

УДК 001.51: 004.81

*А.Ю. Дорогов*

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ», Россия, dorogov@lens.spb.ru

## Селективная балансировка знаковых графов

Исследуется новая парадигма локальной балансировки знакового графа, основанная на анализе симметрий графа и выявлении селектирующих структур. Приведена матричная интерпретация графа и показано, что количественной оценкой степени согласования знакового графа может служить мера обусловленности системной матрицы. Показана применимость топологических методов для оценки степени обусловленности знаковых графов. Представлена модель базового конструкта согласованных локальностей. Дано доказательство основной теоремы, структурного образа конструкта и приведены алгоритмические условия его локализации. На реальных данных показана значимость ролевой разметки вершин знакового графа.

### Введение

Сигнальный граф, в котором все ребра имеют вес  $+1$  или  $-1$  называют знаковым. Граф подобного вида обычно используется как модель поведения исследуемого объекта или процесса. Вершинам графа сопоставляются переменные состояния объекта, а знак ребра представляет собой качественную оценку причинной связи между смежными вершинами. Если знак положительный, то возрастание значения данной переменной приводит к возрастанию значения смежной, и наоборот уменьшение значения данной переменной влечет за собой уменьшение значения смежной переменной.

Одной из первой и до сих пор наиболее привлекательной областью приложения знаковых графов является социология где знаковые графы используются для моделирования поведения людей в малых группах (Cartwright и Harary (1956) [1], а также Harary (1954) [2] ) Каждому индивидууму группы сопоставляется вершина знакового графа, а знак ребра определяет дружественное или недружественное отношения индивидуума с ближайшим соседом. Было показано, что баланс интересов индивидуумов в группе соответствует знаковой четности всех циклов графа. Цикл называется четным, если он имеет четное число ребер с отрицательным знаком (напомним, что число ноль также считается четным). В этом ключе задача поиска оптимального поведения в группе может быть сформулирована как достижение знакового баланса в графе.

В системах поддержки решений обычно используется так называемая когнитивная карта, которая выражает известные субъекту основные закономерности наблюдаемой ситуации в виде ориентированного знакового графа. Вершины графа – это факторы (признаки, характеристики ситуации), а дуги – причинно-следственные связи между факторами. Задача поиска оптимального решения может быть сформулирована как задача достижения знакового баланса в когнитивной карте. В настоящее время теория знакового баланса используется в экономических моделях, мультиагентных системах [3], системах адаптивного поведения, телекоммуникационных системах [4] и многих других прикладных областях.

Характеризация знаковых графов впервые была дана структурной теоремой Нарару (1954). Позже Maybee [5], Narary [6], Kabell [7], и Hansen разработали алгоритмы оценки возможности балансировки знаковых графов. Не все системы являются полностью балансируемыми, важным направлением теории балансировки является оценка степени баланса (Taylor 1970 и Roberts 1976 [8]). Вопросы частичной балансировки знаковых графов для социальных систем исследовались в работах Doreian, P., Mrvar, A., 1996 [9], Doreian, P., [10].

Процедура согласования знакового графа связана с переменной знаков его ребер. Возможны три основных подхода к решению проблемы достижения знакового баланса:

1. Нахождение минимального набора ребер графа, изменение знаков которых обеспечит согласование.
2. Определение ограниченного множества наборов ребер, каждый из которых обеспечивает согласование графа.
3. Применение переборных процедур для перечисления всех возможных вариантов согласования.

В первом случае речь идет, как правило, о построении единственного решения, проблема смысловой мотивации такого решения не ставится. Второй подход может дать различные варианты решений. Проблема состоит в том, чтобы среди них отобрать только те варианты, которые адекватны реальному поведению моделируемой системы. Третий путь приводит к NP-полным задачам и упирается в ограничение размерности.

Не смотря на множество работ, математическое решение задачи балансировки знаковых графов больших размеров до сих пор не получено. Принципиально новый подход к решению данной проблемы представлен в работах Б.Ф.Фомина, Т.Л. Качановой (1978)[11,12,13], которые использовали модель знакового графа для реконструктивного анализа сложных систем. Основная идея новой парадигмы заключается в оптимальном использовании внутренних симметрий знакового графа для балансировки его ограниченных областей (локальностей). Предложенный индуктивный подход позволяет максимально наращивать сбалансированные локальности, исключая прямой перебор вариантов. Отличительной особенностью является определение доминирующих вариантов согласования и наличие технических индикаторов полноты данных. Системное знание раскрываются через анализ особых структур обладающих различными видами симметрий и через исследование их взаимодействий. Общее решение было получено на качественном уровне. В настоящей работе представлены базовые положения новой парадигмы балансировки знаковых графов и сделана попытка построить ее математическое обоснование.

