Фракталы: множество Мандельброта

С.Л. Островский,
Москва

На иллюстрации: Кацусико Хокусай. "Большая волна в Канагаве". 1823–1831 гг. Волны — природные фракталы. Похожих объектов много и в множестве Мандельброта

Фрактал. Слово-то какое, язык сломаешь!

И неудивительно ☺. Слово "фрактал" образовано от латинского *fractus* — дробленный, сломанный, разбитый. Точное определение понятия "фрактал" лежит за рамками школьного курса математики. На понятийном уровне фрактальные объекты представляют собой "бесконечно самоподобные" геометрические фигуры. Сам термин был введен Бенуа Мандельбротом, хотя большое число фракталов было исследовано до него.

Автора!

Французский математик Бенуа Мандельброт (Benoit B. Mandelbrot) родился 20 ноября 1924 года в Варшаве. Более всего он известен как отец фрактальной геометрии. Мандельброт является профессором, почетным преподавателем Йельского университета, научным сотрудником компании IBM.

Когда Бенуа было 11 лет, его семья переехала во Францию, где он получил образование и степень доктора математики (в 1952 году в Университете Парижа).

У Бенуа Мандельброта двойное гражданство, он гражданин Франции и Америки. В настоящее время Мандельброт живет в США.

Его основной работой является книга "Фрактальная геометрия природы". На английском языке она вышла в 1977 г. Русский перевод появился только в 2002 г. в издательстве "Институт компьютерных исследований". Книга была написана до открытия множества, поэтому как раз о нем в книге нет ни слова. Главы, посвященные множеству Мандельброта, есть в более поздней книге "Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса". На русском языке она вышла в 2009 г. и даже доступна на сайте издательства: http://shop.rcd.ru/details/1240. Что касается первой упомянутой книги, то в бумажном варианте купить ее сейчас нельзя, но... в общем, в Интернете немало ссылок на электронные версии, легальность которых для нас сомнительна. Но найти их не представляет никаких проблем.

Нам-то зачем?

С образовательной точки зрения проекты, связанные с построением множества Мандельброта, имеют немало достоинств:

- Они достаточно просты в реализации (на базовом уровне).
- Они очень красивы (на любом уровне!).
- Их можно выполнять во взаимодействии с учителем математики (речь идет о профильном уровне, и точка взаимодействия — знакомство с комплексными числами).
- Из них можно "выращивать" настоящие масштабные программные продукты (актуально для интересующихся детей, которых хочется занять чем-то полезным и содержательным).

Недостатки у этих проектов тоже есть:

- Необходимость знакомства с комплексными числами можно рассматривать как раз как недостаток. Это чистая математика, и знакомить с ней не наша функция.
- Истинная математика, связанная с множеством Мандельброта, точно лежит за рамками школьного курса, поэтому ряд важных вещей приходится преподносить как данность. По крайней мере одну самую главную — про круг радиуса 2 — см. ниже.
- Алгоритмизации, положа руку на сердце, здесь немного (см. первое достоинство — простоту). Здесь скорее можно развивать технические навыки, включая навыки проектирования интерфейсов.

Мы сосредоточим внимание именно на образовательной стороне вопроса: как "подать", о чем рассказать, как построить — с чего начать, чем продолжить и т.д. Математические аспекты останутся за рамками нашего повествования.

Минимум математики: комплексные числа и операции над ними

Проведем прямую, отметим точку 0 — начало координат, отметим точку 1 — зададим единичный отрезок. Получилась координатная прямая. Теперь, какую бы точку на прямой мы не взяли, ей будет соответствовать некоторое действительное число. И наоборот — каждому действительному числу соответствует точка на прямой. Множество действительных чисел обозначают $\mathbb{R}$ (фактически $\mathbb{R}$ — это прямая).

Кстати, это хороший повод поговорить с детьми о том, что компьютерная арифметика дискретна и, в частности, real ≠ $\mathbb{R}$ (на месте real может находиться любой другой числовой тип данных используемого вами языка).

