSGA-II [4]. Эти МГА отличаются относительно простыми реализацией и настройкой, а также различными принципами поиска решений. Кроме того, эти МГА имеют реализации в ряде коммерческих и свободных библиотек программирования для решения задач оптимизации [5—7], а также являются обязательными участниками сравнительных испытаний с другими генетическими алгоритмами многокритериальной оптимизации. В то же время, практика применения SPEA2, NSGA-II и получаемые ими высокие результаты, как правило, ограничиваются 2-, 3-критериальными задачами МО. Поэтому представляет интерес "независимая" оценка масштабируемости этих МГА при решении задач многокритериальной оптимизации большей размерности. В связи с этим было проведено комплексное исследование работы SPEA2, NSGA-II при решении набора из специальных тестовых задач. Были выбраны соответствующие индикаторы эффективности [см. часть 1], методика проведения испытаний, сделаны необходимые выводы.

1. Тестовые задачи для исследования МГА

Для оценки эффективности МГА используют специальные тестовые задачи. Они представляют собой обобщенные математические модели, в которых моделируются различные проблемы, которые могут возникнуть у МГА в реальных прикладных задачах МО. В частности, это отсутствие сведений о выпуклости/вогнутости пространства критериев, его дискретность и неравномерность, а также наличие ложных и изолированных экстремумов. Очевидно, что надежный МГА должен эффективно решать задачу при любых их сочетаниях.

К настоящему времени разработаны различные тестовые задачи для исследования эффективности МГА [8—12]. Они отличаются числом критериев (обычно 2—3), переменных оптимизации, а также характером проблемы, относительно которой проверяется МГА. Для унификации процедуры тестирования МГА одними из основоположников направления MOEA (*multi-objective evolutionary algorithms*) в эволюционных вычислениях была создана методика для автоматизации конструирования таких задач [8]. Ее главная идея заключается в том, что вначале аналитически определяется глобальная граница Парето, которая затем "помещается" в пространство критериев любой топологии. Это позволяет априорно знать лучшее решение и сравнивать с ним результаты МГА. На основе этой методики могут быть сформированы специальные тестовые наборы задач МО, позволяющие всесторонне оценить возможности испытуемого генетического алгоритма. Первая версия наиболее известного такого набора [9] состояла из шести двухкритериальных задач ZDT1—ZDT6 с буквенными префиксами от фамилий его авторов (Zitzler-Deb-Thile). Главным недостатком этого набора была немасштабируемость входящих в него задач — их исключительно двухкритериальность. Кроме того, генетические алгоритмы SPEA2, NSGA-II достаточно легко справлялись с этими задачами. Поэтому совместно

* Часть 1 статьи опубликована в № 8, 2012 г.

с Лауманнсом (*Laumanns*) была создана новая версия тестового набора DTLZ1—DTLZ9 [10]. Сейчас он считается стандартом де-факто для исследования МГА и содержит существенно усложненные задачи МО, характеризующиеся:

- масштабируемостью сложности благодаря возможности варьирования числа критериев и переменных оптимизации;
- известной информацией о глобально оптимальном множестве Парето;
- наличием методики модификации и создания новых тестовых задач различной сложности.

Анализ особенностей тестового набора DTLZ позволил без потери качества исследования эффективности МГА ограничить множество задач до DTLZ1, DTLZ2, DTLZ3 и DTLZ6. Каждая из них имеет характер минимизации и в совокупности они позволяют смоделировать все отмеченные проблемы на пути поиска решений. Во всех задачах число критериев $m \geqslant 2$, а число переменных оптимизации определяется как $n = k + m - 1$, где k — управляющий параметр сложности поискового пространства. Далее в качестве его значения используются значения, рекомендованные разработчиками задач.