## 2. Треугольник противоречий

Нарушенный баланс в знаковом графе отражает наличие противоречия в данных, на основе которых этот граф был построен. Минимальный знаковый граф, позволяющий выразить противоречие, представляет собой замкнутый контур, состоящий из трех вершин (рис. 1а)). В данном графе при передаче по контуру  $x_1 - x_2 - x_3 - x_1$  положительное приращение переменной  $x_1$  трансформируется в отрицательное приращение этой же переменной, т.е. контурный коэффициент пе-

передачи имеет значение (-1), что физически трактуется как противоречие. В этом случае контур называют несбалансированным или нечетным.

Особая роль фигуры треугольника заключается в том, что он может слу-

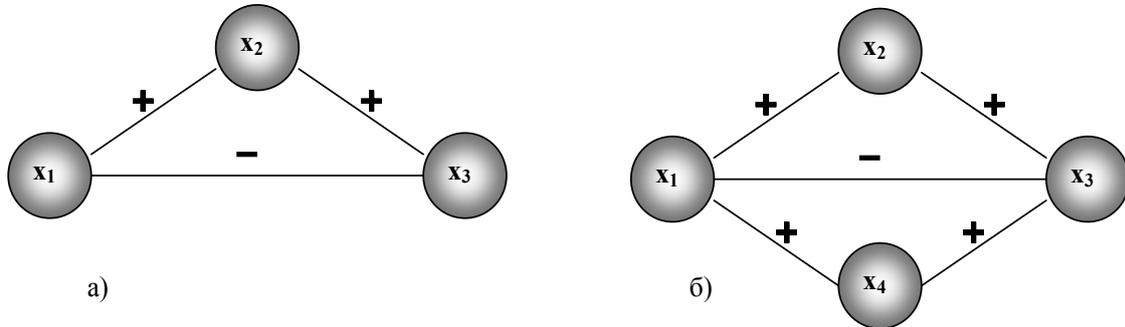


Рис. 1. а) Треугольник противоречий. б) Декомпозиция согласованного контура в два несогласованных треугольника.

жить базой индукции в задаче балансировки сложных знаковых графов. Нетрудно показать, что многовершинный контур, образованный сторонами смежных треугольников, будет сбалансирован, если сбалансированы все образующие его треугольники. Обратное, вообще говоря, не верно, альтернативный пример показан на рис. 1б).

### 3. Матричная интерпретация

Каждое ребро знакового графа отражает взаимную зависимость двух системных переменных  $x_i \leftrightarrow x_j$ . Эта связь является двусторонней исимметричной для внутренних переменных и односторонней для внешних воздействий. Рис. 2 демонстрирует знаковый граф, в котором явным образом выражена направленность и симметричность связей.

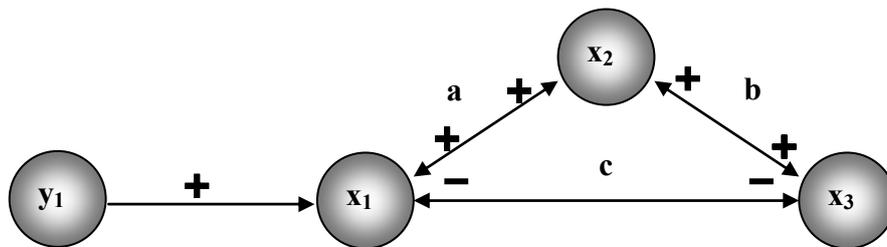


Рис. 2. Полная модель знакового треугольника

Вершины  $x_1, x_2, x_3$  соответствуют внутренним переменным, а вершина  $u_1$  определяет внешнее воздействие. Эквивалентным описанием знакового графа является матрица связей (матрица смежности). Для графа показанного на рис. 2 эта матрица имеет вид:

$$C = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & -1 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

Элементы матрицы связей равны коэффициентам передачи между системными переменными. Матрица симметрична по отношению к главной диагонали,

поскольку симметричны все внутренние связи. По графу можно построить также систему алгебраических уравнений, определяющих реакцию системы на внешние воздействия:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Матрицу  $A$ , составленную из коэффициентов алгебраической системы, назовем системной матрицей. Для нашего примера она имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Системная матрица связана с матрицей связей соотношением:  $A = I - C$ , где  $I$  - единичная матрица. Системные переменные и внешние воздействия представим в виде векторов:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда реакция системы на внешние воздействия может быть выражена в виде матричного уравнения:

$$AX = Y. \quad (2)$$

Уравнение имеет единственное решение относительно вектора  $X$ , если определитель  $\Delta_A$  системной матрицы  $A$  отличен от нуля. Нетрудно проверить, что для треугольника с противоречий значение определителя равно нулю. При нулевом определителе существует множество решений, которые образуют плоскость некоторой размерности в пространстве состояний системы. Это свидетельствует о неопределенности поведения системы и ее реакции на внешние воздействия. Говорят, что алгебраическая система плохо обусловлена [14], если определитель ее системной матрицы близок или равен нулю. Таким образом, наличие противоречий в треугольнике эквивалентно плохой обусловленности соответствующей алгебраической системы. В целом это положение справедливо и для более сложных знаковых графов с противоречиями, хотя определитель их системной матрицы может быть отличен от нуля, абсолютное значение определителя служит мерой обусловленности системы с противоречиями. В плохо обусловленной системе малые изменения внешних воздействий или элементов системной матрицы могут привести к значительным изменениям внутреннего состояния системы. Поэтому при оптимальной балансировке графа, необходимо выбрать вариант с наилучшей обусловленностью системной матрицы.