Теперь вместо координатной прямой возьмем координатную плоскость (система координат декартова — оси перпендикулярны, отмечено начало координат и единичные отрезки на осях). На плоскости в отличие от прямой каждой точке соответствует уже пара действительных чисел (и снова — каждой паре соответствует точка на плоскости). Такая пара и называется комплексным числом. Записывают комплексные числа по-разному, иногда прямо в виде пары (a, b).

Над комплексными числами, как и над действительными, определены арифметические операции. Для знакомства с множеством Мандельброта потребуется уметь лишь складывать и умножать.

Итак, пусть даны два комплексных числа

$$z_1 = (a, b) \text{ и } z_2 = (c, d).$$

Операция сложения определена естественным и понятным образом:

$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d).$$

Пример: $(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$

Операция умножения определена на первый взгляд несколько удивительно, но к этому дети должны относиться именно как к определению:

$$z_1 * z_2 = (a, b)*(c, d) = (a*c - b*d, b*c + a*d).$$

Пример: $(1, 2)*(3, 4) = (1*3 - 2*4, 2*3 + 1*4) = (-3, 10)$

Комплексное число — упорядоченная пара действительных чисел, т.е. число (a, b) в общем случае не равно (b, a). Чтобы не путаться, первый элемент пары называют действительной частью числа, а второй — мнимой частью. Фактически действительная часть является абсциссой, а мнимая — ординатой точки плоскости. Используют следующие обозначения: если $z = (a, b)$, то вещественную часть обозначают $\mathrm{Re}z$ ($a = \mathrm{Re}z$), а мнимую — $\mathrm{Im}z$ ($b = \mathrm{Im}z$).

Комплексное число часто записывают не в виде пары, а с использованием особого символа i: $(a, b) = a + ib$. Символ "i" называют "мнимой единицей", которая равна $(0, 1)$. Фактически $a + ib$ — просто запись арифметического выражения, в котором a и b — действительные числа с нулевой мнимой частью. (Проверьте — это в точности соответствует определению операций.)

Множество комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$.

Что такое множество Мандельброта?

О! Это такая замечательная штука ☺! Возьмем некоторое комплексное число c. Запишем выражение $z^2 + c$. Здесь z тоже не действительное число, а комплексное. Возводить в квадрат (умножать) и складывать мы умеем.

Положим $z_0 = 0$ (более точно $z_0 = (0, 0)$). Подставим z_0 в указанную формулу, результат обозначим z_1. (Понятно, что $z_1 = c$.) Теперь подставим в формулу z_1, результат обозначим z_2. В общем виде мы строим последовательность комплексных чисел (точек на плоскости) $z_{i+1} = z_i^2 + c$, $z_0 = 0$. Будем отмечать на плоскости точки — элементы этой последовательности. Оказывается (почему — за рамками рассказа, это преподносится как данность), в зависимости от значения c возможны всего два варианта — либо точки рано или поздно "улетят"

Из первых уст

в бесконечность, либо все они будут сконцентрированы в круге радиуса 2 с центром в начале координат и никогда его не покинут (покинула — улетела). Что значит "улетела в бесконечность"? Это означает, что круг какого бы (сколь угодно большого) радиуса с центром в точке 0 мы не провели, в последовательности найдется точка, вылетевшая за его границу.

Как проверить, лежит ли точка в круге радиуса 2? Для этого нужно найти расстояние от точки (a, b) до начала координат. Это уже самая что ни на есть школьная задачка, дети должны и сами знать, что указанное расстояние равно $\sqrt{a^2+b^2}$. Это значение называют *модулем комплексного числа*.

Множество точек, которые в результате описанного процесса никогда не улетают в бесконечность, и называется множеством Мандельброта.

Невероятным (и в общем-то в определенном смысле необъяснимым) является тот факт, что множество, определяемое столь простой формулой и столь простым условием, столь сложно (и красиво, безумно красиво!) устроено.

