

“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ”

Факультет Информационных Технологий и Программирования

Направление (специальность) Прикладная математика и информатика

Квалификация (степень) Магистр прикладной математики и информатики

Кафедра Компьютерных технологий Группа 6539

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему

*Комбинаторные конструкции для вычисления числа
паросочетаний и определителей на решётках*

Автор магистерской диссертации Аксенов В.Е.

Научный руководитель Кохась К.П.

Руководитель магистерской программы Васильев В. Н.

К защите допустить

Заведующий кафедрой Васильев В. Н.

“ ” _____ 2015 г.

Содержание

Введение	4
1 Важные определения и теоремы	7
1.1 Фигуры на плоскости	7
1.2 Преобразования графа при подсчёте определителей и количества паросочетаний	9
2 Фигуры на плоскости	13
2.1 Клетчатые фигуры	13
2.2 Крепости Янга	16
2.3 Разбиения на ромбы	18
Вывод	23
3 Техника удаления чипа	24
3.1 Операция Urban Renewal для определителей	24
3.2 Общая схема удаления чипа	29
3.2.1 Вырезаем прямоугольник	33
3.2.2 Подсчет паросочетаний при вырезании четырех-контактного чипа	39
3.3 Применение к пфаффианам и паросочетаниям	43
3.4 Применение техники вырезания чипа к алгоритмам	49
Вывод	53
Заключение	54
Литература	55

Введение

На протяжении последних десятилетий математическая физика получила бурное развитие. Например, в 2010 году Станислав Смирнов получил премию Филдса за исследование модели Изинга. Представляет интерес класс задач, связанных с подсчётом количества паросочетаний в графах. Рассмотрим в качестве примера задачу подсчёта высокотемпературной сверхпроводимости веществ на модели димеров. Представим себе кристаллическую решётку вещества. При действии магнитного поля атомы решётки разбиваются на пары — димеры. И количество способов атомам решётки разбиться на пары позволяет оценить высокотемпературную проводимость. А это не что иное как количество паросочетаний в специфическом графе.

Подсчёт определителя матрицы смежности графа также является востребованной задачей. Рассмотрим применение на примере абелевой песочной модели, введённой в 1987. Модель представляет из себя клеточный автомат, каждая клетка которого выдерживает фиксированное количество песчинок, для различных клеток количества могут различаться. Изначально в каждой клетке находится какое-то количество песчинок, при превышении критического количества в клетке, песчинки рассыпаются по соседним клеткам. Утверждается, что если в системе присутствует клетка, которая может выдержать бесконечное число песчинок, то система достигнет состояния равновесия. Количество важных состояний системы является определителем несколько поправленной матрицы смежности.

Пусть G — произвольный связный (неориентированный) граф, и пусть $A(G)$ — его матрица смежности. Граф G может иметь петли и взвешенные ребра, в этом случае $A(G)$ — произвольная симметричная матрица. В работе рассмотрены задачи о подсчёте определителей и количеств паросочетаний и представлены новые способы их решения.

Первая часть работы посвящена усовершенствованию комбинаторной техники, изобретённой в бакалаврской работе автора, для подсчёта определителей матриц смежности односвязных клетчатых фигур на плоскости на различных решётках: прямоугольная, “крепостная” и шестиугольная. В качестве G рассматривается граф, двойственный к клетчатым фигурам на этих решётках.

Во второй части дипломной работы описывается комбинаторная техника для вычисления определителя $\det A(G)$, которая обобщает трюк “Urban Renewal” Куперберга и Проппа, применяемый при подсчете паросочетаний графа.

Для вычисления определителя $\det A(G)$ мы вводим специальную операцию – *удаление чипа*. Под *чипом* H мы подразумеваем практически произвольный индуцированный подграф графа G с единственным ограничением $\det(A(H)) \neq 0$. Вершины чипа, из которых ведет ребро наружу (в остальную часть графа G), и сами эти ребра будем называть *наружными*, а вторые концы этих ребер – *контактами* (на которые крепится чип). не более одного ребра. Удалив из графа G чип H и все его наружные ребра, мы сразу же выполняем “ремонт” оставшегося графа, добавляя перемычки (т.е. ребра с весами) между контактами. Расположение и вес перемычек зависят от чипа. Обозначим через G' граф, полученный удалением из графа G чипа H и последующего ремонта. Основное свойство операции удаления чипа, ради которого она применяется, состоит в том, что

$$\det A(G) = \det A(H) \det A(G').$$

В главе 1 вводятся определения и утверждения, которые нужны для изложения результатов и их доказательств.

В параграфе 2.1 описывается алгоритм подсчёта определителя односвязной клетчатой фигуры, основанный на технике подсчёта паросочетаний.

В параграфах 2.2 и 2.3 мы развиваем комбинаторную технику для подсчёта определителей матриц смежности односвязных фигур, расположенных на других решётках: крепостной и шестиугольной.

В параграфе 3.1 мы модифицируем операцию Urban Renewal, делая ее пригодной для подсчетов определителей.

В параграфе 3.2 мы описываем общую схему удаления чипа, изучаем подробности удаления прямоугольных чипов. Все приводимые конструкции сопровождаются примерами.

В параграфе 3.3 мы применяем эту технику к подсчету паросочетаний и, в частности, доказываем теорему об удалении четырехконтактного чипа, обобщающую идеи метода графической конденсации Куо.

В параграфе 3.4 описываются применения техники по вырезанию чипа к

взвешенным определителям различных фигур для получения алгоритмов их подсчёта, имеющих асимптотику меньшую, чем стандартный алгоритм Гаусса.

1 Важные определения и теоремы

В этом разделе мы приводим определения и результаты, необходимые для рассуждений в работе. Они разбиты по разделам, которые соответствуют разделам самой работы.

1.1 Фигуры на плоскости

В этом разделе мы опишем основные решетки на плоскости, на которых мы рассматриваем задачи о паросочетаниях, и основные факты о фигурах на этих решётках.

Полезным инструментом в задачах о замощениях домино является следующая несложная комбинаторная лемма.

Лемма 1.1 (о полудиagonали ([2])). Пусть фигура F содержит фрагмент, состоящий из трёх диагональных рядов клеток, показанных на рис. 1, причём клетки, помеченные крестиками, не принадлежат фигуре. Тогда множество замощений фигуры F , не содержащих доминошку, помеченную жирными кружочками, разбивается на хорошие пары.

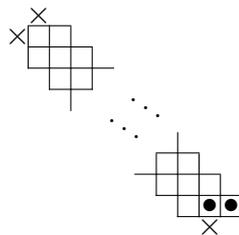


Рис. 1. Полудиagonalь

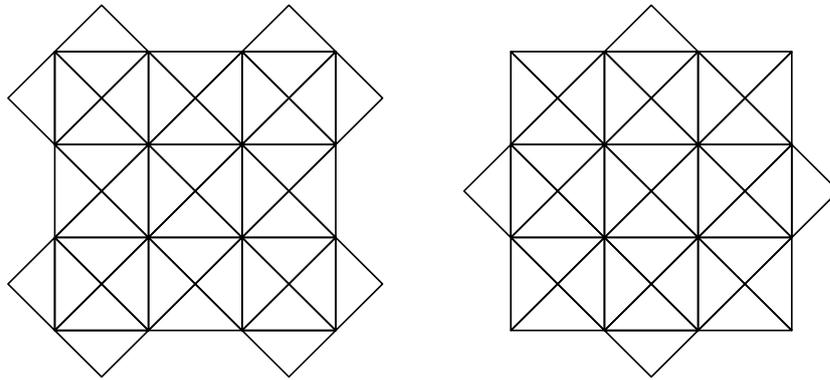
Замощением клетчатой фигуры будем называть разбиение этой фигуры на домино. В статье [1] изучаются вопросы вычисления определителей матриц смежности клетчатых фигур с помощью изучения замощений этих фигур. Следуя [1], будем называть пару разбиений на домино *хорошей*, если количества вертикальных домино в них отличается ровно на два.

Теорема 1.1. Пусть F произвольная односвязная клетчатая фигура площади $2s(F)$. Если все замощения фигуры F разбиваются на хорошие пары, то

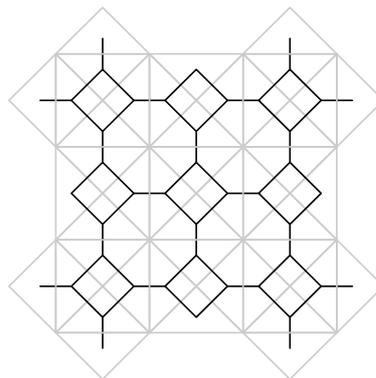
$\det A_F = 0$. Если все замощения, кроме одного, разбиваются на хорошие пары, то $\det A_F = (-1)^{s(F)}$.

В разделе 3 мы дадим обобщение этой теоремы на случай фигур, заданных на других решётках, — “крепостной” и шестиугольной. Опишем их подробнее.

Определение 1 ([14]). Крепостью порядка n называется квадрат $n \times n$, в котором проведены все диагонали и вдоль каждой из его сторон добавлены треугольники в чётном или нечётном порядке. При чётном n имеются 2 изо-морфных относительно вращения на 90° варианта, тогда как при нечётном n , 2 варианта существенно различны.



Определение 2. Рассмотрим граф, двойственный к крепости, на каком-либо примере.

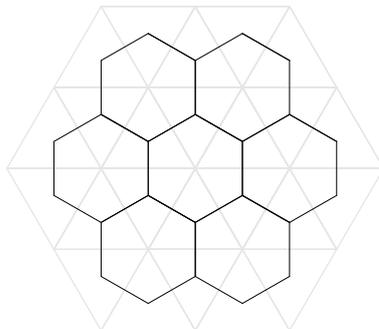


Таким образом, двойственный граф состоит из ромбиков и восьмиугольников. Описанную решётку будем в дальнейшем называть крепостной.

Определение 3 ([13]). Рассмотрим фигуру, расположенную на решётке, состоящей из треугольников, и разобьём треугольники, принадлежащие этой фи-

гуре, на пары, если они смежны. Полученное разбиение будет называть разбиением фигуры на ромбы.

Двойственным графом к ней является шестиугольная решётка. И разбиение фигуры на ромбы это не что иное, как паросочетание в ней.



1.2 Преобразования графа при подсчёте определителей и количества паросочетаний

Пусть дан (неориентированный) граф G , для каждого ребра которого задан вес – произвольное вещественное число. *Паросочетание* – это набор ребер графа, разбивающий его множество вершин на пары, *вес паросочетания* – это произведение весов его ребер. Сумму весов всех паросочетаний графа G обозначим через $M(G)$.

Мы можем считать граф G ориентированным, полагая, что каждое его (неориентированное) ребро представляет собой пару ребер с противоположной ориентацией. Под *1-фактором* графа G понимается его ориентированный подграф, содержащий все вершины, у которого каждая вершина имеет выходящую степень 1 и входящую степень 1. Хорошо известна (см., например, [1]) комбинаторная интерпретация определителя $\det A(G)$, когда он вычисляется по формуле

$$\det A(G) = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} W(\pi), \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем 1-факторам графа G , через $W(\pi)$ обозначен вес 1-фактора π , а через $\sigma(\pi)$ – количество четных циклов в π . Помимо этого известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между парами разбиений на домино и 1-факторами графа G .

Опишем основные преобразования графов, используемые при подсчёте опре-

делителей и числа паросочетаний.

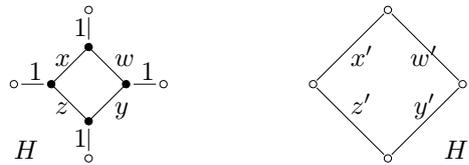


Рис. 2. Urban renewal.

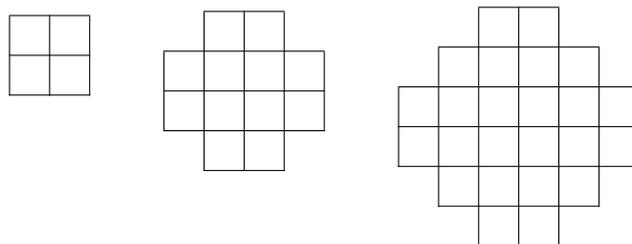
Лемма 1.2. Пусть граф G содержит подграф H , изображенный на рис. 2 слева, причем в графе могут быть ребра, не показанные на рисунке, но все черные вершины имеют степень 3, т.е. все их ребра указаны. Заменяем этот подграф на подграф H' , изображенный на рис. 2 справа, где новые веса задаются формулами $x' = \frac{y}{xy+wz}$, $y' = \frac{x}{xy+wz}$, $z' = \frac{w}{xy+wz}$ и $w' = \frac{z}{xy+wz}$. Полученный граф назовем G' . Тогда

$$M(G) = (xy + zw)M(G').$$

Это утверждение принадлежит Купербергу и Проппу [11]. Преобразование, описанное в лемме, они назвали Urban Renewal. Оно и является отправной точкой для второй части работы.