Достигнуть баланса в треугольнике можно изменив знак связей. Четыре возможных варианта согласования треугольника показаны на рис. 3. Прямоугольниками выделены знаки изменяемых связей. Все согласованные треугольники имеют значение определителя  $\Delta_A = -4$ , поэтому нельзя отдать предпочтение, какому либо из вариантов по степени обусловленности. Однако в последнем варианте число перемен знаков больше чем в первых трех. Поэтому этот вариант можно считать менее предпочтительным, поскольку он приносит больше изменений в исходный граф связей.

Основываясь на данных рассуждениях задачу оптимальной балансировки знакового графа можно сформулировать следующим образом: необходимо найти минимальное подмножество ребер, изменение знаков которых приводит к наилучшей обусловленности системной матрицы.

Пример треугольника показывает, что существует несколько эквивалентных вариантов согласования знаковых графов. Число вариантов балансировки экспоненциально возрастает при увеличении количества вершин графа. Поэтому выполнить полный перебор и оценку всех вариантов для сколько-нибудь большой системы не представляется возможным. Необходимы иные принципы построения вариантов согласования, детали новой парадигмы будут представлены в последующих разделах.

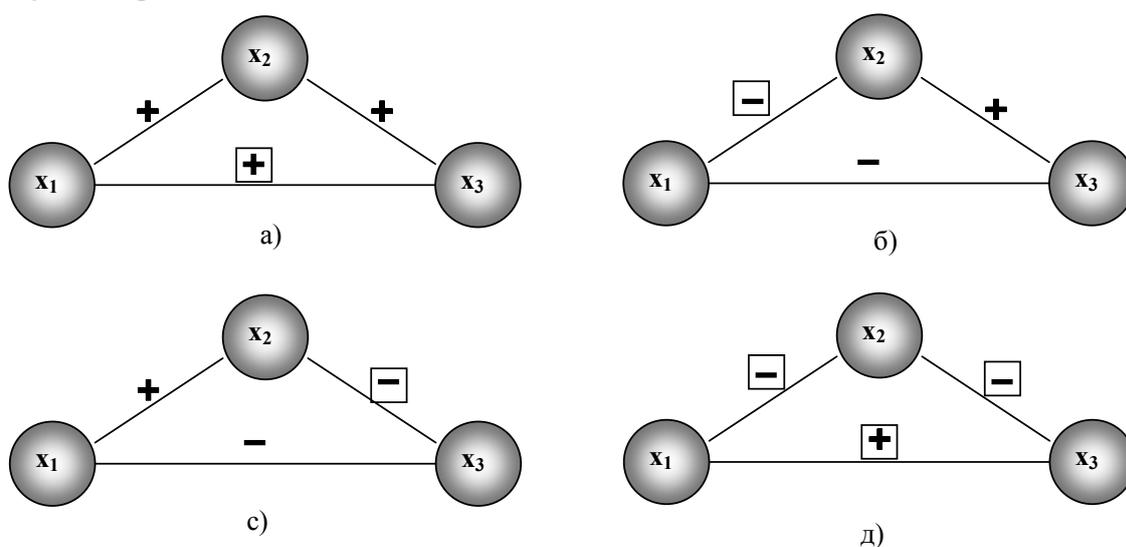


Рис. 3. Варианты согласования треугольника противоречий. Прямоугольниками помечены изменяемые знаки связей.

Построение системной матрицы и вычисление определителя при высокой размерности задача достаточно трудоемкая и требует большого объема вычислений. Кроме того, использование численных методов исключает возможность построения аналитических выражений для оценки степени влияния отдельных контуров графа на значение определителя системной матрицы. В следующем разделе будут рассмотрены средства, упрощающие вычисления значения определителя и главное позволяющие получить аналитическую форму выражения баланса графа, через баланс треугольников.