Не все в имени его

Множество, которое сейчас называется множеством Мандельброта, было открыто и частично исследовано задолго до того, как **1 марта 1980 г.** в исследовательском центре фирмы IBM Бенуа Мандельброт стал первым человеком, который увидел это странное "насекомое". В начале XX века, в 1905 году, французский математик Пьер Фату на бумаге установил различие в поведении точек описанной выше последовательности внутри и вне круга радиуса 2. Фату установил, что множество не улетающих точек лежит в круге радиуса 2 (таким образом, Мандельброт знал этот факт), но в отсутствие компьютеров не мог даже предположить вид этого множества. Возможно, видя перед собой простую формулу, он и искал что-то простое. Как был бы он удивлен, если бы увидел, какой странный объект он обнаружил!

Как построить?

Понятно, что поскольку отнесение точек к множеству Мандельброта основано на бинарном признаке — улетает/не улетает, "настоящая" картинка множества Мандельброта является черно-белой. Черными обычно являются точки, принадлежащие множеству, белыми — все остальные.

А теперь, внимание: важный вопрос! А как мы можем быть уверены, что та или иная точка принадлежит множеству? Интересует именно вопрос принадлежности — с точками не принадлежащими все ясно — это те, которые улетели. А вот с теми, которые не улетают, все сложнее... Как мы можем быть уверены в том, что точка не улетит? Ответ: в общем случае никак. Множество Мандельброта всегда строится с некоторым приближением — выбранным нами максимальным числом шагов (элементов последовательности). Мы просто считаем — если на 100-м, 200-, 300- ... 1000-, 10 000-м и т.д. шаге не улетела, значит, принадлежит. Но мы, конечно, не можем быть уверены в том, что точка, не улетевшая на 1 000 000-м шаге, не улетит на 1 000 001-м.

Итак, в простейшем случае для построения черно-белого множества Мандельброта нам требуется выбрать:

- максимальное количество итераций точки, при достижении которого будем считать, что она принадлежит множеству;
- область на плоскости, в которой мы будем искать точки множества. Для построения изображения множества целиком можно "по максимуму" взять квадрат 4×4 с центром в начале координат.

Области на плоскости будет соответствовать некоторое окно на экране. Удобно действовать следующим образом: перебирать точки (пиксели) окна, для каждой такой точки находить ее координаты на плоскости и далее запускать итерационный процесс. В приведенной далее программе реализована именно эта схема.

Множество Мандельброта, построенное с точностью 10 итераций

Множество Мандельброта, построенное с точностью 20 итераций

Реализация на Java

Класс для реализации необходимого минимума операций над комплексными числами

```
class Complex {
  double re,im;
  public Complex(double r,double i) {
    re=r;im=i;
  }
  public Complex(double r) {
    re=r;im=0;
  }
  public String toString() {
    return re+"+i"+im;
  }
  public Complex add(Complex c) {
    return new Complex(re+c.re,im+c.im);
  }
  public Complex mult(Complex c) {
    return new Complex(re*c.re-im*c.im,
                       re*c.im+im*c.re);
  }
  public double abs() {
    return Math.sqrt(re*re+im*im);
  }
}
```

Апплет для построения “настоящего” черно-белого множества Мандельброта

Параметрами апплета являются:

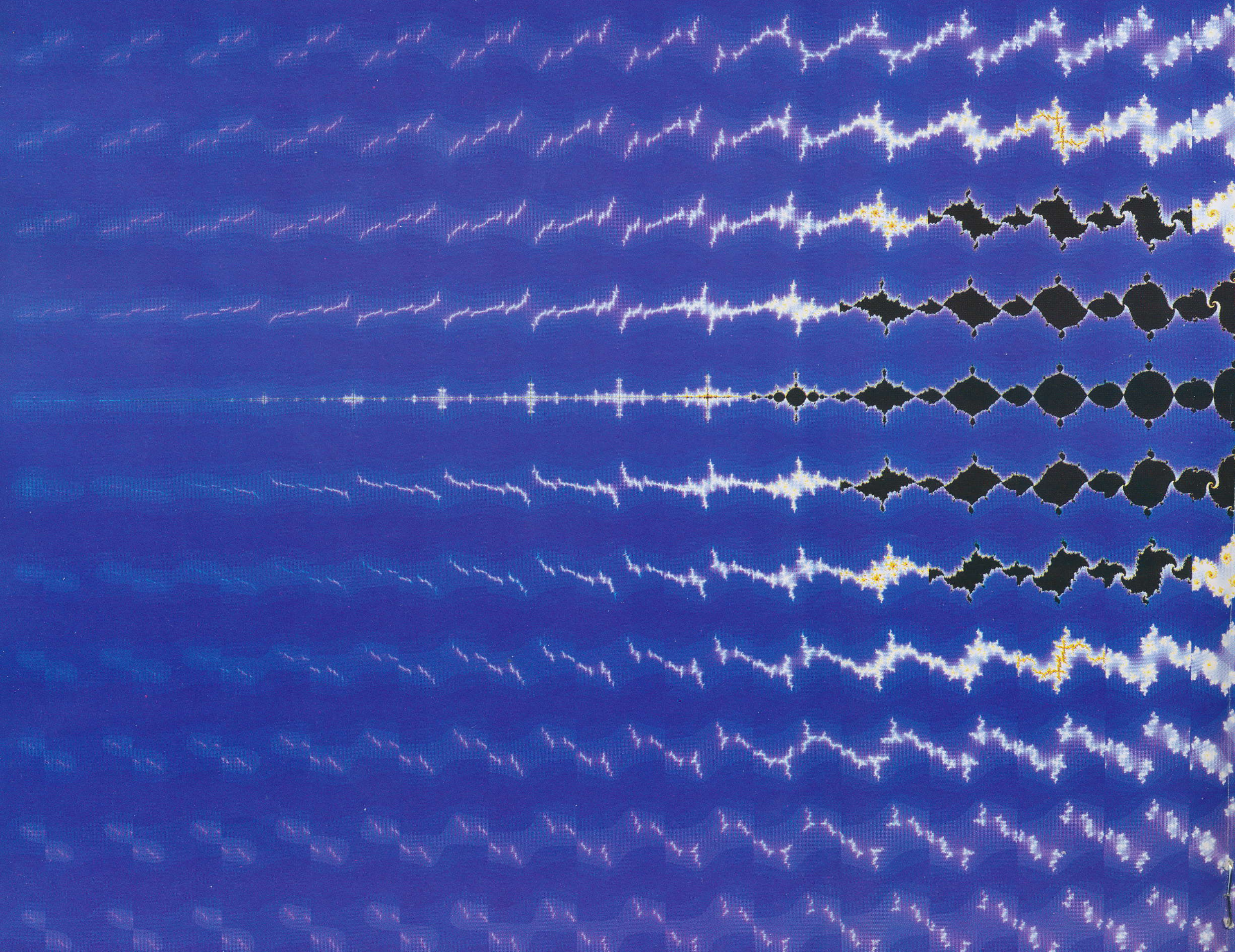
- iterations — максимальное количество итераций (шагов), точность построения;
- cx, cy — координаты центра квадрата, в котором производится построение;
- eps — половина стороны квадрата.

```
import java.awt.*;
import java.applet.*;
public class MandBW extends Applet {
  int size,iterations;
  double cx,cy,eps;
  public void init() {
    size=getSize().width;
    iterations=Integer.parseInt(getParameter
              ("iterations"));
    cx=Double.parseDouble(getParameter("cx"));
    cy=Double.parseDouble(getParameter("cy"));
    eps=Double.parseDouble(getParameter("eps"));
  }
  double a2x(int ax) {
    return (cx-eps)+ax*(2*eps/size);
  }
  double a2y(int ay) {
    return (cy+eps)-ay*(2*eps/size);
  }
  public void paint(Graphics g) {
    int x,y,i;
    Complex z,c;
    Color color;
    for(x=0;x<size;x++) {
      for(y=0;y<size;y++) {
        c=new Complex(a2x(x),a2y(y));
        z=new Complex(0);
        i=0;
        while ((i<iterations)&&(z.abs()<2))
          {z=c.add(z.mult(z));i++;}
        if (i==iterations) color=Color.black;
        else color=Color.white;
        g.setColor(color);
        g.drawOval(x,y,1,1);
      }
    }
  }
}
```