Мы применим аналогичное преобразование для подсчётов определителей матриц смежности фигур. Одна из них – это ацтекский диамант. Напомним его определение:

Определение 4 ([6]). Ацтекский диамант ранга n — это “клетчатый ромбик” со стороной n . На рисунке ниже изображены ацтекские диаманты ранга 1, 2 и 3.



Отметим еще пару утверждений о преобразованиях, сохраняющих определитель [12, теоремы 2, 3].

Лемма 1.3. Пусть в графе имеется ребро из u в v веса w . Тогда если заменить это ребро на путь длины 5 с весами ребер $1, 1, w, 1, 1$, то определитель матрицы смежности графа не изменится.

Лемма 1.4. Пусть в графе G имеется вершина v , смежная с вершинами множества V_1 , и вершина w , смежная с вершинами множества $V_1 \cup V_2$. Удалим из графа G все ребра, ведущие из w в V_1 . Определитель матрицы смежности не изменится.

Из работы Бибака [3] известны следующие лемма и две теоремы, которые будут доказаны в дальнейшем.

Лемма 1.5. Пусть n — положительное натуральное число и пусть $a \in \mathbb{Z}$, что $\gcd(a, n) = 1$. Тогда для любого числа x

$$\sin(nx) = 2^{n-1}(-1)^{\frac{(a-1)(n-1)}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \sin\left(x + \frac{aj\pi}{n}\right).$$

Также

$$\prod_{j=1}^{n-1} \sin\left(\frac{aj\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{(a-1)(n-1)}{2}} \cdot \frac{n}{2^{n-1}}$$

и

$$\prod_{j=1}^{n-1} \cos\left(\frac{aj\pi}{n}\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{a(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}, & n \text{ — нечётное,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1.2.

$$\det A(C_n \times P_{m-1}) = \begin{cases} m, & \text{если } n \text{ нечетно и } \text{НОД}(m, n) = 1, \\ (-1)^{m-1} m^2, & \text{если } n \text{ четно и } \text{НОД}(m, n/2) = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 1.3.

$$\det A(C_n \times C_m) = \begin{cases} 4^{\text{НОД}(m, n)}, & \text{если } m \text{ и } n \text{ нечетны,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Количество паросочетаний не вычисляется столь же просто, даже для таких несложных фигур, как в предыдущих теоремах. С помощью техники вырезания чипа, мы докажем следующую теорему Чуку [4] о паросочетаниях в прямоугольниках.

Теорема 1.4. *Если $N + 1$ делится на $n + 1$, $M + 1$ делится на $m + 1$, то $\#(P_N \times P_M)$ делится на $\#(P_n \times P_m)$.*

2 Фигуры на плоскости

2.1 Клетчатые фигуры

Пусть дана фигура на клетчатой плоскости. Рассмотрим матрицу смежности двойственного графа, вершинами которого являются клетки, смежные клетки соединены рёбрами. Задача: посчитать определитель матрицы смежности. Как показано в работе [1], можно сразу же найти значение определителя 1.1, если известно, что разбиения клетчатой фигуры на домино разбиваются на хорошие пары.

Ниже показано, что для широкого класса фигур такое разбиение на пары действительно существует.

Теорема 2.1. *У любой односвязной фигуры на клетчатой плоскости все разбиения на домино, кроме, возможно, одного, можно разбить на хорошие пары.*

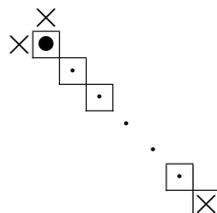
Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции по площади фигуры.

База фигура площади 2, то есть это просто доминошка. Для неё очевидно выполняется условие теоремы.

Переход.

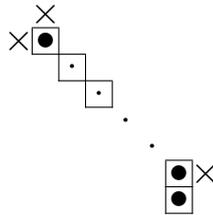
Сначала выберем граничную “угловую” клетку фигуры, из которой мы будем применять теорему о полудиagonали. Для этого прочертим диагонали всех клеток, идущие вправо-вниз. Возьмём угол одного из двух видов: Γ или \lrcorner , который лежит на самой нижней диагонали. Пусть, не умаляя общности, это будет Γ . Запустим лемму о полудиagonали из выбранного угла. Возможны три случая:

Первый случай. Клетки, соседние справа и снизу по стороне к последней клетке полудиagonали, принадлежат фигуре.



Заметим, что такое не могло произойти, потому что, очевидно, найдётся угол \lrcorner , который лежит на диагонали ниже, чем выбранный.

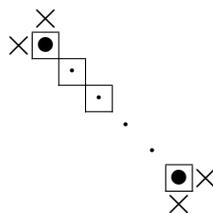
Второй случай. Фигуре принадлежит ровно один из соседей справа или снизу по стороне к последней клетке полудиagonали.



По лемме о полудиagonали, мы можем удалить доминошку, помеченную жирными кружочками, так как все разбиения, которые не содержат её, разбиваются на хорошие пары. Применяем предположение индукции.

Могло произойти, что после удаления доминошки, фигура распалась на несколько частей. Множество разбиений на домино в большой фигуре является декартовым произведением множества разбиений на домино частей. Если хотя бы в одной разбиения на домино разбились на хорошие пары, то и в нашей фигуре они разбились. Если каждая часть имеет непарное разбиение, то их декартово произведение произведение даст ровно одно непарное разбиение в нашей фигуре.

Третий случай. Клетки, соседние справа и снизу по стороне к последней клетке полудиagonали, не принадлежат фигуре.



По рассуждениям, схожим с рассуждениями в доказательстве леммы о полудиagonали, несложно заметить, что в этом случае разбиения на домино в фигуре разбиваются на хорошие пары.

□

Следствием теоремы ?? и предыдущей теоремы, является следующая.

Теорема 2.2. Пусть F — произвольная односвязная клетчатая фигура на

плоскости, тогда определитель её матрицы смежности равен либо 0, либо ± 1 .

Утверждение теоремы 2.2 можно использовать для эффективного подсчёта определителей, быстрее чем стандартный алгоритм Гаусса.

Теорема 2.3. *Определитель матрицы смежности любой односвязной клетчатой фигуры целочисленен и по модулю не превышает единицы. Существует алгоритм подсчёта такого определителя за $O(\text{площадь}^2)$ операций.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из 2.2.

Алгоритм вычисления определителя построим, взяв за основу индукционное рассуждение из доказательства теоремы 2.2.

У нас будет рекурсивная функция, которая принимает фигуру:

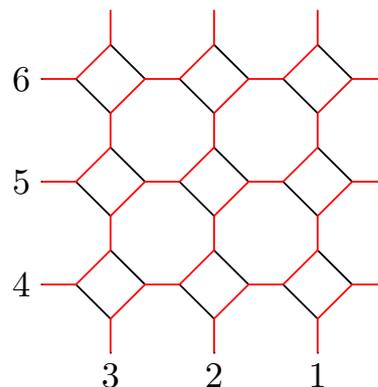
1. Если фигура состоит из двух касающихся клеток, то нужно вернуть 1.
2. Нужно найти подходящий угол для запуска леммы о полудиagonали ??
Операция производится за $O(\text{площадь фигуры})$ операций.
3. Проводим из найденной клетки диагональ вправо-вниз. Операция производится за $O(\text{площадь фигуры})$ операций.
4. Выясняем расположение границы фигуры вблизи последней клетки выпущенной диагонали. Рассматриваем случаи аналогичные случаям теоремы 2.2. Как итог: или сразу возвращаем 0, или удаляем доминошку.
5. В случае удаления, находим все связные части фигуры за $O(\text{площадь фигуры})$ операций и запускаемся от них рекурсивно.
6. Результат функции будет равен произведению результатов для меньших фигур.

После запуска рекурсивной процедуры, нужно умножить получившийся результат на $(-1)^{\text{полуплощадь}}$.

Несложно заметить, что функция будет вызываться не более $O(\frac{\text{площадь фигуры}}{2})$ раз. Итого: получаем алгоритм за $O(\text{площадь фигуры}^2)$. \square

2.2 Крепости Янга

Определение 5. Пусть дана произвольная фигура на крепостной решётке. Рассмотрим на крепостной решётке “извилистые” ломаные, идущие слева-снизу вправо-вверх (см. рисунок, на котором эти ломаные изображены красным цветом). Пронумеруем ломаные, задевающие фигуру, и каждой вершине фигуры сопоставим число — номер ломаной, на которой она лежит, в дальнейшем это число будем называть ординатой вершины.



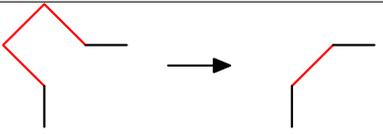
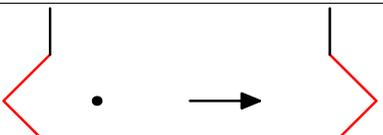
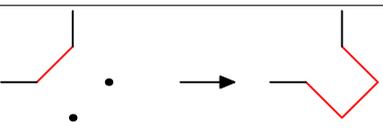
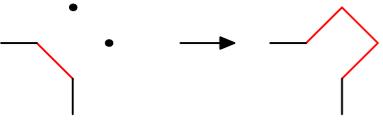
Теорема 2.4. Для любой односвязной фигуры на крепостной решётке выполняется следующее равенство: $a - b + 2d - 2 \equiv v \pmod{4}$, где a — количество вершин на границе с чётной ординатой, b — количество вершин на границе с нечётной ординатой, d — количество вершин строго внутри фигуры, а v — количество рёбер, которые идут в направлении вправо-вниз.

Доказательство. Заметим, что любая односвязная фигура на решётке однозначно задаётся своей границей — циклом. Будем доказывать с помощью индукции по общему количеству ромбов и восьмиугольников внутри цикла.

База. Очевидно, что для цикла, содержащего ноль ячеек, то есть цикл проходящий по какому-то ребру “туда” и “обратно”, условие теоремы выполняется.

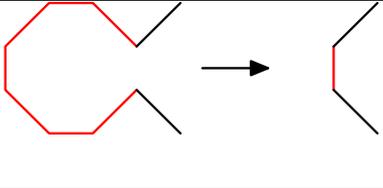
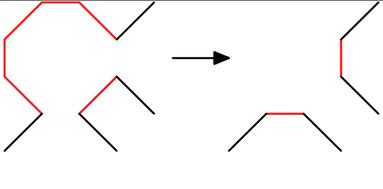
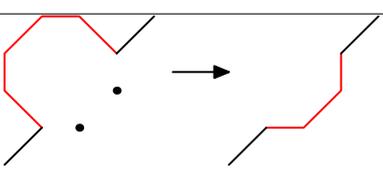
Переход.

Рассмотрим сначала случай, когда один из ромбов решётки примыкает изнутри к границе фигуры. Удалим этот ромб из фигуры и проверим, что сравнение по модулю из утверждения теоремы не нарушается. Различные варианты расположения ромба на границе фигуры приведены в таблице, где четыре последних столбца отвечает за изменение соответствующей величины.

Случай	$a - b$	d	v	количество компонент
	2	0	2	0
	0	0	0	0
	2	1	0	0
	0	0	2	1
	2	2	2	0
	0	2	0	0

Последний столбец отвечает за появление новой компоненты связности. Так как условие теоремы распространяется только на односвязные фигуры, при появлении двух компонент сравнения из условия теоремы нужно складывать.

Мы разобрали случаи, когда существует ромб на границе. Допустим, что ни один из разобранных случаев не имел место, тогда на границе фигуры располагаются только восьмиугольники. Удалим самый левый, а из них самый верхний, восьмиугольник:

Случай	$a - b$	d	v	количество компонент
	2	0	2	0
	4	0	2	1
	2	2	2	0

Несложно заметить, что здесь разобраны всевозможные случаи с точностью до геометрических преобразований. Проходя по каждому пункту, можно убедиться, что при удалении клетки условие теоремы будет соблюдаться. \square

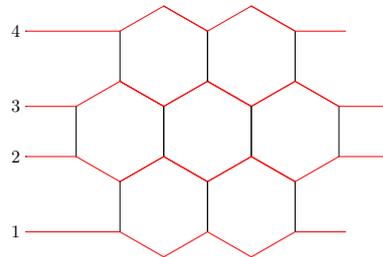
Эта теорема является хорошим заделом к подсчёту определителя односвязной фигуры на крепостной решётке. Но к сожалению сформулировать и доказать теорему об определителе матрицы смежности фигуры на крепостной решётке не удалось.

2.3 Разбиения на ромбы

Существует ещё один вид разбиений, который является одним из популярных для изучения количества разбиений на домино, называемый разбиения на ромбы на треугольной решётке. Как известно из определения 3 можно рассматривать двойственную структуру, а именно, шестиугольную решётку.

Определение 6. Пусть дана произвольная фигура на шестиугольной решётке. Рассмотрим на решётке ломаные, которые идут слева направо (см. рисунок, на котором эти ломаные изображены красным цветом) Пронумеруем ломаные, задевающие фигуру, и каждой вершине фигуры сопоставим число — номер

ломаной, на которой она лежит. В дальнейшем будем называть это число ординатой вершины.



Следующая теорема является аналогом теоремы из предыдущего пункта, но для шестиугольной решётки.