DTLZ1

$$f_1(x) = \frac{1}{2} x_1 x_2 ... x_{m-1}(1 + g(x_h));$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} x_1 x_2 ... (1 - x_{m-1})(1 + g(x_h));$$

$$\vdots$$

$$f_{m-1}(x) = \frac{1}{2} x_1 (1 - x_2)(1 + g(x_h));$$

$$f_m(x) = \frac{1}{2} (1 - x_1)(1 + g(x_h)),$$

где $g(x_h) = 100(|x_h| + \sum_{x_i \in x_h} (x_i - 0{,}5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0{,}5)))$;

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, ..., n,\ x_h \subset x;\ k = |x_h| = 5.$$

Глобальное множество Парето соответствует $x_h^* = \{0, 0, ..., 0\}$ и $\sum_{j=1}^{m} f_j = 0{,}5$.

DTLZ2

$$f_1(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2)...$$
$$...\cos(x_{m-2}\pi/2)\cos(x_{m-1}\pi/2);$$
$$f_2(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2)...$$
$$...\cos(x_{m-2}\pi/2)\sin(x_{m-1}\pi/2);$$
$$f_3(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2)...\sin(x_{m-2}\pi/2);$$
$$\vdots$$
$$f_{m-1}(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\sin(x_2\pi/2);$$
$$f_m(x) = (1 + g(x_h))\sin(x_1\pi/2),$$

где $g(x_h) = \sum_{x_i \in x_h} (x_i - 0{,}5)^2$;

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, ..., n,\ x_h \subset x;\ k = |x_h| = 10.$$

Глобальное множество Парето соответствует $x_h^* = \{0{,}5, 0{,}5, ..., 0{,}5\}$ и $\sum_{j=1}^{m} (f_j)^2 = 1$.

DTLZ3

$$f_1(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2)...$$
$$...\cos(x_{m-2}\pi/2)\cos(x_{m-1}\pi/2);$$
$$f_2(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2)...$$
$$...\cos(x_{m-2}\pi/2)\sin(x_{m-1}\pi/2);$$
$$f_3(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\cos(x_2\pi/2)...\sin(x_{m-2}\pi/2);$$
$$\vdots$$
$$f_{m-1}(x) = (1 + g(x_h))\cos(x_1\pi/2)\sin(x_2\pi/2);$$
$$f_m(x) = (1 + g(x_h))\sin(x_1\pi/2),$$

где $g(x_h) = 100(|x_h| + \sum_{x_i \in x_h} (x_i - 0{,}5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0{,}5)))$;

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, ..., n,\ k = |x_h| = 10.$$

Глобальное множество Парето соответствует $x_h^* = \{0{,}5, 0{,}5, ..., 0{,}5\}$ и $g^*(x_h) = 0$.

DTLZ6

$$f_1(x) = (1 + g(x_h))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2)...$$
$$...\cos(\theta_{m-2}\pi/2)\cos(\theta_{m-1}\pi/2);$$
$$f_2(x) = (1 + g(x_h))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2)...$$
$$...\cos(\theta_{m-2}\pi/2)\sin(\theta_{m-1}\pi/2);$$
$$f_3(x) = (1 + g(x_h))\cos(\theta_1\pi/2)\cos(\theta_2\pi/2)...\sin(\theta_{m-2}\pi/2);$$
$$\vdots$$
$$f_{m-1}(x) = (1 + g(x_h))\cos(\theta_1\pi/2)\sin(\theta_2\pi/2);$$
$$f_m(x) = (1 + g(x_h))\sin(\theta_1\pi/2),$$

где $g(x_h) = \sum_{x_i \in x_h} (x_i)^{0,1}$;

$$\theta_i = \frac{\pi}{4(1 + g(x_h))}(1 + 2g(x_h)x_i),\ i = 2, 3, ..., (m - 1);$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, ..., n;\ x_h \subset x;\ k = |x_h| = 10.$$

Глобальное множество Парето соответствует $x_h^* = \{0, 0, ..., 0\}$; $g^*(x_h) = 0$; $\theta_i = \pi/4$, $i = 2, 3, ..., (m - 1)$.