## 4. Топологические формулы

Вычисление определителя системной матрицы непосредственно по графу связей можно эффективно выполнить, используя топологические методы расчета [15]. Знаковый граф принципиально ничем не отличается от обобщенного сигнального графа используемого для расчета электрических цепей. Представление знакового графа, показанное на рис. 2 совпадает с формой обобщенного сигнального графа, за исключением весов вершин. Весами вершин обобщенного сигнального графа являются соответствующие элементы главной диагонали системной

матрицы  $A$ . Для знакового графа эти значения равны 1 для всех вершин и, поэтому их можно условно не отображать в поле графа. Топологическая формула для вычисления определителя обобщенного сигнального графа имеет вид:

$$\Delta = \delta + \sum L^{(j)} \delta^{(j)} + \sum L^{(j)} L^{(k)} \delta^{(j,k)} + \dots + \sum L^{(j)} L^{(k)} \dots L^{(s)},$$

где  $\delta = \prod a_{ii}$  - произведение весов всех вершин графа,  $\delta^{(j)}$  - произведение весов всех вершин графа, кроме вершин, входящих в  $j$ -й контур с весом  $L^{(j)}$ ,  $\delta^{(j,k)}$  - произведение весов всех вершин графа, кроме вершин, входящих в  $j$ -й и  $k$ -й не касающиеся контуры с весом  $L^{(j)}$  и  $L^{(k)}$  соответственно и т. д. Последний член формулы включает в себя максимальное количество не касающихся контуров, которые очевидно покрывают все вершины графа, поэтому значение  $\delta^{(j,k,\dots,s)}$  равно единице. Следует обратить внимание на то обстоятельство, что вес контура  $L^{(j)}$  равен коэффициенту контурной передачи, взятому с обратным знаком, это позволяет исключить чередование знаков «плюс» и «минус» в данной формуле.

Для упрощения расчета часто используют формулы разложения сигнальных графов по ребру или по вершине. Разложение графа заключается в том, что ребро или вершина удаляется из графа, определитель рассчитывается для упрощенного графа, а затем по топологическим формулам реализуется переход к значению определителя исходного графа. Приведем только топологическую формулу разложения по вершине, которая оказывается наиболее применимой для знаковых графов:

$$\Delta = a_{ii} \Delta_i + \sum L_{ii}^{(s)} \Delta^{(s)},$$

здесь  $\Delta_i$  - определитель графа  $G_i$  образуемого из исходного графа  $G$  удалением вершины  $x_i$ ,  $L_{ii}^{(s)}$  - вес  $s$ -го контура проходящего через вершину  $x_i$ ,  $\Delta^{(s)}$  - определитель части графа, не касающийся  $s$ -го контура.

Учитывая, что для знакового графа все вершины имеют единичный вес, топологические формулы упрощаются и примут вид:

$$\Delta = 1 + \sum L^{(j)} + \sum L^{(j)} L^{(k)} + \dots + \sum L^{(j)} L^{(k)} \dots L^{(s)}, \quad (3)$$

$$\Delta = \Delta_i + \sum L_{ii}^{(s)} \Delta^{(s)}. \quad (4)$$

Реакцию переменной состояния  $x_k$  на внешнее воздействие  $y_l$  можно определить с помощью топологической формулы:

$$W_{kl} = \frac{x_k}{y_l} = \frac{\sum P_{kl}^{(s)} \Delta^{(s)}}{\Delta}, \quad (5)$$

где  $\Delta$  - определитель системной матрицы,  $P_{kl}^{(s)}$  - вес  $s$ -го пути в вершину  $x_k$  из вершины внешнего воздействия  $y_l$ ,  $\Delta^{(s)}$  - определитель части графа не касающийся  $s$ -го пути. Все пути вычисляются как произведение весов всех дуг, принадлежащих данному пути.

Обобщенный сигнальный граф треугольника, показанный на рис. 2 включает в себя пять контуров: два вложенных друг в друга контура из трех вершин с противоположным направлением обхода и три контура из двух смежных вершин треугольника. Коэффициент контурной передачи для треугольника равен  $\alpha = abc$ . Если треугольник не имеет противоречий, то  $\alpha = 1$ , в противном случае  $\alpha = -1$ . Все двухвершинные контуры имеют коэффициент передачи равный +1. Граф не

содержит не касающихся контуров. Используя топологическую формулу (3) немедленно получим:

$$\Delta = 1 - 2\alpha - 3 = -2(1 + \alpha).$$

Отсюда в частности следует, что для треугольника противоречий  $\Delta = 0$ . По топологической формуле (5) получим реакции системных переменных знакового треугольника (см. рис. 2) на внешнее воздействие  $y_1$ :

$$W_{11} = \frac{x_1}{y_1} = 0, \quad W_{21} = \frac{x_2}{y_1} = \frac{a}{\Delta}, \quad W_{31} = \frac{x_3}{y_1} = \frac{c}{\Delta}.$$

## 5. Разделяющие структуры

Определяющей позицией новой парадигмы балансировки знаковых графов [11] является концепция последовательной индукции от минимальной цикловой фигуры – треугольника противоречий. Совокупность всех треугольников противоречий служит базой индукции при поиске оптимальных вариантов согласования. Рассматриваемые отдельно от графа связей, все эти треугольники совершенно равноправны. В формальном исследовании допустимость смены знака на любом ребре не обсуждается и считается всегда возможной. Каждый треугольник