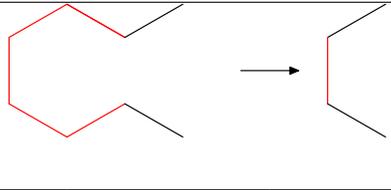
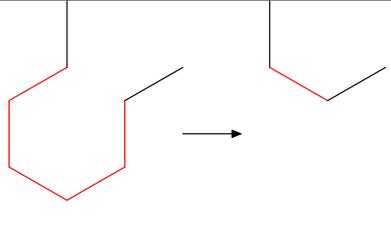
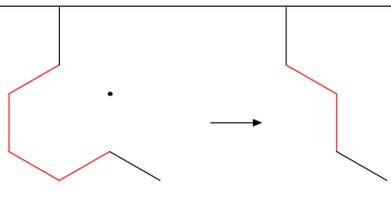
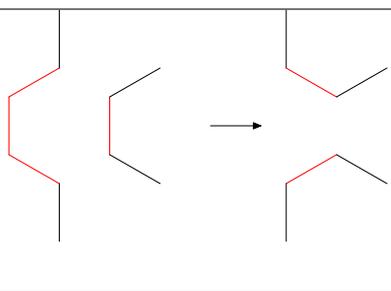
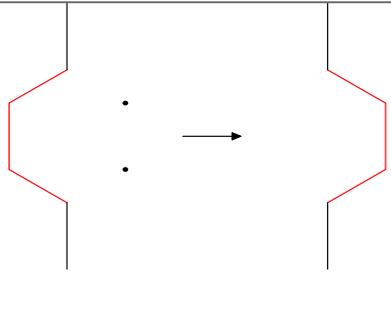
Теорема 2.5. *Для любой односвязной фигуры на шестиугольной решётке выполняется следующее равенство: $a - b + 2d - 2 \equiv v \pmod{4}$, где a — количество вершин. На границе с чётной ординатой, b — количество вершин на границе с нечётной ординатой, d — количество вершин строго внутри фигуры, а v — количество вертикальных рёбер на границе.*

Доказательство. Заметим, что любая односвязная фигура на шестиугольной решётке задаётся своей границей — циклом. Проведём индукцию по количеству шестиугольников внутри цикла.

База. Очевидно, что для цикла, содержащего ноль шестиугольников, условие теоремы выполняется.

Переход.

Возьмём самый левый, а при равенстве верхний, шестиугольник, и удалим его. Рассмотрим случаи его расположения (случаи, которые получаются симметрией, мы опускаем):

Случай	$a - b$	d	v	количество компонент
	0	0	0	0
	2	0	2	0
	2	1	0	0
	0	0	2	1
	0	2	0	0

Тем самым мы свели задачу к меньшим. А по предположению индукции для них условие теоремы выполняется. \square

Определение 7. Ребро будем называть *восходящим*, если оно вертикально и направлено вверх, и *нисходящим*, если оно вертикально и направлено вниз.

Лемма 2.1. В любом цикле на шестиугольной решётке количества восходящих и нисходящих рёбер равны.

Замечательным образом оказывается, что для каждой фигуры F знак слагаемого, входящего в разложение определителя её матрицы смежности, полностью задаётся количеством восходящих рёбер соответствующего 1-фактора. Также нужно понимать, что под домино в лемме мы подразумеваем рёбра паросочетаний.

Лемма 2.2. *Для любой односвязной шестиугольной фигуры, существует её знак $\text{sgn } F$, что знак любой конфигурации отличается от $(-1)^{\text{количество восходящих вертикальных рёбер в конфигурации}}$ на $\text{sgn } F$. Также $\text{sgn } F = (-1)^h$, где h — количество невертикальных домино.*

Доказательство. Первое утверждение является просто следствием из предыдущей теоремы. Для любого цикла из конфигурации d делится на 2. Сложим $a - b + 2d - 2$ по всем циклам. Получим: $A - B + 2d - 2 \equiv v \Leftrightarrow \frac{A-B}{2} + d + \text{число циклов} \equiv V$, где V — количество вертикальных восходящих рёбер. $\text{Sign } F \equiv \frac{\text{число циклов} + \text{число восходящих рёбер}}{2} \equiv \frac{\text{число домино} + \text{число вертикальных домино}}{2} \equiv h$. \square

Следующая лемма сводит вычисление определителя матрицы A_F к изучению вертикальных статистик фигуры F .

Лемма 2.3. *g_F — многочлен вертикальной статистики конфигураций фигуры F .*

f_F — многочлен вертикальной статистики разбиений фигуры F на домино.

$$\text{Тогда } \det A_F = \text{sgn } F \cdot g_F(-1) = \text{sgn } F \cdot f_F^2(i).$$

Лемма 2.4. *Количество домино любого из трёх видов не зависят от разбиения на ромбы.*

Доказательство. Любое разбиение на домино можно перевести в любое другое флипом. Несложно заметить, что флип не меняет количество вертикальных домино. Поэтому каждое разбиение содержит одно и тоже число вертикальных домино. Аналогичное рассуждение можно провести и для остальных двух типов. \square

Следствие 2.1. $f_F(x) = Cx^v$, где v — количество вертикальных домино в любом разбиении, а C — количество разбиений на домино.

Собирая вместе утверждения лемм из данного пункта, получаем следующую теорему.

Теорема 2.6. $\det A_F = (-1)^{\frac{\text{количество вершин}}{2}} \cdot C^2$.

Доказательство. $\det A_F = \text{sgn } F \cdot f_F^2(i) = (-1)^h \cdot (-1)^v \cdot C^2 = (-1)^{h+v} \cdot C^2 = (-1)^{\frac{\text{количество вершин}}{2}} \cdot C^2$. □

Вывод

В этой главе была развита комбинаторная техника из бакалаврской работы. С помощью неё были доказаны две важные теоремы о величине определителя матрицы смежности односвязной фигуры на прямоугольной и шестиугольной решётках, а также был сделан первый шаг к подсчёту определителя односвязной фигуры на “крепостной” решётке.

3 Техника удаления чипа

3.1 Операция Urban Renewal для определителей

Следующая теорема является обобщением операции Urban renewal на подсчёт определителя матрицы смежности.

Теорема 3.1. Пусть граф G содержит подграф H , изображенный на рис. 2 слева, причем в графе могут быть ребра, не показанные на рисунке, но все черные вершины имеют степень 3, т.е. все их ребра указаны. Заменяем этот подграф на подграф H' , изображенный на рис. 2 справа, где новые веса задаются формулами

$$x' = \frac{y}{wz - xy}, \quad y' = \frac{x}{wz - xy}, \quad z' = \frac{w}{xy - wz}, \quad w' = \frac{z}{xy - wz}. \quad (2)$$

Тогда

$$\det A(G) = (xy - wz)^2 \det A(G'). \quad (3)$$

Доказательство. В доказательстве теоремы мы пользуемся интерпретацией определителя как суммы по 1-факторам графа G (см. 1).

Разобьем все 1-факторы графов G и G' на группы, у которых одинаково устроено пересечение с подграфами H и H' соответственно. После этого предьявим взаимно однозначное соответствие между этими группами (а иногда даже между отдельными 1-факторами), сохраняющее суммарный вес.

1) Каждому 1-фактору графа G , имеющему циклы, проходящие по ребрам x и y в подграфе H , поставим в соответствие 1-фактор графа G' , в котором эти фрагменты циклов заменены на ребра x' , y' (рис. 3 слева). Указанные фрагменты циклов в подграфе H давали вклад xy в вес 1-фактора. После замены мы имеем вес $x'y' = \frac{xy}{(wz - xy)^2}$, а также множитель $(wz - xy)^2$ в правой части

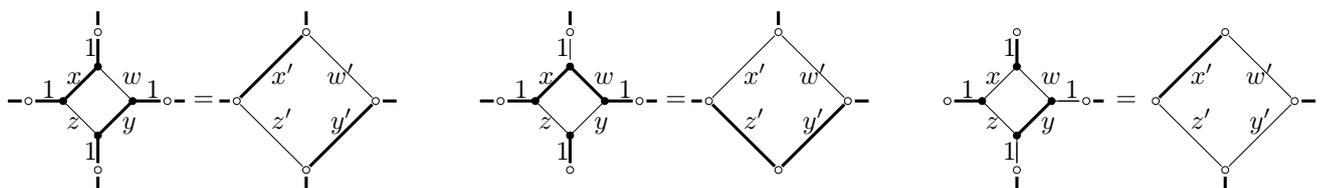


Рис. 3. Перестраиваем 1-факторы.



Рис. 4. Перестраиваем группы 1-факторов.

равенства (3). В итоге вес не изменился. Аналогично поступим, если циклы проходят по ребрам w, z .

2) Каждому 1-фактору графа G , имеющему длинный цикл, проходящий по ребрам x, w в подграфе H , и цикл длины 2, проходящий по вертикальному ребру (рис. 3 в центре), поставим в соответствие 1-фактор графа G' , в котором 2-цикл отсутствует, а фрагмент длинного цикла заменен на пару ребер z', y' . Аналогично поступим для конфигураций, содержащих 2-цикл, проходящий по ребру y , и два 2-цикла, примыкающих к ребру x (рис. 3 снизу), а также для похожих конфигураций. Сохранение веса проверяется так же, как в предыдущем пункте.

3) Соберем в одну группу 1-факторы графа G , которые совпадают вне графа H и при этом содержат либо цикл, проходящий по ребрам z, y, w (дающий вклад yzw в вес 1-фактора), либо 2-цикл по ребру y и длинный цикл, проходящий через x (и дающий вклад xy^2). Следует иметь в виду, что эти две конфигурации имеют разные знаки, поскольку количества циклов в них отличаются на 1. Каждой группе сопоставим 1-фактор в G , который вне графа H устроен так же (и поэтому вклад внешней части один и тот же для всех упомянутых 1-факторов) и при этом содержит ребро x' (рис. 4 слева). Опять получаем равенство весов, поскольку $yzw - xy^2 = (wz - xy)^2 x'$. Аналогично разбирается “двойственный” случай (рис. 4 справа).

4) Аналогично разбираются оставшиеся варианты (рис. 5). Отметим только, что правый цикл, показанный на рис. 5 сверху, и левый цикл на рис. 5 снизу должны рассматриваться с обеими возможными ориентациями, что удваивает их вклад. Равенство весов на рис. 5 обеспечивается тождествами $1 = (wz - xy)^2(x'^2 y'^2 + w'^2 z'^2 - 2x' y' w' z')$ и $x^2 y^2 + w^2 z^2 - 2xywz = (wz - xy)^2$. \square

Замечание 3.1. Преобразование $(x, y, z, w) \mapsto (x', y', z', w')$, заданное формулой (2), инволютивно. Множители из формулы (3) удовлетворяют соотношению

$$(xy - wz)^2(x'y' - w'z')^2 = 1.$$

Лемма 3.1. Пусть в графе G имеется вершина v , смежная с вершинами множества $V_v = \{v_1, \dots, v_n\}$. Разобьем множество V_v на два непересекающихся подмножества V_A и V_B и заменим вершину v на четырехзвенный путь $AC_1C_2C_3B$ (где C_i – новые добавленные вершины, ребра этого пути имеют вес 1), причем A соединим ребрами со всеми вершинами из V_A , а B – со всеми вершинами из V_B (веса ребер такие же, как были у вершины v). Полученный граф обозначим G' . Тогда $\det A(G) = \det A(G')$.

Доказательство. Построим биекцию между 1-факторами графа G и 1-факторами графа G' , сохраняющую знак 1-фактора. Для этого достаточно научиться надлежащим образом перестраивать циклы $\dots p \rightarrow v \rightarrow q \rightarrow \dots$, проходящие через вершину v (p и q – две вершины графа G , возможно, одинаковые).

Если $p \in V_A$ и $q \in V_A$, то заменим этот цикл на аналогичный цикл в G' , проходящий через A , v_i и v_j . Кроме того, добавим два новых двузвенных цикла $C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1$ и $C_3 \rightarrow B \rightarrow C_3$. Количество четных циклов увеличилось на 2, значит, определитель не изменился. Случай $p \in V_B$, $q \in V_B$ аналогичен.

Если же $p \in V_A$ и $q \in V_B$, заменим этот цикл на цикл $\dots p \rightarrow A \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow B \rightarrow q \rightarrow \dots$. Вес цикла и четность его длины не поменялись, а значит, определитель не изменился. \square

Из леммы 1.4 сразу следует, например, что при удалении висячей вершины и ее ребра определитель матрицы смежности следует поделить на вес удаленного ребра. Это, впрочем, очевидно с точки зрения 1-факторов.