2. Методика проведения исследований эффективности МГА

Основная цель проведения испытания различных МГА заключается в оценке степени их масштабируемости при росте сложности решаемых задач. В данном случае предполагается проверка возможности SPEA2, NSGA-II сохранять необходимую точность и приемлемую скорость вычислений при решении задач DTLZ1, DTLZ2, DTLZ3, DTLZ6 с разным числом критериев $m = \{2, 4, 6, 8\}$. Таким образом, каждому из тестируемых МГА предстоит решить 16 задач многокритериальной оптимизации. Учитывая, что изначально известно точное решение каждой задачи, эффективность МГА будет оцениваться по следующему набору индикаторов $\{I_{ONVG}$,

Таблица 1

Значения параметров работы МГА, зависящих от числа критериев

Число критериев	Размер популяции	Размер Парето-архива (размер популяции)	Число поколений	Число запусков МГА
2	100	0,28 (28)	300	30
4	250	0,45 (113)	500	30
6	400	0,52 (208)	700	10
8	600	0,6 (360)	1000	10

I_S, I_{DE}, I_{GD}, I_{OT}} [часть 1, см. журнал № 8, 2012 г.]. В общей сложности для последующего анализа с каждым МГА будет связано $16 \times 5 = 80$ количественных показателей.

Для каждого МГА должен быть определен набор значений управляющих параметров. Для одних это выполнялось в соответствии с рекомендациями, для других эмпирически. Известно, что в работе МГА ключевую роль играет размер популяции. В работе [13] были определены соотношения между числом критериев, размером популяции и максимальным числом недоминируемых решений в ней. Следуя полученным рекомендациям, были определены значения размера популяции и размера Парето-архива (доля от размера популяции) для разного числа критериев (табл. 1).

Время работы МГА во всех случаях ограничивалось только числом поколений. Относительно выбора этого значения не существует определенных рекомендаций для МГА. Однако экспериментально показано, что простое увеличение времени работы МГА не гарантирует роста недоминируемых решений, а в случае мультимодальности отдельных критериев приводит к снижению мощности итогового множества Парето [13]. Поэтому в данном случае число поколений выбирали с точки зрения сохранения разумной пропорции с размером популяции. Ради объективности испытаний МГА запускали по 30 раз для $m = \{2, 4\}$ и, учитывая резкий рост времени поиска, по 10 раз для $m = \{6, 8\}$. Для всех МГА и решаемых задач использовали турнирный отбор, одноточечный кроссинговер и одноточечную мутацию. Значения вероятностей операторов кроссинговера и мутации (p_c, p_m) выбирали из заданных интервалов $p_c \in [0{,}7, 0{,}9]$, $p_m \in [0{,}001, 0{,}01]$/бит соответственно. Для этого при решении каждой из задач, но только для $m = 2$ определяли значения p_c, p_m, при которых SPEA2, NSGA-II достигали лучшего результата по индикатору I_{GD}. Найденные таким образом значения вероятностей для каждого МГА использовали во всех остальных случаях. Это позволило упростить процедуру исследования МГА без потери объективности полученных результатов.

3. Полученные результаты и их анализ

Для удобства анализа результаты решения всех задач сгруппированы отдельно по каждому индикатору (табл. 2—6). Это позволит проследить динамику изменения соответствующих показателей алгоритмов при изменении задачи и ее сложности. Значения всех индикаторов усреднены по выполненному числу запусков МГА.

Анализ табл. 2 позволяет сделать вывод, что во всех случаях число найденных недоминируемых решений оказалось выше у NSGA-II. Также, в частности, можно отметить следующее.

- Для $m = 2$ у NSGA-II значение индикатора заметно больше, чем у SPEA2 во всех задачах. Это можно объяснить ограничением значения индикатора у SPEA2 размером Парето-архива, в то время как у NSGA размером популяции.
- Во всех задачах для $m = \{6, 8\}$ у SPEA2 значения индикатора меньше размера Парето-архива. Это может означать системное снижение разнообразия популяции на некотором этапе поиска.