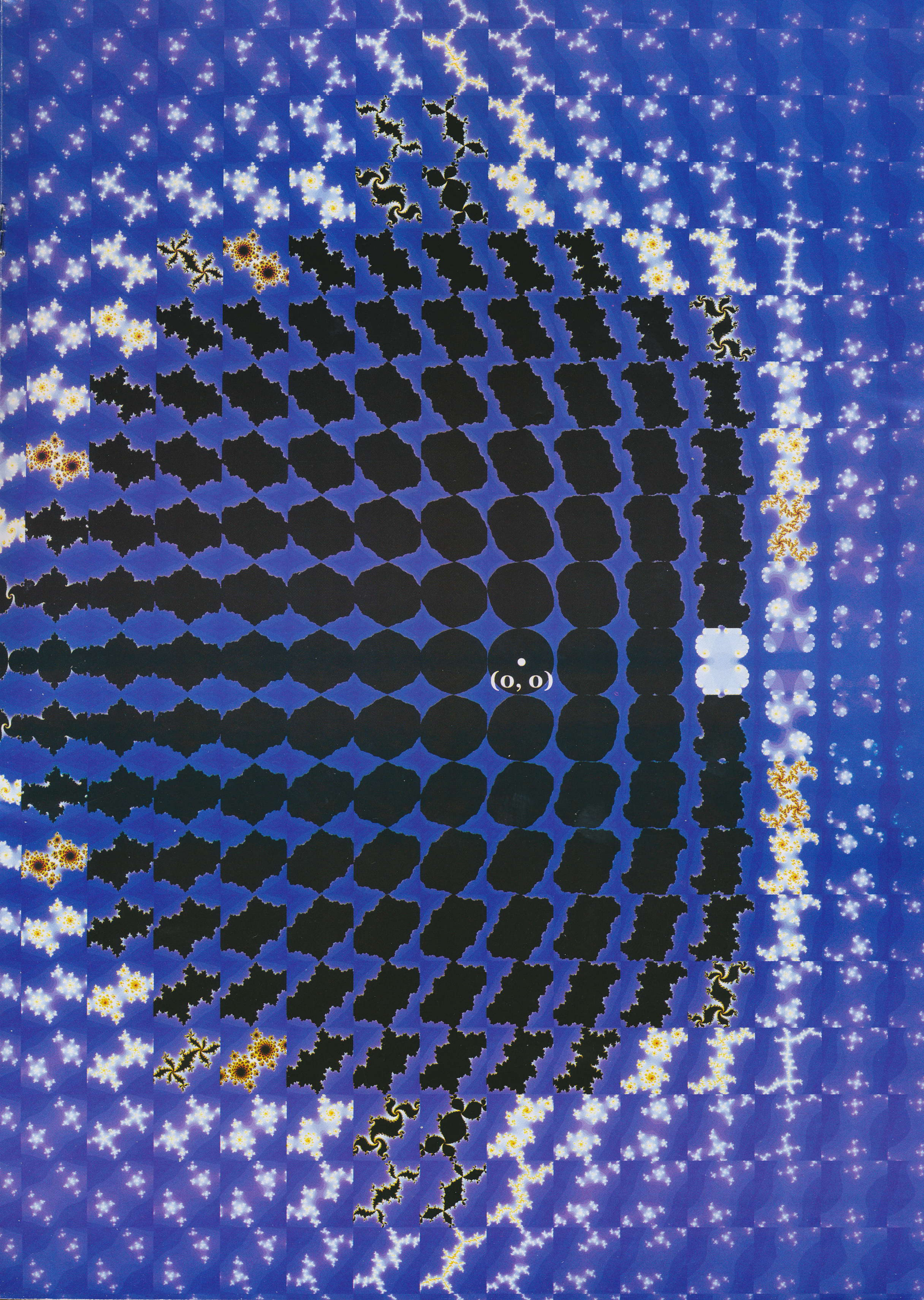
А цвет-то откуда?