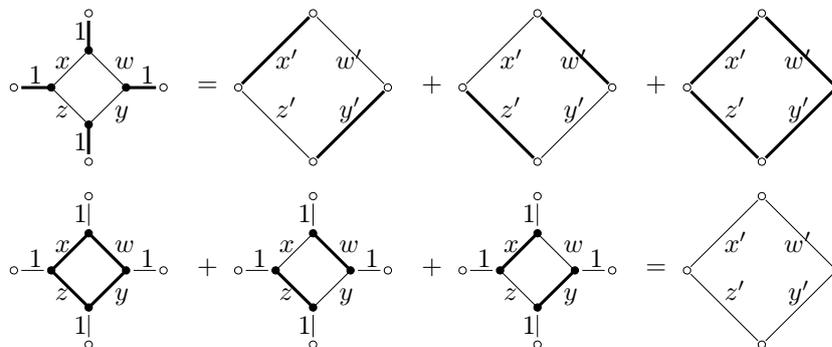


Рис. 5. Остальные отождествления.

Пример 3.1. Пусть D_n – это ацтекский диамант с весами ребер x, y, w и z , как показано на рис. 6 слева. Докажем, что

$$\det A(D_n) = (xy - wz)^{n(n+1)}.$$

Для этого продублируем классическое рассуждение Проппа [11], пользуясь леммами 3.1, 3.1.

Применим лемму 3.1 к каждой вершине графа и раскрасим ромбы в шахматном порядке (рис. 7 слева). В каждом чёрном ромбе проведём три раза операцию Urban Renewal, а в каждом белом ромбе проведём операцию Urban Renewal один раз. Поскольку правило (2) пересчета весов инволютивно, на ребрах теперь будут стоять веса x', y', w' и z' (рис. 7 справа). В результате всех операций определитель домножится на $(xy - wz)^{2n^2}$, так как количество ромбов равно n^2 . Удалим одно- и трехзвенные фрагменты на краю диаманта. От этого определитель не изменится, так как удаляемые ребра имеют единичный вес. Вместе с удалением этих фрагментов будут убраны крайние вершины диаманта, в результате останется диамант, размер которого на 1 меньше, а расстановка весов аналогична исходной (рис. 6 справа). Это дает нам индукционный переход.

Пример 3.2. Вычислим определитель матрицы смежности цилиндра $C_4 \times$

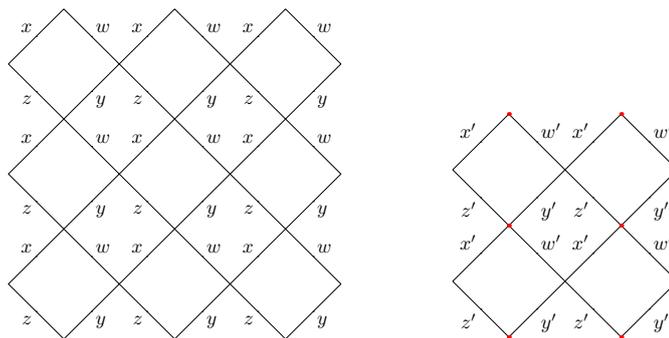


Рис. 6. Диаманты D_n и D_{n-1} .

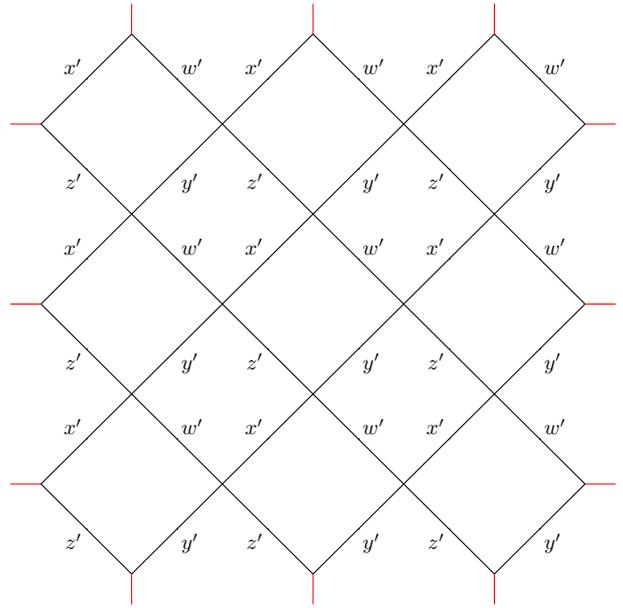
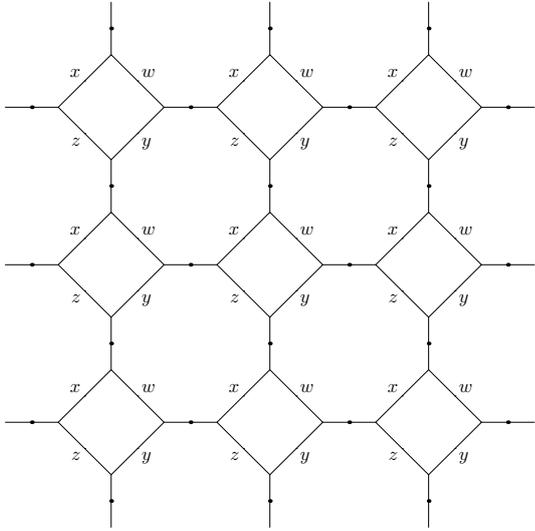


Рис. 7. Применяем Urban renewal.

P_{m-1} . А именно, докажем, что

$$\det A(C_4 \times P_{m-1}) = \begin{cases} m^2, & \text{если } m \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } m \text{ четно.} \end{cases}$$

Пользуясь леммой 3.1, будем последовательно удалять 4-циклы на краю цилиндра (рис. 8). Чтобы избежать при вычислениях нулей в знаменателях, будем считать, что ребра цикла H_0 на краю цилиндра имеют веса $x_0 = a, z_0 = 1, y_0 = a, w_0 = 1$, а все остальные ребра в графе имеют вес 1. После применения одной операции крайний цикл исчезает, и теперь на краю появляется новый цикл H_1 . Веса его ребер равны сумме весов ребер, которые еще до операции присутствовали в графе – а в графе было четыре ребра веса 1 – и новых ребер,

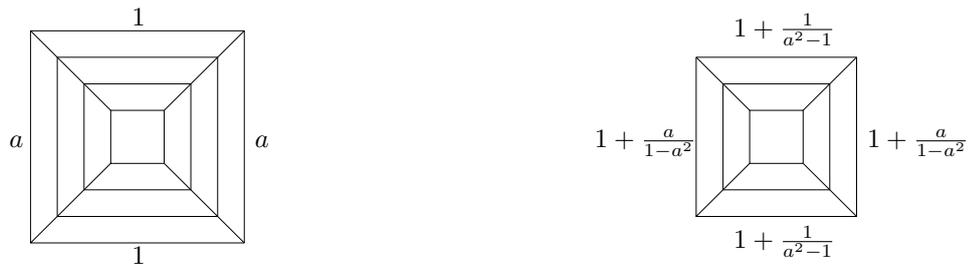


Рис. 8. Удаляем цикл на краю цилиндра.

веса которых равны $\frac{a}{1-a^2}, \frac{1}{a^2-1}, \frac{a}{1-a^2}, \frac{1}{a^2-1}$ в силу формулы (2). Итак,

$$x_1 = 1 + \frac{a}{1-a^2}, \quad z_1 = 1 + \frac{1}{a^2-1}, \quad y_1 = 1 + \frac{a}{1-a^2}, \quad w_1 = 1 + \frac{1}{a^2-1}.$$

Теперь по индукции проверяется, что после $2n$ повторений этой операции (индукция с шагом 2 удобна, поскольку формулы после четного и нечетного числа операций немного отличаются) веса в крайнем цикле будут равны

$$x_{2n} = y_{2n} = \frac{na^2 + a}{2na + 1}, \quad z_{2n} = w_{2n} = \frac{1 + 2na - na^2}{2na + 1},$$

а произведение определителей всех убранных циклов равно

$$\det A(H_0) \det A(H_1) \dots \det A(H_{2n-1}) = (2na + 1)^2.$$

В результате если m четно, скажем $m - 1 = 2n + 1$, то после $2n$ операций от исходного графа останется лишь один 4-цикл с весами ребер, указанными выше. Определитель матрицы такого цикла равен

$$(x_{2n}y_{2n} - z_{2n}w_{2n})^2 = \left(\frac{(2n+1)a + 1}{2na + 1} \right)^2 (a - b)^2,$$

и, значит, искомый определитель равен

$$\det A(H_0) \det A(H_1) \dots \det A(H_{2n})(x_{2n}y_{2n} - z_{2n}w_{2n})^2 = ((2n+1)a + 1)^2 (a - b)^2.$$

При $a = b = 1$ это выражение равно 0. Если же m нечетно, аналогично получаем, что определитель равен $((m-1)a + 1)^2$, и при $a = b = 1$ это выражение равно m^2 .

3.2 Общая схема удаления чипа

Пусть дан граф G . Чип H – это произвольный индуцированный подграф графа G , такой что $\det(A(H)) \neq 0$, где $A(H)$ его матрица смежности. Вершины чипа, из которых ведет ребро наружу (в остальную часть графа G), будем называть *наружными* вершинами, а вторые концы этих ребер – *контактами* (на

которые крепится чип).

Пусть чип H содержит h вершин и k контактов; рассмотрим в блочном виде матрицу смежности $A(G)$:

$$A(G) = \begin{pmatrix} A(H) & K & 0 \\ K^\top & L & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где K – блок $h \times k$, отвечающий за присоединение чипа к оставшемуся графу, L – блок $k \times k$, задающий ребра графа G , соединяющие контакты (он может быть нулевым), а звездочками обозначены элементы, отвечающие за остальные ребра вне чипа. Домножив слева на матрицу $D = \begin{pmatrix} A(H)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$, мы добьемся того, что в правом верхнем углу будет расположен единичный блок $h \times h$: $\begin{pmatrix} E & A(H)^{-1}K & 0 \\ K^\top & L & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$. Теперь вычтем подходящие строки, чтобы полностью занулить блок K^\top , при этом изменится также и блок L , получится матрица

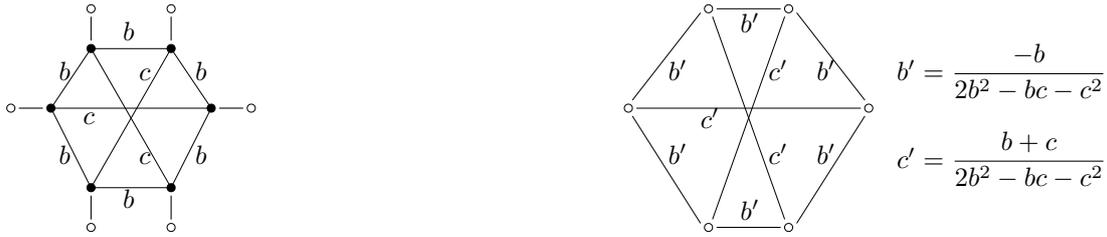
$$\begin{pmatrix} E & A(H)^{-1}K & 0 \\ 0 & \tilde{L} & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad \text{где } \tilde{L} = L - K^\top A(H)^{-1}K. \quad (5)$$

Наконец, домножив слева на D^{-1} , мы “вернем обратно” блок $A(H)$ и получим матрицу $\begin{pmatrix} A(H) & K & 0 \\ 0 & \tilde{L} & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$. Изменения, которые произошли с блоком L , мы истолковываем как “ремонт” или “установку перемычек”, т.е. проведение дополнительных ребер между контактами. Веса этих ребер указаны в матрице $-K^\top A(H)^{-1}K$. Граф, полученный в результате ремонта, обозначим G' . Очевидно, определитель матрицы не изменился в результате наших действий, а матрица $\begin{pmatrix} \tilde{L} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ – это в точности матрица смежности отремонтированного графа $A(G')$. Таким образом,

$$\det A(G) = \det A(H) \cdot \det A(G').$$

Как нетрудно видеть, основное препятствие для комбинаторной интерпретации этих алгебраических преобразований – сложный вид матрицы $A(H)^{-1}$.

Несложно заметить, что метод не работает, если $A(h) = 0$ и основным препятствием для комбинаторного истолкования алгебраического преобразования

Рис. 9. Граф $K_{3,3}$ и результат его удаления.

является сложная форма $A(H)^{-1}$.

Пример 3.3. Удаление графа $K_{3,3}$. Пусть чип H – это шестивершинный граф “шестиугольник с тремя главными диагоналями”, из всех вершин которого выходит наружу по одному ребру, веса ребер, лежащих на сторонах шестиугольника, равны b , а веса диагоналей равны c (рис. 9).

Обозначим через $S(b, c)$ весовую матрицу смежности чипа H . Замечательно, что (это результат прямого вычисления)

$$S(b, c)^{-1} = S(b', c'), \quad \text{где } b' = \frac{b}{2b^2 - bc - c^2}, \quad c' = -\frac{b + c}{2b^2 - bc - c^2}.$$

Таким образом, после удаления чипа следует поставить на контакты перемычки, чтобы получился граф того же вида, и назначить веса сторон равными $-\frac{b}{2b^2 - bc - c^2}$ и веса диагоналей равными $\frac{b+c}{2b^2 - bc - c^2}$.