Таблица 2

Результаты по индикатору I_{ONVG}

Задача	Число критериев	SPEA2	NSGA-II
DTLZ1	2	28	66
	4	105	168
	6	197	262
	8	254	389
DTLZ2	2	28	63
	4	112	179
	6	189	271
	8	247	385
DTLZ3	2	19	47
	4	93	127
	6	167	236
	8	237	364
DTLZ6	2	27	71
	4	108	173
	6	194	263
	8	269	401

Таблица 3

Результаты по индикатору I_{GD}

Задача	Число критериев	SPEA2	NSGA-II
DTLZ1	2	0,071	0,067
	4	0,312	0,574
	6	5,693	8,647
	8	387,241	324,724
DTLZ2	2	0,012	0,015
	4	5,732	6,124
	6	10,372	9,785
	8	17,935	12,352
DTLZ3	2	0,062	0,178
	4	5,371	27,657
	6	226,953	310,603
	8	1847,632	1641,533
DTLZ6	2	0,107	0,112
	4	5,093	5,727
	6	10,491	10,475
	8	16,623	11,237

Таблица 4

Результаты по индикатору I_S

Задача	Число критериев	SPEA2	NSGA-II
DTLZ1	2	0,186	0,223
	4	0,201	0,206
	6	0,292	0,368
	8	0,401	0,413
DTLZ2	2	0,112	0,119
	4	0,133	0,124
	6	0,373	0,286
	8	0,434	0,371
DTLZ3	2	0,121	0,147
	4	0,134	0,245
	6	0,328	0,287
	8	0,459	0,488
DTLZ6	2	0,097	0,105
	4	0,172	0,154
	6	0,185	0,171
	8	0,251	0,201

Таблица 5

Результаты по индикатору I_{DE}

Задача	Число критериев	SPEA2	NSGA-II
DTLZ1	2	0,971	0,964
	4	1,283	1,381
	6	1,141	1,658
	8	1,412	1,486
DTLZ2	2	1,371	1,380
	4	1,714	1,847
	6	2,141	2,317
	8	2,113	2,245
DTLZ3	2	1,386	1,375
	4	1,712	1,894
	6	2,137	2,312
	8	2,114	2,206
DTLZ6	2	1,171	1,167
	4	1,541	1,673
	6	1,816	1,977
	8	1,862	1,913

Таблица 6

Результаты по индикатору I_{OT} (секунды)

Задача	Число критериев	SPEA2	NSGA-II
DTLZ1	2	6,3	4,8
	4	174,2	28,1
	6	3357,4	353,7
	8	67114,5	2577,2
DTLZ2	2	6,8	5,4
	4	191,4	31,6
	6	3689,6	397,6
	8	73771,8	2904,4
DTLZ3	2	11,2	9,4
	4	312,1	56,1
	6	6217,3	698,7
	8	119324,2	5094,3
DTLZ6	2	7,2	5,3
	4	197,8	30,6
	6	3843,7	390,2
	8	76784,3	2843,8

- В задаче DTLZ3 оба МГА нашли наименьшее число недоминируемых решений. Это может быть связано с попаданием в одну из множества локальных границ Парето.

Анализ результатов по индикатору I_{GD} (табл. 3) показывает, что в задачах DTLZ1, DTLZ2, DTLZ6 для $m = \{2, 4\}$ SPEA2, NSGA-II получили близкие значения. Остальные случаи можно охарактеризовать следующим образом.

- При $m = \{6, 8\}$ в задачах DTLZ1 и DTLZ3 оба МГА продемонстрировали достаточно плохой результат, особенно при $m = 8$. Пространства критериев этих задач имеют множество $(11^k - 1)$ для DTLZ1 и $(3^k - 1)$для DTLZ3 локальных границ Парето. Очевидно, при росте числа критериев у SPEA2, NSGA-II оказывается недостаточно возможностей для исследования всего поискового пространства.
- У NSGA-II при $m = 8$ значения индикатора во всех случаях оказались лучше, чем у SPEA2.

В целом по индикатору I_S (табл. 4) у обоих МГА оказались относительно близкие значения. В задачах DTLZ1, DTLZ3 в большинстве случаев лучшие результаты у SPEA2, а DTLZ2 и DTLZ6 у NSGA-II.