Именно цветные картинки удивительной красоты принесли множеству Мандельброта известность. Но, строго говоря, цвет в данном случае скорее художественный прием, нежели что-то глубоко научное. Чтобы понять природу цвета, сначала раскрасим множество Мандельброта в оттенки серого следующим образом. Определим некоторое количество градаций серого, удобно выбрать 256 градаций, причем занумеровать их так: 0 — белый, 255 — черный. Далее, как обычно, возьмем точку и подставим в итерационную последовательность. Если она прямо сразу (на нулевом шаге) улетела, покрасим ее в белый цвет. Если на первом шаге — в “чуть-чуть-чуть-чуть серый”. Если, допустим, на 128, точка будет иметь насыщенный (50%-ный) серый цвет. Если на 254 — практически черный.

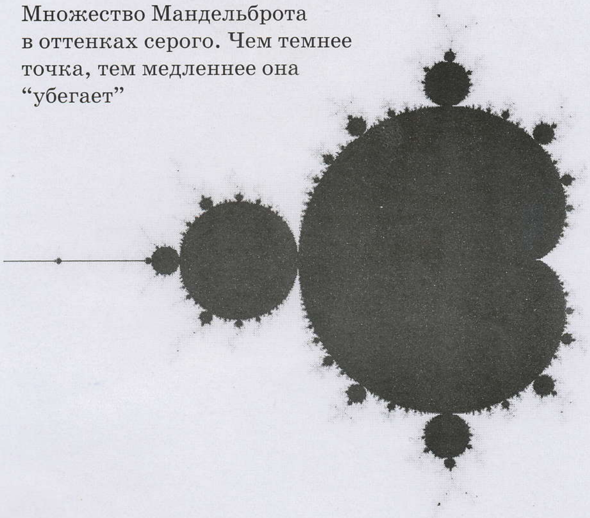
Французский математик Бенуа Мандельброт (Benoit Mandelbrot) родился 20 ноября 1924 года в Варшаве. Более всего он известен как отец фрактальной геометрии. Мандельброт является профессором, почетным преподавателем Йельского университета, научным сотрудником компании IBM.



Множества Жюлиа для различных точек внутри и вне множества Мандельброта. Можно видеть, как множества Жюлиа становятся несвязными, "рассыпаются" при пересечении границы множества Мандельброта. Эту уникальную иллюстрацию можно найти на сайте http://commons.wikimedia.org.


(0, 0)

Множество Мандельброта в оттенках серого. Чем темнее точка, тем медленнее она "убегает"



Фрагмент множества Мандельброта в оттенках серого

А уж если точка добралась до 255-го шага, будем считать, что она принадлежит множеству Мандельброта, и покрасим ее в черный цвет.

Таким образом, мы получим картинку в градациях серого, которая, вообще говоря, имеет некоторый смысл. Здесь цвет фактически показывает скорость убегания точки. Чем точка ярче, тем быстрее она улетает.

Дальше — чистые художества. Можно вместо градаций серого сделать градации любого цвета. Можно определить палитру с любым количеством цветов и назначать цвет точке по описанному выше принципу — шаг убегания равен номеру цвета в палитре.