Пример 3.4. Применяя операцию из предыдущего примера, вычислим определитель $\det A(C_6 \times P_{m-1})$ цилиндра, а именно, проверим, что

$$\det A(C_6 \times P_{m-1}) = \begin{cases} (-1)^{m-1} m^2, & \text{если } m \text{ не делится на } 3, \\ 0, & \text{если } m \text{ делится на } 3. \end{cases}$$

Для этого будем последовательно выполнять шаги, каждый из которых – это удаление 6-вершинного графа на краю цилиндра (и последующий ремонт).

Пусть $C = S(1, 0)$ – матрица смежности 6-цикла, а A_k – матрица смежности 6-вершинного графа, который находится на краю цилиндра после выполнения k шагов, в частности, $A_0 = C$. В силу (5)

$$A_{k+1} = C - A_k^{-1}.$$

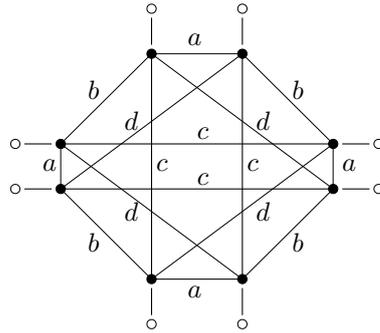


Рис. 10. Граф $K_{4,4}$ неплохо удаляется.

Решая это рекуррентное соотношение, находим, что

$$A_k = U_k(C/2)U_{k-1}(C/2)^{-1},$$

где U_k – полиномы Чебышева второго рода. Таким образом,

$$\det A(C_6 \times P_{m-1}) = \det A_0 \cdot \det A_1 \cdot \dots \cdot \det A_{m-1} = \det U_{m-1}(C/2).$$

Если $\det U_k(C/2) = 0$, тогда k -ый чип является вырожденным и мы не имеем права удалять его. Но так как $A_{k+1} = U_{k+1}(C/2)U_k(C/2)^{-1}$, следующий чип имеет тоже значение в знаменателе, тем самым вырожденность исчезает. Значит, полученная формула является верной, потому что мы можем внести маленькое возмущение в изначальную матрицу C и взять предел у результата.

Определитель матрицы – это произведение собственных чисел, собственные числа матрицы C – это $\cos \frac{2j\pi}{6}$, $j = 1, \dots, 6$. По определению полинома Чебышева $U_{m-1}(\cos \theta) = \frac{\sin m\theta}{\sin \theta}$. Значит,

$$\det A(C_6 \times P_{m-1}) = \prod_{j=1}^6 \frac{\sin \frac{jm\pi}{3}}{\sin \frac{j\pi}{3}}.$$

(Некорректные дроби при $m = 3, 6$ следует понимать по непрерывности.) При m , делящемся на 3, слишком много синусов равны 0, при m , не делящемся на 3, все кроме некорректных дробей сокращается, и мы получаем ответ.

Пример 3.5. Граф $K_{4,4}$ с весами четырех типов (рис. 10) тоже удаляется до-

статочно экономно. Обозначим через $S(a, b, c, d)$ весовую матрицу смежности такого чипа. Прямое вычисление показывает, что

$$S(a, b, c, d)^{-1} = S(a', b', c', d),$$

где

$$a' = \frac{1}{\Delta}(a^3 - 2adb - c^2a + d^2c + b^2c), \quad b' = \frac{1}{\Delta}(d^2b - da^2 + 2cba - c^2d - b^3),$$

$$c' = \frac{1}{\Delta}(d^2a - ca^2 + b^2a + c^3 - 2cdb), \quad d' = -\frac{1}{\Delta}(db^2 - a^2b + 2dca - d^3 - c^2b),$$

$$\Delta = \det S(a, b, c, d) = (a + b + c + d)(a - b + c - d)(b^2 - 2db - 2ca + d^2 + a^2 + c^2).$$

Таким образом, после удаления графа $K_{4,4}$ следует соединить контакты перемычками так, чтобы они образовывали граф $K_{4,4}$ с весами $-a'$, $-b'$, $-c'$, $-d'$.

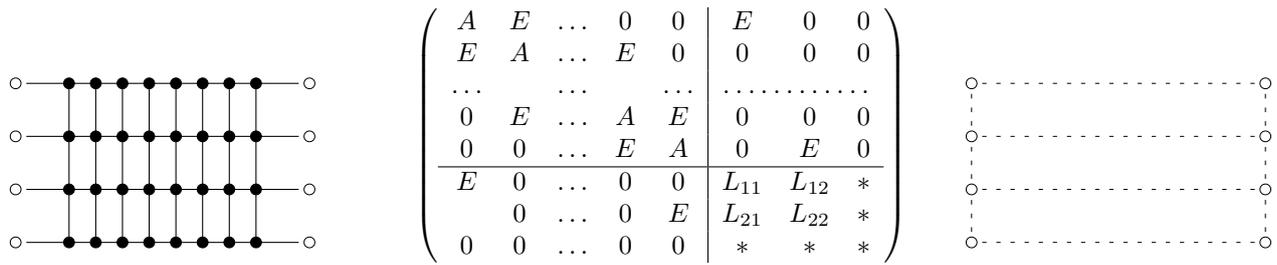
3.2.1 Вырезаем прямоугольник

Определение 8. Прямоугольным чипом $H_{n,m}$ в графе G назовём его индуцированный подграф вида $P_n \times P_m$. На иллюстрациях мы располагаем чип по линиям сетки. При этом мы дополнительно предполагаем, что с оставшейся частью графа чип связывают $2n$ наружных ребер – n горизонтальных отрезков, идущих влево, и n горизонтальных отрезков, идущих вправо от этого прямоугольника (рис. 11).

Пример удаления из графа чипа $H_{2,2}$ реализован в операции Urban Renewal.

Пусть A – матрица смежности пути P_m . Тогда матрица смежности прямоугольного чипа $H_{n,m}$ имеет вид блочной матрицы из блоков размера $n \times n$

$$A(H_{n,m}) = \begin{pmatrix} A & E & 0 & \dots & 0 \\ E & A & E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A & E \\ 0 & 0 & \dots & E & A \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = A(P_m).$$



$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} A & E & \dots & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ E & A & \dots & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & E & \dots & A & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & E & A & 0 & E & 0 \\ \hline E & 0 & \dots & 0 & 0 & L_{11} & L_{12} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & E & L_{21} & L_{22} & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right)$$

Рис. 11. Прямоугольный чип 4×8 , его матрица смежности как блок в матрице $A(G)$ и результат удаления чипа.

Лемма 3.2. Пусть $U_n(y)$ – полином Чебышева второго рода, число $2a \in \mathbb{R}$ не является его корнем и $B(a)$ – матрица $n \times n$ вида

$$B(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1) Имеет место равенство $\det B(a) = U_n(a/2)$. В частности, матрица $B(a)$ обратима.

2) Обозначим $B(a)^{-1} = (x_{ij})$. Тогда $x_{11} = x_{nn} = \frac{U_{n-1}(a/2)}{U_n(a/2)}$, $x_{1n} = x_{n1} = \frac{(-1)^{n+1}}{U_n(a/2)}$.

3) Пусть $B = \frac{1}{2}B(0)$, E – единичная матрица размера $n \times n$ и $\ell = 2kt - 2$, где $m = n + 1$. Тогда

$$U_{\ell-1}(B)(U_{\ell}(B))^{-1} = 2B, \quad -(U_{\ell}(B))^{-1} = E. \quad (6)$$

Доказательство. Утверждение 1) является широко известным фактом. Формулы утверждения 2) мгновенно получаются из формул Крамера для элементов обратной матрицы.

Тождества 3) проверим в собственном базисе матрицы B . Спектр матрицы $B(0)$ состоит из собственных чисел $2 \cos \frac{j\pi}{m}$, $j = 1, \dots, m - 1$. По определению полиномов Чебышева $U_{\ell}(\cos \theta) = \frac{\sin((\ell+1)\theta)}{\sin \theta}$. Тогда соотношения (6) следуют из

тригонометрических тождеств

$$\sin \frac{(2km-2)\pi j}{m} = 2 \cos \frac{\pi j}{m} \cdot \sin \frac{(2km-1)\pi j}{m}, \quad \sin \frac{(2km-1)\pi j}{m} = -\sin \frac{\pi j}{m}. \quad \square$$

В частности, из леммы следует, что

$$\det H_{n,m} = \det U_n \left(\frac{1}{2}A \right). \quad (7)$$

Пример 3.6. Рассмотрим в качестве примера удаление прямоугольного чипа $(2km-2) \times (m-1)$ (рис. 11, для иллюстрации мы ограничились примером размера 8×4 , т. е. $m=5$, $k=2$)

Итак, пусть граф G содержит чип $H = H_{(2km-2),(m-1)}$, присоединенный к $(m-1)$ “контактам”. Обозначим для краткости $\ell = 2km-2$. Матрица $A(G)$ в блочном виде имеет вид показана на рис. 11 Звездочками обозначены блоки матрицы $A(G)$, соответствующие ребрам между вершинами графа $G \setminus H$. Все блоки за исключением блоков правого столбца и нижней строки имеют размеры $(m-1) \times (m-1)$. Матрица смежности $A(H)$ отчеркнута вспомогательными линиями в левом верхнем углу.

В силу замечания (7) и второго соотношения (6) матрица $A(H)$ обратима и

$$\det A(H_{(2km-2),(m-1)}) = (-1)^{m-1}.$$

Пусть $A(H)^{-1} = (X_{ij})$ – блочная матрица размера $\ell \times \ell$ с блоками размера $(m-1) \times (m-1)$. Тогда по лемме 3.2

$$\begin{aligned} X_{11} = X_{\ell\ell} &= U_{\ell-1}(A/2)U_{\ell}(A/2)^{-1} = A, \\ X_{1\ell} = X_{\ell 1} &= -U_{\ell}(A/2)^{-1} = E. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь, следуя общей схеме удаления чипа, нам осталось лишь указать, как поменялся блок $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$, описывающий соединение контактов. В силу (5) его элементы изменились согласно формулам

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} L_{11} - X_{11} & L_{12} - X_{1\ell} \\ L_{21} - X_{\ell 1} & L_{22} - X_{\ell\ell} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Таким образом, в силу (8) ремонт после удаления чипа удивительно прост: следует провести совсем небольшое количество перемычек между контактами (рис. 11), веса новых перемычек равны -1 (в случае, когда перемычка дублирует уже имеющееся ребро, ее вес просто добавляется к весу ребра).

Теперь готовы переходить к примерам.

Пример 3.7. В примерах 3.2, 3.4 мы уже вычисляли определители цилиндров. Вычислим теперь определитель матрицы смежности произвольного цилиндра $C_n \times P_{m-1}$, а именно, проверим, что

$$\det A(C_n \times P_{m-1}) = \begin{cases} m, & \text{если } n \text{ нечетно и } \text{НОД}(m, n) = 1, \\ (-1)^{m-1} m^2, & \text{если } n \text{ четно и } \text{НОД}(m, n/2) = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Этот результат известен; см. работу [3], где это вычисление проведено чисто алгебраически.

Вырежем из цилиндра прямоугольный чип размером $(n-1) \times (m-1)$. После вырезания останется один столбец из вершин, правда, появятся новые рёбра. Матрица смежности цилиндра $A(C_n \times P_{m-1})$ в блочном виде записывается как

$$A(C_n \times P_{m-1}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} A & E & 0 & \dots & 0 & E \\ E & A & E & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A & E & 0 \\ 0 & 0 & \dots & E & A & E \\ \hline E & 0 & \dots & 0 & E & L \end{array} \right).$$

В левом верхнем углу отчеркнута матрица смежности вырезаемого чипа $H_{n-1, m-1}$, а матрица L в правом нижнем углу – это матрица смежности остающегося столбца, поэтому на самом деле $L = A = A(P_{m-1})$. К сожалению, $\det H_{n-1, m-1} = 0$, когда $\text{GCD}(m, n) = 1$ (см. [3]), и чип просто так удалять нельзя. Чтобы преодолеть данную проблему, мы внесём возмущение в матрицу A , добавляя маленькое значение ε ко всем диагональным элементам.

Положим для краткости $f_n(x) = U_n(x/2)$, $g_n(x) = T_n(x/2)$, где T_n, U_n –

многочлены Чебышёва первого и второго рода. Обозначим $A(H_{n-1,m-1})^{-1} = (X_{ij})$, тогда аналогично формулам (8) (в нашем случае $\ell = n - 1$ и работает только второе утверждение леммы 3.2) имеем

$$X_{1,1} = X_{n-1,n-1} = f_{n-2}(A) \cdot f_{n-1}^{-1}(A), \quad X_{1,n-1} = X_{n-1,1} = (-1)^n f_{n-1}^{-1}(A).$$

После удаления чипа и ремонта получаем

$$A(G') = \tilde{L} = A - X_{1,1} - X_{1,n-1} - X_{n-1,1} - X_{1,n-1}.$$

Осталось досчитать определитель до конца:

$$\begin{aligned} \det A(C_n \times P_{m-1}) &= \det H_{n-1,m-1} \cdot \det(A - X_{1,1} - X_{1,n-1} - X_{n-1,1} - X_{1,n-1}) \\ &= \det(f_{n-1}(A)) \cdot \det(A - 2 \cdot f_{n-2}(A) \cdot f_{n-1}^{-1}(A) - 2 \cdot (-1)^n \cdot f_{n-1}^{-1}(A)) \\ &= \det(A \cdot f_{n-1}(A) - 2 \cdot f_{n-2}(A) - 2 \cdot (-1)^n \cdot E) \\ &= \det(f_n(A) - f_{n-2}(A) - 2 \cdot (-1)^n \cdot E) \\ &= \det(2g_n(A) - 2 \cdot (-1)^n \cdot E) = 2^{m-1} \det(g_{n-1}(A) - (-1)^n \cdot E). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь мы воспользовались рекуррентным соотношением для многочленов Чебышева и формулой $U_n - U_{n-2} = 2T_n$.