Анализ полученных значений индикатора I_{DE} (табл. 5) показывает, что наиболее полный охват границы Парето по всем размерностям был получен обоими МГА только для $m = 2$. С ростом числа критериев качество поиска по этому индикатору у исследуемых МГА снижается по-разному. В частности:

— для задачи DTLZ1 обоими МГА был достигнут лучший результат;

— в большинстве случаев NSGA-II превзошел SPEA2, прежде всего, благодаря большему числу найденных Парето-оптимальных решений;

— для $m = 8$ результат обоих МГА достаточно низкий.

Время работы МГА определялось в одинаковых условиях на одной конфигурации компьютера. Из табл. 6 видно, что с ростом числа критериев время вычислений резко увеличивается. Важным оказалось, что во всех случаях NSGA-II оказался существенно быстрее SPEA2.

Обобщив значения, полученные SPEA2, NSGA-II по каждому из индикаторов, можно оценить способность этих генетических алгоритмов сохранять эффективность при усложнении решаемых задач МО. Далее приведены соответствующие выводы, объединенные по трем ранее названным основным критериям эффективности МГА [см. часть 1].

1. Сходимость к оптимальным решениям. SPEA2, NSGA-II сумели достаточно точно решить тестовые задачи, но не во всех случаях. Сходимость МГА имела тенденцию к ухудшению при $m > 4$. Причем эта тенденция сохранялась независимо от изначальной сложности самого поискового пространства. Причина этого видится в том, что с ростом числа критериев увеличивалась скорость заполнения популяции недоминируемыми решениями. В итоге уже в начале работы МГА все хромосомы популяции имели одинаковую пригодность, что в итоге приводило к резкой стагнации поиска. Как и в однокритериальном случае существенно усложняет поиск наличие множества локальных оптимумов (границ Парето). При решении такой задачи DTLZ3 все полученные результаты оказались хуже остальных.

2. Протяженность и равномерность заполнения границы Парето. В целом, полученные значения соответствующих индикаторов у SPEA2, NSGA-II подтверждают эффективность заложенных в них принципов сохранения разнообразия найденных Парето-оптимальных решений. В то же время для $m > 6$ результаты у обоих МГА ухудшаются — число обрабатываемых хромосом становится недостаточным для аппроксимации границы Парето. NSGA-II во всех тестовых испытаниях показал по индикатору I_{DE} результаты лучше, чем у SPEA2. В связи с этим можно сделать предположение о неэффективности сохранения в процессе поиска неизменных пропорций между размером популяции и Парето-архивом.

3. Время поиска. Во всех случаях NSGA-II превзошел SPEA2, причем разница становится критической с ростом m. Дополнительные операции, связанные с обработкой Парето-архива, привели к экспоненциальному увеличению времени поиска у SPEA2.

Заключение

Таким образом, SPEA2, NSGA-II можно назвать относительно масштабируемыми, в частности для $m < 6$. С ростом числа оптимизируемых критериев

вероятность нахождения данными МГА глобальной границы Парето существенно снижается, так же как плотность ее аппроксимации и протяженность. Что касается времени, затраченного на поиск, то при увеличении $m > 6$ использование NSGA-II становится более предпочтительным. Вместе с тем, полученные результаты не позволяют однозначно назвать лучший из этих двух МГА. У каждого из них есть задачи и индикаторы, по которым SPEA2, NSGA-II превзошли друг друга. В целом это подтверждает практику их самостоятельного использования при решении задач МО с $m < 4$, в остальных случаях наиболее оправданным видится их совместное применение.

Важно подчеркнуть, что полученные результаты следует воспринимать лишь как общий потенциал масштабируемости главных современных генетических алгоритмов многокритериальной оптимизации. Также проведенные исследования направлены не на выявление достоинств и недостатков SPEA2, NSGA-II, а скорее на определение перспектив их совершенствования. В настоящее время к таковым можно отнести использование различных вариантов генетических операторов, интеграции с альтернативными метаэвристиками, распределенной среды вычислений.