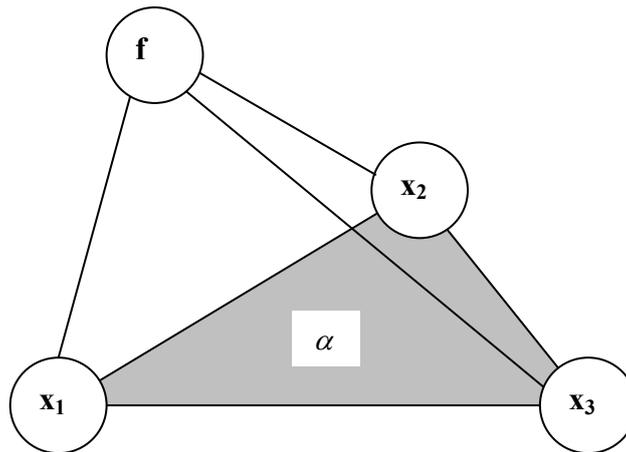


Рис. 4. Многовершинное окружение треугольника противоречий

противоречий обладает симметрией поворота, что не дает возможность точно установить несогласованные пары связей и все варианты согласования являются допустимыми. Была высказана идея, что нарушить симметрию поворота треугольника можно за счет информации имеющейся в его ближайшем окружении. Окружение для треугольника противоречий должно быть таким, чтобы подграф каждой вершины окружения включал в себя треугольник как единое целое. Это условие приводит к многовершинной структуре – тетраэдру (рис. 4) в которой сам треугольник  $\alpha$  служит основанием тетраэдра, а вершина окружения  $f$  связана симметричными связями со всеми вершинами треугольника. Каждый тетраэдр многовершинной структуры имеет три боковых грани и к ним также применим критерий знакового баланса. Отправной точкой для последующих рассмотрений является следующая теорема.

**Теорема «О разделении граней тетраэдра».** Если в основании тетраэдра размещен несбалансированный треугольник, то только две из четырех граней тетраэдра могут быть согласованы. Невозможными являются случаи, когда согласованы три грани или только одна какая-то грань.

*Доказательство.* Рассмотрим тетраэдр в плоском отображении (рис. 5). По условию грань  $x_1 - x_2 - x_3$  - треугольник противоречий, поэтому  $\alpha = lrb = -1$ . Предположим, что треугольник  $x_1 - f - x_3$  согласован, тогда его контурная передача определяется равенством  $cdb = 1$ . Выразим это равенство, через передачи контуров, используя следующее тождество:

$$cdb = (cal)(adr)(blr).$$

Переменные  $a, l, r$  являются знаковыми и добавлены в выражение парами, поэтому они не меняют произведение. В результате получим:

$$cdb = \beta\gamma\alpha = 1.$$

Поскольку  $\alpha = -1$ , то последнее равенство будет выполняться, когда  $\beta$  и  $\gamma$  будут иметь разные знаки. Таким образом, при данном предположении только две из четырех граней тетраэдра могут быть согласованы.

Предположим теперь, что  $cdb = \beta\gamma\alpha = -1$  и  $\alpha = -1$ . Равенство будет выполняться, только если  $\beta$  и  $\gamma$  имеет одинаковые знаки. Когда эти знаки положительны, то две грани в тетраэдре согласованы, когда знаки отрицательны, то в тетра-

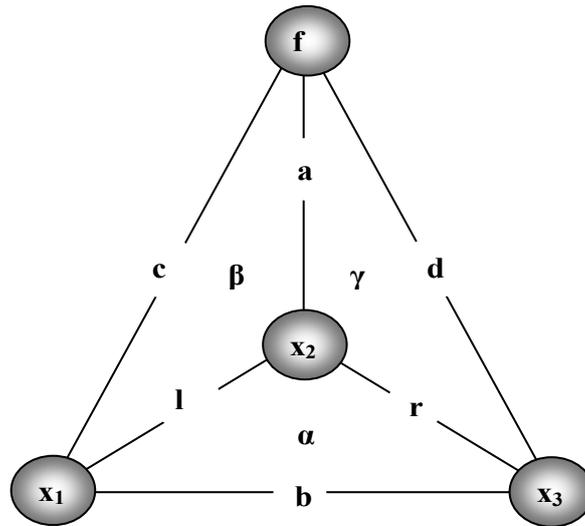


Рис. 5 Многовершинная структура. Знаки ребер обозначены латинскими символами и вставлены в разрыв линий, контурные передачи обозначены греческими буквами.