Несложно заметить, что проблема с вырожденностью чипа, которая связана со значением $f_{n-1}^{-1}(A)$, исчезает внутри последней формулы. Мы можем взять предел $\varepsilon \rightarrow 0$ и воспользоваться тем же самым рассуждением, что и для $A = A(P_{m-1})$.

Собственные числа матрицы $A = A(P_{m-1})$ – это набор $\{2 \cos \frac{j\pi}{m}, j = 1, \dots, m-1\}$. Так как $g_n(2 \cos(\theta)) = \cos(n \cdot \theta)$, а определитель – это произведение собственных чисел, получаем, что

$$\det(g_{n-1}(A) - (-1)^n \cdot E) = \prod_{i=1}^{m-1} \left(\cos\left(\frac{ni\pi}{m}\right) - (-1)^n \right).$$

Если n чётно, $n' = \frac{n}{2}$ и $\text{НОД}(\frac{n}{2}, m) = 1$, получаем

$$\det A(C_n \times P_{m-1}) = 2^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \left(\cos\left(\frac{ni\pi}{m}\right) - (-1)^n \right) = (-1)^{m-1} 4^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \sin^2\left(\frac{n'i\pi}{m}\right) =$$

$$= (-1)^{m-1} m^2.$$

Если n нечётно и $\text{НОД}(n, m) = 1$, то

$$\det A(C_n \times P_{m-1}) = 2^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \left(\cos\left(\frac{ni\pi}{m}\right) + 1 \right) = 4^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} \sin^2\left(\frac{n(2m-i)\pi}{2m}\right) =$$

$$= 4^{m-1} \prod_{i=1}^{2m-1} \sin\left(\frac{ni\pi}{2m}\right) = m.$$

В остальных случаях произведение равно нулю.

Пример 3.8. Вычислим определитель матрицы смежности тора $C_n \times C_m$, а именно, проверим, что

$$\det A(C_n \times C_m) = \begin{cases} 4^{\text{НОД}(m,n)}, & \text{если } m \text{ и } n \text{ нечетны,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Этот результат также получен в [3].

По аналогии с предыдущим примером вырежем из тора цилиндрический чип $P_{n-1} \times C_m$. Проблема с вырожденностью чипа решается аналогично предыдущему примеру, и мы получаем формулу, похожую на (10),

$$\det A(C_n \times C_m) = 2^m \det(g_{n-1}(A) - (-1)^n \cdot E),$$

где A – это матрица смежности цикла длины m . Для матрицы A также известны собственные числа – это набор $\{2 \cos \frac{2j\pi}{m}, j = 1, \dots, m\}$. Следовательно,

$$\det A(C_n \times C_m) = 2^m \prod_{i=1}^m \left(\cos\left(\frac{2ni\pi}{m}\right) - (-1)^n \right).$$

Если n или m чётно, произведение равно нулю. В противном случае пусть $d = \text{НОД}(n, m)$, $n' = \frac{n}{d}$ и $m' = \frac{m}{d}$. Тогда последнее произведение равно

$$2^m \prod_{i=1}^m \left(\cos\left(\frac{2ni\pi}{m}\right) + 1 \right) = 4^m \prod_{i=1}^m \cos^2\left(\frac{ni\pi}{m}\right) = 4^m \left(\prod_{i=1}^{m'd} \cos\left(\frac{n'i\pi}{m'}\right) \right)^2 =$$

$$= 4^m \left(\frac{1}{4^{m'-1}} \right)^d = 4^d.$$

3.2.2 Подсчет паросочетаний при вырезании четырехконтактного чипа Посмотрим, что происходит с операцией вырезания чипа, если попытаться приспособить ее к подсчету паросочетаний.

Пример 3.9. Вырезание чипа 2×3 . Рассмотрим на клетчатой плоскости граф G . Зафиксируем пфаффову ориентацию графа G . Будем считать, что граф G содержит чип $H_{2,3}$, изображенный на рис. 12. Кроме того, дополнительно предположим, что в графе G нет ребер, соединяющих контакты.

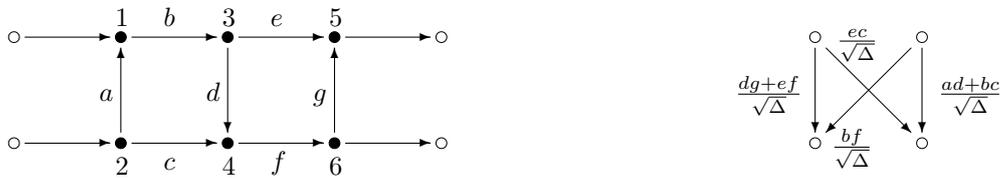


Рис. 12. Чип 2×3 и ремонт после его удаления.

Рассмотрим матрицу $\tilde{A}(G)$ – кососимметрическую матрицу смежности графа G , соответствующую этой ориентации. Тогда

$$\Delta = \det \tilde{A}(H_{2,3})$$

– это квадрат числа взвешенных паросочетаний в чипе $H_{2,3}$. Таким образом, $\Delta = (agd + gcb + afe)^2$. Выполним операцию удаления чипа в применении к вычислению этого определителя; благодаря кососимметричности отличия от общей схемы будут совсем незначительные. Прямой подсчет показывает, что после удаления чипа, следует добавить перемычки, показанные на рис. 12 справа. Обозначая полученный после ремонта граф через G' , получаем соотношение

$$\det \tilde{A}(G) = \det \tilde{A}(H_{2,3}) \cdot \det \tilde{A}(G').$$

Или, извлекая корень,

$$\text{Pf } \tilde{A}(G) = \text{Pf } \tilde{A}(H_{2,3}) \cdot \text{Pf } \tilde{A}(G'). \quad (11)$$

В этих равенствах следует иметь в виду, что теперь величина $\det A(G')$ не равна квадрату числа взвешенных паросочетаний графа G' , поскольку новые (диагональные) ребра нарушают пфаффовость ориентации, из-за чего в графе G' не

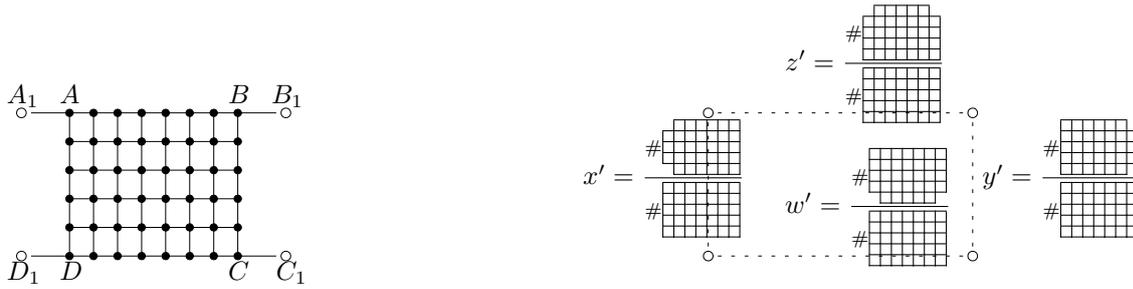


Рис. 13. Удаление четырехконтактного чипа $2n \times 2m$ при подсчете паросочетаний.

все паросочетания имеют одинаковый знак.

Неприятностей такого рода не произойдет, если рассматривать чипы, имеющие лишь 4 контакта, причем такие, что при шахматной раскраске вершин одна пара контактов, расположенных по диагонали, окрашена в белый цвет, а другая – в черный.

Кроме использования обычного обозначения $M(G)$ будем обозначать количество паросочетаний графа символом $\#$, за которым следует схематическое изображение этого графа. Следующая лемма лежит в основе метода графической конденсации Куо.

Лемма 3.3 [9, теорема 2.1]). *Количество паросочетаний чипа $2n \times 2m$ и фигур, получающихся удалением из него двух или четырех угловых вершин, связаны соотношением*

$$\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Теорема 3.2. *Пусть прямоугольный чип $2n \times 2m$ присоединен к графу с помощью лишь четырех контактов, которые соединены с угловыми вершинами чипа. Обозначим через G' граф, получающийся из G в результате удаления этого чипа и соединения контактов по циклу (см. рис. 13), с весами ребер*

$$x' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad y' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad w' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad z' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}. \quad (12)$$

Тогда

$$M(G) = \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot M(G'). \quad (13)$$

Доказательство. Обозначим чип через H . Построим биекцию в стиле доказа-

тельства леммы 3.1 между паросочетаниями графов G и G' . Обозначим угловые вершины чипа через A, B, C, D , а соответствующие им контакты – через A_1, B_1, C_1, D_1 (рис. 13). Поскольку размеры чипа четные, при раскраске вершин чипа в шахматном порядке вершины A и C окажутся одного цвета (скажем, белые), вершины B и D – другого (черные), всего же в чипе будет поровну черных и белых вершин. Отсюда следует, что любое паросочетание графа G содержит четное число ребер из набора AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Более того, если паросочетание содержит два ребра из указанных, то это могут быть лишь пары ребер, содержащие соседние по стороне вершины чипа.

Разберем эти случаи.

1) Рассмотрим все паросочетания графа G , которые содержат ребра AA_1 и DD_1 и не содержат ребер BB_1, CC_1 . Зафиксируем какое-либо расположение ребер паросочетания вне чипа, т.е. фактически зафиксируем паросочетание графа $G' \setminus \{A_1, D_1\}$ – обозначим его через μ' , а его вес – через $w(\mu')$. Конфигурацию, состоящую из ребер AA_1, DD_1 и всех ребер множества μ' , можно достроить до полного паросочетания графа G , дополнив ее произвольным паросочетанием графа $H \setminus \{A, D\}$. Множество паросочетаний графа G , полученных таким способом, обозначим μ ; взвешенная сумма таких паросочетаний равна $\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot w(\mu')$.

Сопоставим множеству паросочетаний μ в графе G одно паросочетание в графе G' , а именно, паросочетание, состоящее из ребер множества μ' (с прежними весами) и ребра A_1D_1 с весом x' (см. формулы (12)). Очевидно, вес этого паросочетания равен $x'w(\mu')$, и после домножения на множитель из правой части формулы (13) мы получаем равенство весов.

Аналогично разбираются случаи, когда паросочетание графа G содержит другие возможные пары ребер.

2) Рассмотрим все паросочетания графа G , которые не содержат ни одного из ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Зафиксируем какое-либо расположение ребер паросочетания вне чипа, т.е. на этот раз зафиксируем паросочетание графа G' – обозначим его через μ' , а его вес – через $w(\mu')$. Конфигурацию, состоящую из всех ребер множества μ' , можно достроить до полного паросочетания графа G , дополнив ее произвольным паросочетанием графа H . Множество паросочетаний графа G , полученных таким способом, обозначим μ ; взвешенная

сумма таких паросочетаний равна $\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot w(\mu')$. Сопоставим множеству паросочетаний μ в графе G одно паросочетание в графе G' , состоящее из ребер множества μ' (с прежними весами). Очевидно, сопоставленные объекты дают одинаковый вклад в правую и левую части формулы (13).

3) Наконец, рассмотрим паросочетания графа G , которые содержат все четыре ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Опять фиксируем расположение ребер паросочетания вне чипа, т.е. паросочетание графа $G' \setminus \{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ – обозначим его через μ' , а его вес – через $w(\mu')$. Конфигурацию, состоящую из ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и всех ребер множества μ' , можно достроить до полного паросочетания графа G , дополнив ее произвольным паросочетанием графа $H \setminus \{A, B, C, D\}$. Множество паросочетаний графа G , полученных таким способом, обозначим μ ; взвешенная сумма таких паросочетаний равна $\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot w(\mu')$. Сопоставим множеству паросочетаний μ в графе G пару паросочетаний в графе G' , а именно, паросочетание, состоящее из ребер множества μ' (с прежними весами) и ребер A_1D_1, B_1C_1 (с весами x', y'), а также паросочетание, состоящее из ребер множества μ' и ребер A_1B_1, C_1D_1 (с весами z', w'). Сумма весов этих паросочетаний равна $(x'y' + w'z')w(\mu')$.