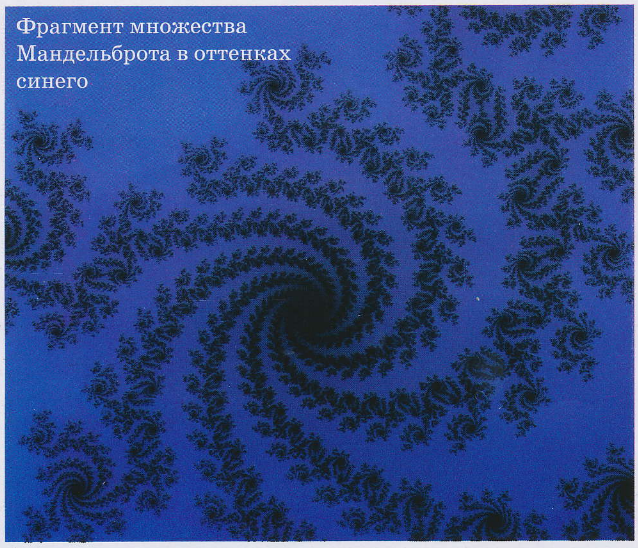
Вначале было... множество Жюлиа

Мы уже отметили выше, что множество Мандельброта было открыто не тем, чье имя оно заслуженно носит, а много раньше — в начале XX века. В то время исследованиями итерационных последовательностей комплексных чисел занимались, в частности, французские математики Пьер Фату (его мы упоминали выше) и Гастон Жюлиа. Имя последнего увековечено в названии множеств, носящих его имя. Именно множеств, поскольку в отличие от множества Мандельброта, которое одно, множеств Жюлиа много (бесконечно много). Множества Жюлиа и Мандельброта — ближайшие родственники. В частности, имея программу для построения множества Мандельброта, можно за пару секунд получить программу построения множеств Жюлиа. Обратное, разумеется, тоже справедливо.

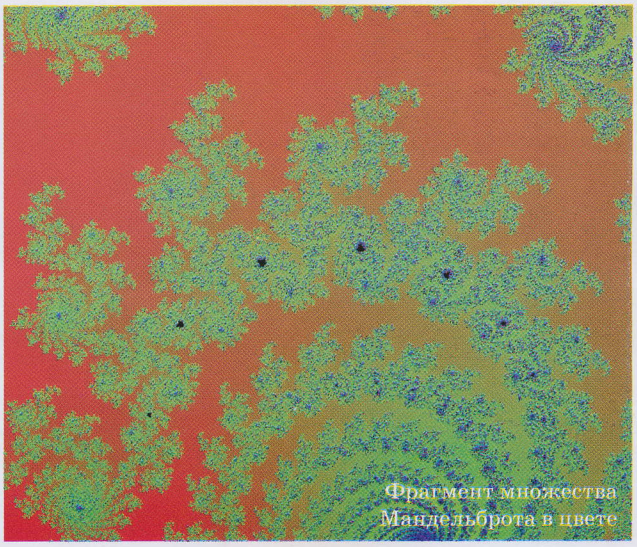
Как же строятся множества Жюлиа? При построении множества Мандельброта мы *перебираем* значения c и для каждого значения запускаем итеративный процесс из точки (0,0). Для построения множества Жюлиа необходимо *фиксировать* значение c и перебирать начальные значения z_0 из некоторой области. При этом критерий принадлежности множеству тот же — нас интересуют точки, которые не улетают в бесконечность.

Замечание для "суровых" математиков. Уважаемые коллеги! Мы понимаем, что описанным образом строятся не "настоящие", а так называемые "заполняющие" множества Жюлиа. Для проектов школьного уровня это несущественно.

Критерий, связанный с кругом радиуса 2, никуда, разумеется, не делся — и само значение c имеет смысл брать только из круга, и точки перебирать только в нем. Ну, то есть можно перебирать где угодно — можно и грибы зимой собирать, но только вне круга мы ничего не найдем.



Фрагмент множества Мандельброта в оттенках синего



Фрагмент множества Мандельброта в цвете

В множестве Мандельброта можно увидеть образы, поразительно напоминающие объекты живой природы. В частности, в нем имеются целые бассейны морских коньков. Почему — загадка.