эдре нет согласованных граней. Случаи, когда согласованы три или одна грань тетраэдра (с треугольником противоречий в основании) существовать не могут. *Теорема доказана.*

Для полноты картины рассматриваются все возможные тетраэдры имеющими в основании заданный треугольник противоречий. С каждой вершиной окружения связаны три грани, по доказанной теореме две из этих граней согласованы. Это может быть любая пара из трех возможных граней. Каждая из трех граней ассоциируется с одной из сторон треугольника противоречий принадлежащему основанию тетраэдра. По признаку ассоциации все вершины окружения могут

быть разделены на три категории. Каждой категории соответствует ассоциированная пара сторон треугольника основания, с которой вершина окружения образует согласованные треугольники.

Если одна из трех категорий является пустым множеством, то многовершинная структура приобретает осевую симметрию. При такой симметрии элемен-

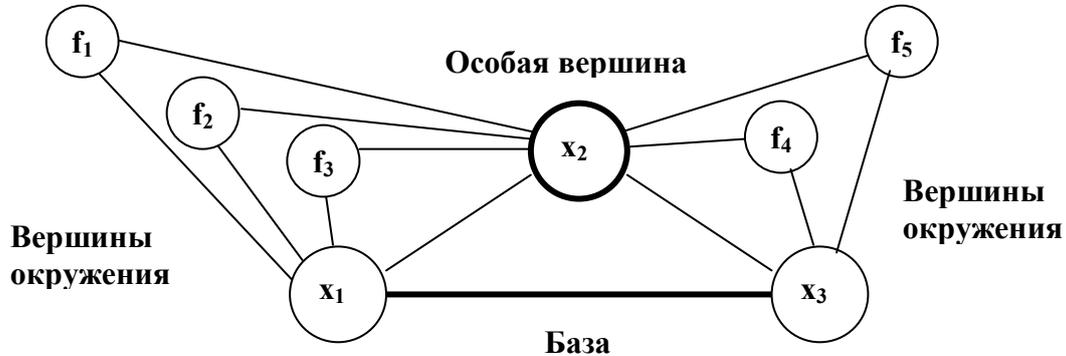


Рис. 6. Многовершинная структура (для упрощения рисунка часть ребер не показана)

ты треугольника становятся различимыми, в нем выделяются особое ребро – база и противоположное этому ребру вершина – особая вершина (рис. 6). База основания играет особую роль и отличается по своей значимости от боковых ребер; все треугольники, образованные вершинами окружения и замкнутые на базу не противоречивы, напротив все противоречивые треугольники замкнуты на боковые ребра. В силу этого изменение знаков боковых ребер при согласовании будут мотивированы принципом минимальных изменений, тогда как перемена знака базы никак не обоснована. Таким образом, в многовершинной структуре остаются только два обоснованных варианта согласования, порождаемых изменением знака какого либо одного бокового ребра (рис. 7).

Если из трех вышеупомянутых категорий две являются пустыми, то многовершинная структура ассиметрична. Для нее существует единственный вариант согласования, связанный с изменением только одной стороны треугольника основания, а именно той с которой вершины окружения образуют противоречивый треугольник. Выбор базы из двух оставшихся сторон не определен, но это не пре-

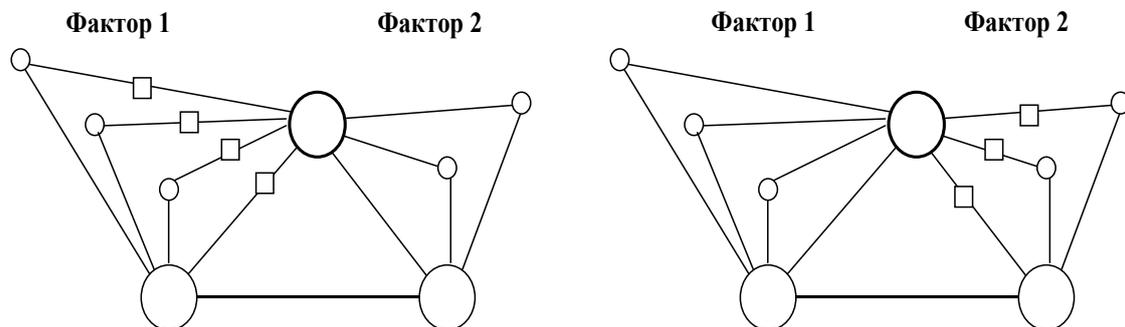


Рис. 7. Варианты согласования многовершинной структуры. Прямоугольниками помечены одновременно изменяемые связи.

пятствует использованию ассиметричных структур в процедурах балансировки наравне со структурами, обладающими осевой симметрией. Более того, эти структуры наилучшим образом отвечают принципу минимальных изменений.

Многовершинные структуры обоих типов состоящие из  $N$  тетраэдров окружения удовлетворяют следующим условиям:

1. Количество согласованных треугольников в структуре равно  $2N$ , тогда как число не согласованных треугольников в ней, включая основание равно  $(N + 1)$ .
2. Только одно ребро основания (база) определяет с вершинами окружения  $N$  согласованных треугольников.
3. Сумма согласованных треугольников, образованных вершинами окружения и двумя другими ребрами основания структуры равна  $N$ .