В этом случае сопоставленные объекты дают одинаковый вклад в правую и левую части формулы (13) в силу утверждения леммы 3.3. \square

Замечание 3.2. Утверждение, аналогичное лемме 3.3, доказано в [9] для произвольных плоских двудольных графов. Это позволяет обобщить теорему 3.2 на четырехконтактные чипы любой формы, у которых “диагонально противоположные” контакты имеют одинаковый цвет в шахматной раскраске.

Если же удалять чип, у которого противоположные контакты окрашены одинаково, скажем A_1 и B_1 белые, C_1 и D_1 черные, то имеет место лемма, аналогичная лемме 3.3 (ограничимся формулировкой для прямоугольного чипа).

Лемма 3.4 [9, теорема 2.3]). *Количество паросочетаний чипа $2n \times (2m + 1)$ и фигур, получающихся удалением из него двух или четырех угловых вершин, связаны соотношением*

$$\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$



Рис. 14. Удаление четырехконтактного чипа $2n \times (2m + 1)$ при подсчете паросочетаний.

В этом случае попытка доказать аналог теоремы 3.2 приведет нас к явлению, которое мы рассмотрели в примере 3.9. Поправив рассуждения из пункта 3) доказательства теоремы, получим следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть H – прямоугольный чип $2n \times (2m + 1)$, присоединенный к графу с помощью лишь четырех контактов, которые соединены с угловыми вершинами чипа. Обозначим через G' граф, получающийся из G в результате удаления этого чипа и соединения контактов, как на рис. 14 справа, с весами ребер

$$x' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad y' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad w' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}, \quad z' = \frac{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}{\# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}}.$$

Кроме того, обозначим через G'' граф, получающийся из G в результате удаления чипа H и вершин A_1, B_1, C_1, D_1 . Тогда

$$M(G) = \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot M(G') - 2 \frac{M(G'')}{M(H)} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdot \# \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

3.3 Применение к пфаффианам и паросочетаниям

В этом параграфе мы явно опишем веса заплаток, которые возникают при вырезании чипов, в задачах о паросочетаниях (теорема 3.5). Для этого нам потребуется перейти на уровень технического определения пфаффиана. Приведем сводку известных фактов и определений, подробное изложение можно прочесть в статье Фулмека [7].

1) Пусть дан треугольный набор чисел $W = (w_{ij})_{1 \leq i < j \leq 2n}$.

Пусть $\mu = \{(i_1, i_2), \dots, (i_{2n-1}, i_{2n})\}$ – произвольное разбиение множества

$\{1, 2, \dots, 2n\}$ на пары. Тогда по определению знак $\text{sgn}(\mu)$ — это знак перестановки $(i_1 i_2 i_3 i_4 \dots i_{2n-1} i_{2n})$, вес $w(\mu) = w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \dots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}$, а пфаффиан $\text{Pf } W = \sum \text{sgn}(\mu) w(\mu)$, где суммирование идет по всем разбиениям μ множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ на пары.

2) В предыдущем определении вместо множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$, очевидно, можно взять любое другое упорядоченное множество с четным числом элементов. Пусть $\mu = \{(i_1, i_2), \dots, (i_{2n-1}, i_{2n})\}$ — произвольное разбиение множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ на пары, а разбиение μ' получается из μ удалением одной пары (i_k, i_{k+1}) . Тогда $\text{sgn } \mu = (-1)^{i_k + i_{k+1} + 1} \text{sgn } \mu'$.

3) Пусть теперь G — произвольный граф с четным числом вершин, вершины пронумерованы числами от 1 до $2n$. Пусть для каждого ребра (v_i, v_j) задан вес w'_{ij} . Можно считать, что G — это полный граф на $2n$ вершинах, а “ненужные” ребра имеют вес 0. Зададим на ребрах графа G произвольную ориентацию и построим по ней кососимметрическую матрицу смежности $\tilde{A}(G) = (w_{ij})$. Таким образом $w_{ij} = \pm w'_{ij}$ в зависимости от ориентации ребра $v_i v_j$. В качестве набора W возьмем верхнетреугольную часть матрицы $\tilde{A}(G)$. Положим по определению $\text{Pf } \tilde{A}(G) = \text{Pf } W$.

4) Имеет место соотношение (теорема Кэли)

$$\det \tilde{A}(G) = (\text{Pf } \tilde{A}(G))^2. \quad (14)$$

Доказательство состоит в построении биекции между слагаемыми вида $\text{sgn}(\sigma) \cdot \alpha_{1, \sigma(1)} \alpha_{2, \sigma(2)} \dots \alpha_{2n, \sigma(2n)}$, составляющими определитель, и парами паросочетаний $\text{sgn}(\mu) w(\mu) \text{sgn}(\nu) w(\nu)$, возникающими при перемножении сумм, составляющих пфаффианы в правой части. При построении этой биекции мы всегда можем считать, что множитель $\alpha_{i, \sigma(i)}$ относится к первому из пфаффианов.

Всюду ниже в этом параграфе G — произвольный граф с четным числом вершин. Пусть в графе G задана ориентация и пусть $\tilde{A}(G)$ — кососимметрическая матрица смежности графа G , соответствующая этой ориентации. Для удобства будем считать, что вершины графа G пронумерованы, матричные элементы матрицы $\tilde{A}(G)$ будем обозначать α_{kl} в соответствии с этой нумерацией. Обозначим через G_{ij} ориентированный граф, полученный из G удалением вершин v_i и v_j , а через \tilde{G}_{ij} — граф, который получается из графа G , удалением

исходящих ребер i -й вершины и входящих ребер j -й вершины. Пусть \tilde{A}_{ij} — матрица, получающаяся из матрицы $\tilde{A}(G)$ вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Лемма 3.5. $|\det \tilde{A}_{ij}| = |\text{Pf } \tilde{A}(G) \text{Pf } \tilde{A}(G_{ij})|$.

Доказательство. Обозначим через \tilde{A}_{ijji} матрицу, получающуюся из матрицы $\tilde{A}(G)$ вычеркиванием i -го и j -го столбца, а также i -й и j -й строки. Воспользуемся тождеством конденсации Доджсона,

$$\det \tilde{A}(G) \det \tilde{A}_{ijji} = \det \tilde{A}_{ij} \det \tilde{A}_{ji} - \det \tilde{A}_{ii} \det \tilde{A}_{jj}.$$

В этом равенстве $\det \tilde{A}_{ij} = \det \tilde{A}_{ji}$ в силу кососимметричности матрицы $\tilde{A}(G)$; $\det \tilde{A}_{ii} = \det \tilde{A}_{jj} = 0$, поскольку это кососимметрические матрицы нечетного порядка. Выражая определители в левой части через пфаффианы по формуле (14), получаем требуемое. \square

В следующей теореме мы уберем модули в утверждении леммы 3.5.

Теорема 3.4. При $i < j$ $\det \tilde{A}_{ij} = -\text{Pf } \tilde{A}(G) \text{Pf } \tilde{A}(G_{ij})$.

Доказательство. Запишем определитель $\det \tilde{A}_{ij}$ в виде

$$(-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det \tilde{A}_{ij} = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \alpha_{1,\sigma(1)} \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{2n,\sigma(2n)},$$

где суммирование ведется по всем элементам симметрической группы S_{2n} , для которых $\sigma(i) = j$ (и таким образом, каждое слагаемое в правой части содержит множитель α_{ij}). Пользуясь биекцией из доказательства теоремы Кэли, мы можем переписать эту сумму в виде

$$\sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \alpha_{1,\sigma(1)} \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{2n,\sigma(2n)} = \sum_{\mu, \nu} (\text{sgn}(\mu) \cdot w(\mu)) \cdot (\text{sgn}(\nu) \cdot w(\nu)),$$

причем можно считать, что в каждом слагаемом правой части множитель α_{ij} , соответствующий ребру $v_i v_j$, содержится в паросочетании μ . Пусть μ' — паросочетание графа G_{ij} , получающееся удалением ребра $v_i v_j$ из μ . Очевидно,

любое паросочетание графа G_{ij} получается этим способом из подходящего (и однозначно определенного) паросочетания μ и $\text{sgn } \mu = (-1)^{i+j+1} \text{sgn } \mu'$. Тогда

$$\sum_{\mu, \nu} (\text{sgn } (\mu) \cdot w(\mu)) \cdot (\text{sgn } (\nu) \cdot w(\nu)) = \sum_{\mu', \nu} (-1)^{j+i+1} \alpha_{ij} (\text{sgn } (\mu') w(\mu')) \cdot (\text{sgn } (\nu) \cdot w(\nu)).$$

Таким образом,

$$(-1)^{i+j} \alpha_{ij} \det \tilde{A}_{ij} = (-1)^{j+i+1} \alpha_{ij} \sum_{\mu', \nu} (\text{sgn } (\mu') w(\mu')) \cdot (\text{sgn } (\nu) \cdot w(\nu)).$$

Убирая $(-1)^{i+j} \alpha_{ij}$ из обеих частей равенства, получаем требуемое. \square

Теорема 3.5. Пусть $B = (b_{ij}) = \tilde{A}(G)^{-1}$. Тогда матрица B кососимметрическая и при $i < j$

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\text{Pf } \tilde{A}(G_{ij})}{\text{Pf } \tilde{A}(G)}.$$

Доказательство. В силу кососимметричности $\det \tilde{A}_{ij} = -\det \tilde{A}_{ji}$. Тогда по формулам Крамера и по теореме 3.4

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det \tilde{A}_{ji}}{\det \tilde{A}(G)} = (-1)^{i+j} \frac{\text{Pf } \tilde{A}(G_{ij}) \text{Pf } \tilde{A}(G)}{(\text{Pf } \tilde{A}(G))^2} = (-1)^{i+j} \frac{\text{Pf } \tilde{A}(G_{ij})}{\text{Pf } \tilde{A}(G)}.$$

\square

Замечание 3.3. Для плоских двудольных графов известно, что если v_i и v_j — соседние вершины, то элемент b_{ij} матрицы, обратной к матрице Кастелейна, по модулю равен вероятности того, что случайное замощение содержит доминирующую $v_i v_j$ (см. [8]). Это утверждение является частным случаем доказанной теоремы.

Теперь мы можем обобщить теоремы 3.3, 3.3 на случай вырезания произвольных чипов. Для простоты будем считать, что каждая наружная вершина чипа присоединена лишь к одному контакту. Кроме того, будем считать, что нумерация вершин графа G такова, что все вершины чипа имеют меньшие номера, чем остальные вершины графа.

Теорема 3.6. Пусть имеется чип H с наружными вершинами $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$, которые крепятся соответственно к контактам $v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}$. Тогда при $i_r < i_s$ вес заплатки между вершинами v_{j_r} и v_{j_s} задается формулой

$$w(v_{j_r}v_{j_s}) = (-1)^{i_r+i_s} w_{i_r j_r} w_{i_s j_s} \frac{\text{Pf } \tilde{A}(H \setminus \{A_{i_r}, A_{i_s}\})}{\text{Pf } \tilde{A}(H)}.$$

$$\det(\tilde{A}(G)) = \det(\tilde{A}(H)) \cdot \det(\tilde{A}(G')).$$

Доказательство. Утверждение сразу следует из общей схемы вырезания чипа (5). Запишем матрицу $\tilde{A}(G)$ в блочной форме (4) и пусть $(b_{ij}) = \tilde{A}(H)^{-1}$. Так как $i_r < j_r$ элемент $\alpha_{j_r i_r}$, находящийся в блоке K^T , равен $-w_{i_r j_r}$. А поправка, рассчитанная по формуле (5), равна $w_{i_r j_r} w_{i_s j_s} b_{i_r i_s}$. Вычисляя $b_{i_r i_s}$ по теореме 3.5, получаем требуемое. \square

Следствие 3.1.

$$|\text{Pf}(\tilde{A}(G))| = |\text{Pf}(\tilde{A}(H)) \cdot \text{Pf}(\tilde{A}(G'))|.$$

Доказательство. Пользуясь формулой Кэли (14) и предыдущей теоремой, получаем: $(\text{Pf}(G))^2 = \det(\tilde{A}(G)) = \det(\tilde{A}(H)) \cdot \det(\tilde{A}(G')) = (\text{Pf}(H))^2 \cdot (\text{Pf}(G'))^2$. Если взять корень из этого выражения, то получим требуемое. \square

Следствие 3.2. Пусть существует пфаффовая ориентация на G , тогда

$$M(G) = M(H) |\text{Pf}(\tilde{A}(G'))|.$$

Это равенство обобщает результат Чуку [5] об общей форме графической конденсации для пфаффианов.

Приведем еще один пример применения техники вырезания чипов. Следующее утверждение известно, оно восходит к результатам Чуку [4].

Теорема 3.7. Если $N + 1$ делится на $n + 1$ и $M + 1$ делится на $m + 1$, то $\#(P_M \times P_N)$ делится на $\#(P_m \times P_n)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $M = m$. Пусть $N + 1 = (k + 1)(n + 1)$. Вырежем из прямоугольника $m \times (kn + k + n)$ сразу $k + 1$ чипов

$m \times n$ (см. рис. 15 при $k = 2$). В результате останется граф G' , состоящий из k экземпляров графа P_m и перемычек внутри каждого экземпляра, а также между соседними экземплярами.