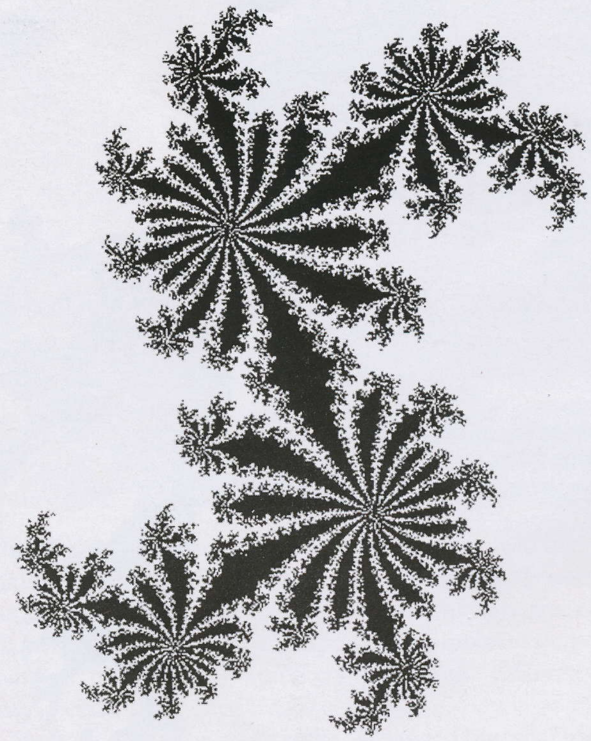
Гастон Жюлиа. Повязка на лице — следствие страшного ранения, полученного на полях Первой мировой войны

Как и множество Мандельброта, множества Жюлиа можно раскрашивать в зависимости от скорости убегания точек.

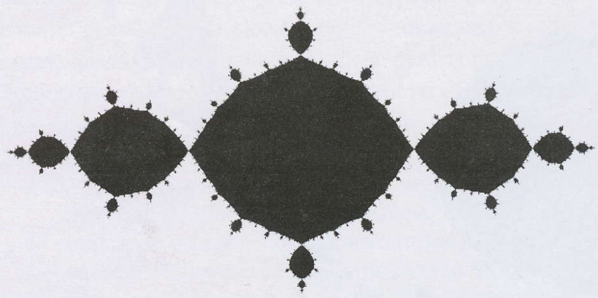
Апплет для построения черно-белого множества Жюлиа

Поскольку множество Жюлиа зависит от константы, в дополнения к параметрам, передаваемым в апплет для построения множества Мандельброта (см. выше), добавляются координаты точки *c* (вещественная и мнимая части).

```
import java.awt.*;
import java.applet.*;
public class JuliaBW extends Applet {
  int size,iterations;
  double cx,cy,eps;
  Complex c;
  public void init() {
    double rec,imc;
    size=getSize().width;
    iterations=Integer.parseInt(getParameter
               ("iterations"));
    cx=Double.parseDouble(getParameter("cx"));
    cy=Double.parseDouble(getParameter("cy"));
    eps=Double.parseDouble(getParameter("eps"));
    rec=Double.parseDouble(getParameter("rec"));
    imc=Double.parseDouble(getParameter("imc"));
    c=new Complex(rec,imc);
  }
  double a2x(int ax) {
     return (cx-eps)+ax*(2*eps/size);
  }
  double a2y(int ay) {
     return (cy+eps)-ay*(2*eps/size);
  }
  public void paint(Graphics g) {
    int x,y,i;
    Complex z;
    Color color;
    for(x=0;x<size;x++) {
      for(y=0;y<size;y++) {
        z=new Complex(a2x(x),a2y(y));
        i=0;
        while ((i<iterations)&&(z.abs()<2))
          {z=c.add(z.mult(z));i++;}
        if (i==iterations) color=Color.black;
        else color=Color.white;
        g.setColor(color);
        g.drawOval(x,y,1,1);
      }
    }
  }
}
```



Множество Жюлиа для $c = (0{,}377; -0{,}248)$



Множество Жюлиа для $c = (-1, 0)$

Множество Мандельброта как индикатор вида множеств Жюлиа

Имеются два принципиально различных вида множеств Жюлиа — связные и не связные. Связным называется множество, представляющее собой одно целое. Более формально, множество является связным, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком лежащей во множестве. Для всех констант *c*, принадлежащих множеству Мандельброта, соответствующее множество Жюлиа является связным. Для всех точек вне множества — не связным. В некотором смысле множества Жюлиа "рассыпаются" при пересечении границы множества Мандельброта. Это иллюстрирует рисунок на центральном развороте этого номера, в котором показан вид множеств Жюлиа для различных точек внутри и в окрестности множества Мандельброта.