Три перечисленных условия определяют формальный конструкт локализации многовершинной структуры с заданными свойствами симметрии. Условия полностью соответствуют теореме «о разделении граней тетраэдра» в предположении, что в каждом тетраэдре многовершинной структуры существуют сбалансированные треугольники. Многовершинные структуры, удовлетворяющие данным трем условиям, были названы *разделяющими* и обозначаются далее идентификатором «SHARE». Разделяющие структуры с осевой симметрией называются также *синглетами* [13].

Если все три вышеупомянутые категории вершин окружения пустыми не являются, то для данной многовершинной структуры осевая симметрия не может быть выделена. Для подобных структур не существует мотивированных вариантов согласования треугольника противоречий; изменение знака любой стороны треугольника основания всегда будет порождать новые не согласованные грани вершин окружения. Данный тип структуры назовем *предсинглетом*, при удалении части показателей в системе данных, эти структуры могут перейти в разряд разделяющих структур.

Осевая симметрия SHARE разделяет вершины окружения на два непересекающихся подмножества – фактора. Каждый из факторов образует согласованные

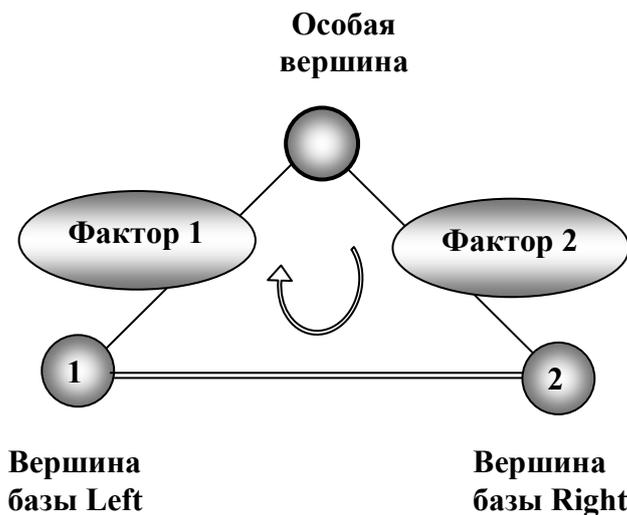


Рис. 8. Ориентированная разделяющая структура. Вершины баз условно выделены из факторов.

треугольники с одним из боковых ребер основания, а треугольники противоречий с другим боковым ребром. Боковые ребра отличаются вершинами баз, поэтому и

факторы также сопоставляются вершинам баз (рис. 8). Более того, вершины баз включаются в факторы, это позволяет рассматривать симметричные и ассиметричные разделяющие структуры в одном ключе. Допустимое согласование достигается изменением знаков связей вершин одного из факторов с особой вершиной.

Для различения факторов и соответствующих базовых вершин удобно ввести ориентацию синглета, задавая для него направление обхода треугольника. Тогда фактором 1 (или Left – фактором) будем считать фактор, который расположен слева от особой вершины по направлению обхода треугольника, а фактором 2 (или Right – фактором) будем считать фактор, расположенный справа от особой вершины по направлению обхода. Вершины окружения фактора Left образуют согласованные треугольники с левым ребром треугольника противоречий, а вершины окружения фактора Right с правым ребром. Разделяющая структура, в которой задана ориентация треугольника противоречий, называется поляризованной или ориентированной. Эта же терминология используется и для факторов. Частичный знаковый граф, являющийся носителем разделяющей структуре в дальнейшем называется *SHARE-локальностью*, а треугольник противоречий – *ядром локальности*. В общем случае локальность может быть носителем для нескольких SHARE.

На рис. 9 приведен пример SHARE-структуры в реальной системе данных.