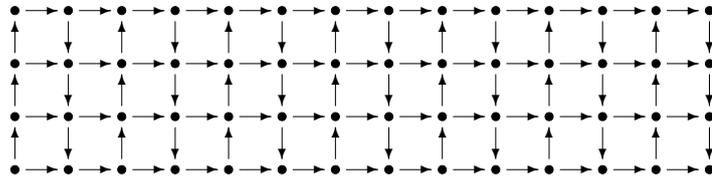


Рис. 15. Вырежем много чипов.

Будем рассматривать кососимметрические матрицы смежности, учитывающие пфаффову ориентацию: $A = A(P_m)$, $A(H_{m,n})$, $A(P_m \times P_N)$ и $A(G')$; положим $X = A(H_{m,n})^{-1}$. Вычисляя $\det A(H_{m,n})$ в блочном виде, получаем, как в примере 3.7, что $\det A(H_{m,n}) = \det F(A)$, где F – некоторый полином с целыми коэффициентами (на самом деле это с точностью до знака опять $U_n(x/2)$). Следовательно, матрица $F(A)$ целочисленная. Пусть A_k – блочно-диагональная матрица, содержащая по диагонали k блоков $F(A)$. Очевидно, $\det A_k = \det A(H_{m,n})^k$.

Матрица $A(G')$ получается с помощью “ремонта” из блочно-диагональной матрицы, содержащей по диагонали k блоков $\pm A(P_m)$. При ремонте добавляются поправочные блоки, затрагивающие главную диагональ и два соседних диагональных ряда. Как и в (9), эти поправки задаются матрицами $\pm X_{1,1}$, $\pm X_{1,n}$, $\pm X_{n,1}$, $\pm X_{n,n}$. Из формул Крамера для вычисления элементов обратной матрицы ясно, что матрицы $F(A)X_{1,1}$, $F(A)X_{1,n}$, $F(A)X_{n,1}$, $F(A)X_{n,n}$ целочисленные. Значит, и матрица $A_k A(G')$ целочисленная.

Таким образом, в результате вырезания получаем равенство

$$\det A(P_m \times P_N) = (\det A(H_{m,n}))^{k+1} \det A(G') = \det A(H_{m,n}) \det(A_k A(G')),$$

которое показывает, что $\det A(P_m \times P_N)$ делится на $\det A(H_{m,n})$. Поскольку матрицы кососимметричны, то же верно и для пфаффианов.

Воспользуемся дважды полученным результатом сначала для N , потом для M .

$$\#(P_N \times P_M) \quad \vdots \quad \#(P_n \times P_M) \quad \vdots \quad \#(P_n \times P_m).$$

3.4 Применение техники вырезания чипа к алгоритмам

Пусть нам дана матрица смежности графа, наша задача — посчитать его определитель. В этом разделе обсуждается асимптотика алгоритмов для подсчёта определителей матриц смежности некоторых типов графов, полученных с помощью техник из предыдущих разделов.

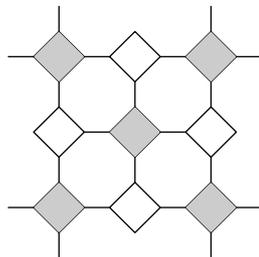
Сначала попробуем применить частный случай техники вырезания чипа — Urban renewal. Воспользуемся им для подсчёта взвешенных матриц смежности ацтекских диамантов и крепостей Янга, описанных во втором параграфе.

Теорема 3.8. *Существует алгоритм подсчёта определителя взвешенной матрицы смежности ацтекского диаманта n -ого порядка, алгоритмическая сложность которого равна $O(n^3)$.*

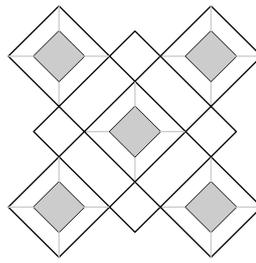
Доказательство. Для получения алгоритма воспользуемся примером 3.1. Заметим, что если будем применять операцию Urban renewal описанным способом, то за $O(n^2)$ применений на чёрных ромбах диамант станет на один порядок меньше. Тем самым получаем алгоритм, сложность которого равна $O(n^2 + (n - 1)^2 + \dots + 1) = O(n^3)$. \square

Теорема 3.9. *Существует алгоритм подсчёта определителя взвешенной матрицы смежности крепости Янга n -ого порядка, алгоритмическая сложность которого равна $O(n^3)$.*

Доказательство. Покрасим ромбики в шахматную раскраску.



Применим операцию “Urban renewal” на клетках, которые покрашены в чёрный цвет, за $O(n^2)$ операций. Получим ацтекский диамант n -ого порядка. Для него известна асимптотика времени работы из предыдущей теоремы.



□

Теорема 3.10. *Существует алгоритм подсчёта определителя взвешенной матрицы смежности графа $P_n \times P_m$, алгоритмическая сложность которого равна $O((n + m)^3)$.*

Доказательство. Основной идеей доказательства является встраивание прямоугольника в диамант, и назначении весов на рёбрах, не лежащих внутри прямоугольника, чтобы определитель получившегося диаманта был равен определителю прямоугольника с точностью до знака.

Научимся встраивать прямоугольник в диамант. Веса между клетками, попавшими в прямоугольник, совпадают с весами прямоугольника. Все остальные клетки разбиваются на пары. В каждой паре проведём рёбра с весами 1. Оставшиеся рёбра будут иметь вес 0. Несложно убедиться, что определитель прямоугольника будет равен определителю получившегося диаманта, умноженного на $(-1)^{\frac{S(\text{диамант}) - n \cdot m}{2}}$. □

Все предыдущие теоремы относились к какой-то фиксированной решётке. Рассмотрим теперь технику вырезания чипа на произвольном графе.

Лемма 3.6. *Вырезание чипа, содержащего n вершин и m контактных мест, можно выполнить за $O(n^3 + nm(n + m))$ операций.*

Доказательство. 1. Чтобы вырезать чип первым делом нужно получить матрицу, равную обратной матрице матрицы смежности чипа. $O(n^3)$

2. Нужно умножить подматрицу нашей матрицы размера $n \times (n + m)$, соответствующей рёбрам выходящим из чипа, на полученную матрицу. $O(n^2(n + m))$ Тем самым подматрица, соответствующая вершинам чипа, является единичной.

3. Осталось избавиться от элементов, соответствующих рёбрам, входящим в чип. Для этого нужно умножить подматрицу из предыдущего пункта на подматрицу размером $m \times n$, соответствующую рёбрам входящим в чип, и вычесть эту матрицу из соответствующих строк. $O(nm(n + m))$.

Итого: получаем алгоритм, сложность которого равна $O(n^3 + nm(n + m))$. \square

Введём ещё одну похожую лемму.

Лемма 3.7. *Вырезание чипа, содержащего n вершин и m контактов, можно выполнить за $O(n^3 + m(n + m))$ операций.*

Доказательство. Единственное отличие от предыдущей теоремы состоит в том, что нам дано фиксированное число контактов. Этим можно воспользоваться.

Рассмотрим доказательство предыдущей теоремы. Второй пункт можно оценить теперь чуть иначе, а именно $O(n(n^2 + m))$. Аналогично, третий пункт оценивается как $O(m^2)$.

Итого: получаем алгоритм, сложность которого равна $O(n^3 + m(n + m))$. \square

Прежде чем перейти к применению общей техники удаления чипа, нужно ввести новое определение.

Определение 9. Граф, вершины которого можно разбить на k групп (нумерация циклическая), таких что рёбра из вершин группы с номером i могут идти только в вершины группы с номером $i - 1$ и $i + 1$, будем называть k -слойным, группы вершин будем называть слоями, а количество вершин в i -ой группе обозначим через n_i .

Теорема 3.11. *Пусть нам дан k -слойный граф на n вершинах. Тогда существует алгоритм подсчёта определителя взвешенной матрицы смежности графа, алгоритмическая сложность которого равна $O(\sum_{i=1}^k n_i^3 + n_i(n_{i-1} + n_{i+1}))(n_{i-1} + n_{i+1})$.*

Доказательство. Будем считать каждый слой за чип, возможно, не обязательно связный. Заметим, что от связности операция вырезания чипа не меняется.

Докажем утверждение с помощью индукции по количеству слоёв.

База. $k = 1$. Утверждение верно.

Переход. $k \rightarrow k + 1$.

Вырежем чип, соответствующий $k + 1$ -ому слою. У чипа n_{k+1} вершин и $n_k + n_1$ контактных мест. Тогда по лемме 3.6 количество итераций для вырезания чипа равно $O(n_{k+1}^3 + n_{k+1}(n_k + n_1)(n_{k+1} + n_k + n_1))$. После удаления данного чипа останется k -слойный граф для которого выполнено условие теоремы. Прибавляя величину вырезания $k + 1$ -слоя, получим выражение для $k + 1$ -слойного графа. \square

И как следствие предыдущей теоремы, получаем алгоритмы для подсчёта взвешенных матриц смежности прямоугольника, цилиндра и тора.

Следствие 3.3. *Существуют алгоритмы для подсчёта определителя взвешенной матрицы смежности графов $P_n \times P_m$, $C_n \times P_m$ и $C_n \times C_m$, алгоритмическая сложность которых равна $O(n^3 m)$.*

Доказательство. Все эти три графа совершенно естественным образом разбиваются на m слоёв, каждый из которых содержит ровно n вершин. Тем самым к ним можно применить предыдущую теорему, где каждое n_i равно n .

После применения теоремы получаем алгоритмы, сложность которых равна $O(\sum_{i=1}^m n^3 + n^2(n + n)) = O(mn^3)$. \square

Но нужно понимать, что полученные алгоритмы перестают работать, если определитель какой-либо матрицы вдруг оказывается равным нулю. Для того, чтобы они работали и в этом случае придётся действовать одним из двух способов: либо добавлять какое-то несущественное значение к некоторым весам, либо заменять некоторые элементы на переменную.

Вывод

В этой главе была использована техника “Urban renewal” для подсчёта определителей. На её основе была разработана техника удаления чипа, которая позволила посчитать определители матриц смежности цилиндра и тора. Также она позволила изобрести алгоритмы для слоистых графов, которые имеют меньшую алгоритмическую сложность чем алгоритм Гаусса.

Заключение

В работе был обобщен комбинаторный метод подсчёта определителя матрицы смежности прямоугольника на произвольные односвязные клетчатые фигуры на плоскости. Этот результат частично перенесён на фигуры, которые не являются клетчатыми, например крепости Янга и шестигональная решётка.

Помимо этого была изобретёна новая техника подсчёта определителей матриц смежности графов, которая была названа удалением чипа. Было проверено её качество для подсчёта определителей, а также для подсчёта количества паросочетаний в графах. В дополнение разработанная техника оказалась применимой для получения эффективных алгоритмов подсчёта определителей матриц смежности слоистых графов.

Тем самым техника удаления чипа полезна при подсчёте определителей и количеств паросочетаний каких-либо других фигур.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Аксенов, К. Кохась, *Разбиения на домино и определители*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **421** (2014), 5–18.
- [2] К. Кохась, *Разбиения на домино*. — Мат. просвещение. Третья серия. 2005. Вып. 9. С. 143–163.
- [3] К. Bibak, R. Tauraso, *Determinants of grids, tori, cylinders and Möbius ladders*, <http://arxiv.org/abs/1212.4816v1>.
- [4] M. Ciucu, *Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry*. — J. Combin. Theory. Ser. A. **77**, No. 1 (1997), 67–97.
- [5] M. Ciucu, *A generalization of Kuo condensation* <http://arxiv.org/abs/1404.5003v1>
- [6] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, and J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings (Part I)*. — J. Algebraic Combinatorics **1** (1992), 111–132.
- [7] M. Fulmek, *Graphical condensation, overlapping pfaffians and superpositions of matchings*. <http://www.arxiv.org/math.CO/0906.4236v3>
- [8] R. Kenyon, *Local statistics of lattice dimers*. Annales de l’I.H.P., section B, tome 33, n° 5 (1997), P. 591–618.
- [9] E. Kuo, *Application of graphical condensation for enumerating matchings*. — Theoret. Comput. Sci. **319** (2004), 29–57; <http://www.arxiv.org/math.CO/0304090>.
- [10] Pragel Daniel, *Determinants of box products of paths* <http://arxiv.org/abs/1110.3497>.
- [11] J. Propp, *Generalized domino-shuffling*. — Theoret. Comput. Sci. **303**, No. 2-3, 267–301 (2003); <http://arxiv.org/abs/math/0111034>.
- [12] H. M. Rara, *Reduction procedures for calculating the determinant of the adjacency matrix of some graphs and the singularity of square planar grids*. — Discrete Math. **151** (1996), 213–219.
- [13] W. Thurston, *Conway’s tiling groups*. — American Mathematical Monthly **97** (1990), pp. 757–773.
- [14] Bo-Yin Yang, *Three enumeration problems concerning Aztec diamonds*. — Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, Massachusetts, 1991.