Список литературы

1. **Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М.** Генетические алгоритмы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 320 с.
2. **List of References** on Evolutionary Multiobjective Optimization. URL: http://delta.cs.cinvestav.mx/~ccoello/EMOO/EMOObib.html, http://delta.cs.cinvestav.mx/~ccoello/EMOO/EMOOstatistics.html.
3. **Zitzler E., Laumanns M., Thiele L.** SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm. // EUROGEN 2001. Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial Problems. 2002. P. 95—100.
4. **Deb K., Pratap A., Agarwal S., Meyarivan T.** A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA—II // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2002. N 6 (2). P. 182—197.
5. **KEA** (Kit for Evolutionary Algorithms). URL: http://ls11-www.cs.uni-dortmund.de/people/schmitt/Daten/Kea/kea.jsp.
6. **PISA** (Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms). URL: http://www.tik.ee.ethz.ch/pisa/.
7. **Optimizing** Products Performance with Finite Element Analysis & Multiphysics Simulation. URL: http://www.simulia.com/products/isight.html.
8. **Deb K.** Multi-objective genetic algorithms: problem difficulties and construction of test problems // Evolutionary computation. 1999. N 7 (3). P. 205—230.
9. **Zitzler E., Deb K., Thiele L.** Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results // Evolutionary Computation. 2000. N 8 (2). P. 173—195.
10. **Deb K., Thiele L., Laumanns M., Zitzler E.** Scalable Test Problems for Evolutionary Multi-Objective Optimization. Evolutionary Multiobjective Optimization. Theoretical Advances and Applications. Springer. 2005. P. 105—145.
11. **Okabe T., Jin Y., Olhofer M., Sendhoff B.** On Test Functions for Evolutionary Multiobjective Optimization // Proc. of Parallel Problem Solving form Nature — PPSN VIII. 2004. P. 792—802.
12. **Huband S., Hingston P., Barone L., While L.** A Review of Multiobjectives Test Problems and a Scalable Test Problem Toolkit // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2006. N 10 (5). P. 477—506.
13. **Deb K.** Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms. Wiley, 2009. 536 p.

УДК 519.612

К. Ф. Иванова, канд. техн. наук,
e-mail: klara.i2010@yandex.ru,
Санкт-Петербургский государственный университет

Знаковый подход к оценке решения интервальных линейных систем

Предлагается новый алгебраический подход к оценке решения интервальной линейной системы, реализованный на основе "знаковой" методики, при котором исходная задача заменяется точечными (неинтервальными) системами в евклидовом пространстве. Конструируется специализированный алгоритм, позволяющий выполнить покомпонентную оценку вектора неизвестных для точечных систем, аналогичную по результатам "внешней" оценки множества решений, получаемых методами интервальной алгебры. Применение "знаковой" методики совмещает высокую вычислительную эффективность с высоким качеством оценивания множества решений при выполнении одновременно оценки чувствительности линейных интервальных систем.

***Ключевые слова**: "внешняя" оценка, "знаковая" методика, интервальная линейная система, множество решений, точечные системы*

Введение

Математическое моделирование, объектом исследования которого являются процессы, описываемые интервальными системами линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ), все более расширяет область своего приложения, включая изучение физических, экономических, экологических и социальных процессов. Решение задач, основанных на решении систем линейных уравнений, имеющих интервальную или ограниченную неопределенность, составляют большой пласт востребованной информации о поведении объекта, данные о котором получены в результате измерений. В силу этого в настоящее время существует большое число моделей и методов решения ИСЛАУ, позволяющих получить внешние и внутренние оценки множества решений, определяющих состояние исследуемого объекта. Основополагающие результаты в области интервального анализа и его приложений были получены в работах наших и зарубежных ученых: Л. В. Канторовича, А. Б. Куржанского, Ю. И. Шокина, С. П. Шарого, А. В. Лакеева, А. П. Вощинина, Н. М. Оскорбина, Г. Г. Меньшикова, Р. Мура,