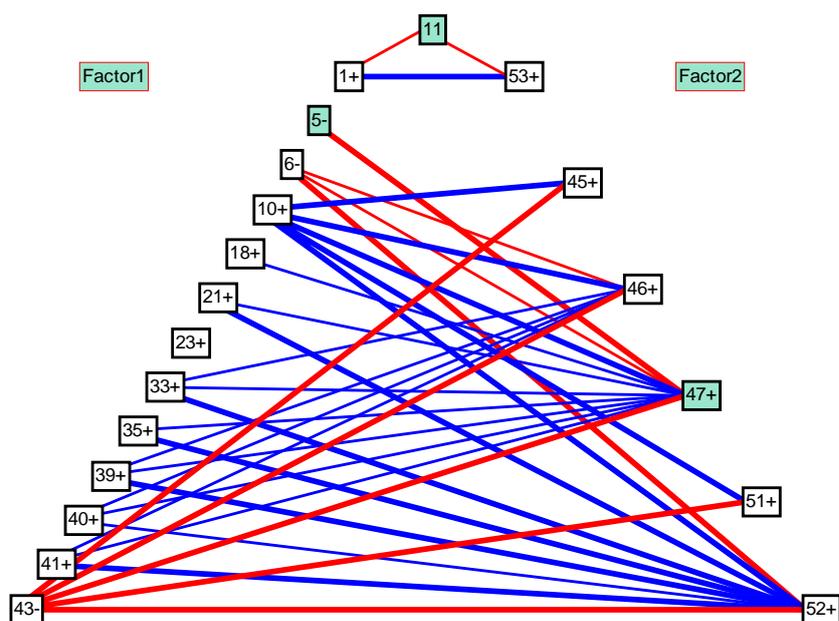


Рис. 9. Портрет разделяющей структуры SHARE в реальной системе данных. Положительные связи помечены красным цветом (светлый тон), отрицательные – синим (темный тон). Утолщенными линиями показаны базы. Треугольник противоречий фрагментарно выделен. Особые вершины имеют темный фон. Связи вершин факторов с особой вершиной не показаны, но после номера факторной вершины отображаются их знаки.

(здесь и далее для примеров используется база данных, описанная в работе [16], знаковый граф связей был построен по матрице парных корреляций атрибутов базы данных).

Согласованная многовершинная структура, полученная изменением связей Left – фактора с особой вершиной называется *Left–эталонной моделью*, а изменением связей Right – фактора называется *Right–эталонной моделью*. Каждая из эталонных моделей определяет одно из двух возможных поведений системы в границах SHARE. Применимость Left или Right моделей может быть потенциаль-

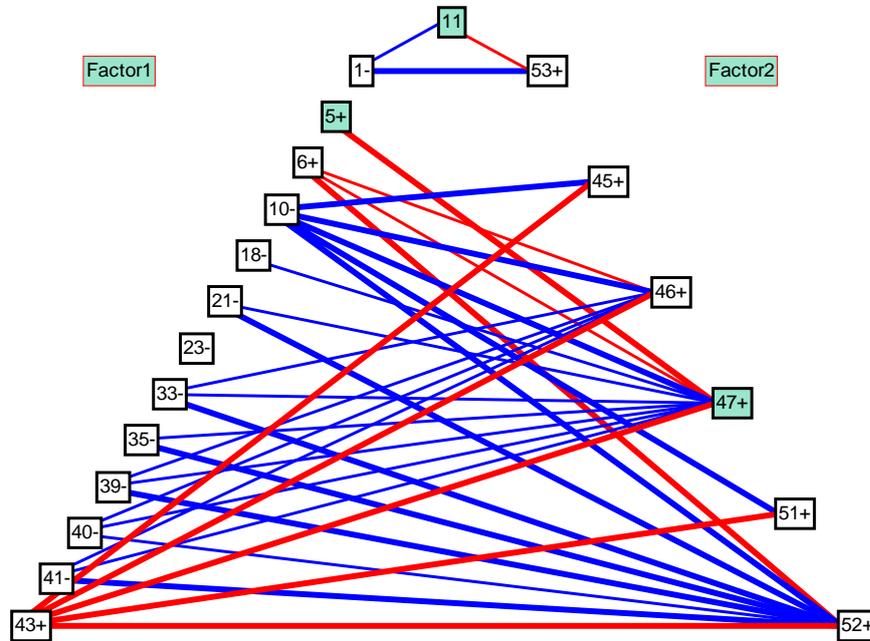


Рис. 10. Эталонная модель SHARE-Left

но ограничена, если одна или несколько изменяемых связей фактора являются базами других SHARE. Декларированный выше принцип минимизации изменений запрещает изменять знаки баз, это ведет к мотивированному ограничению в применимости модели, когда база попадает в число изменяемых связей. Для характеристики ограничений эталонных моделей введем для SHARE вектор маркировки  $P = (p_l \ p_r)$ , состоящий из двух бинарных элементов.

Первый элемент -  $p_l$ , соответствует эталонной модели Left и равен 1, если эта модель не имеет ограничений и нулю в противном случае. Второй элемент -  $p_r$  подобным образом описывает эталонную модель Right. Вектор маркировки не препятствует использованию эталонной модели при независимом применении SHARE, но содержит информацию о потенциальных ограничениях которые могут иметь место при взаимодействии ее с другими локальностями. На рис. 10 показан пример эталонной модели Left. Граф эталонной модели полностью сбалансирован.

## 6. Концепция открытой локальности

Построение разделяющих структур было связано с обособлением вершин окружения и их связей с вершинами ядра. Обратное погружение выделенной структуры в исходный граф, приводит к появлению дополнительных связей, которые могут быть не охвачены процедурой балансировки по эталонным моделям. Подграф, который наследует структурную модель и дополненными связями исходного графа определяет модель открытой локальности (UNION). На рис. 11 приве-

ден пример открытой локальности SHARE-UNION. Для следующего шага итера-

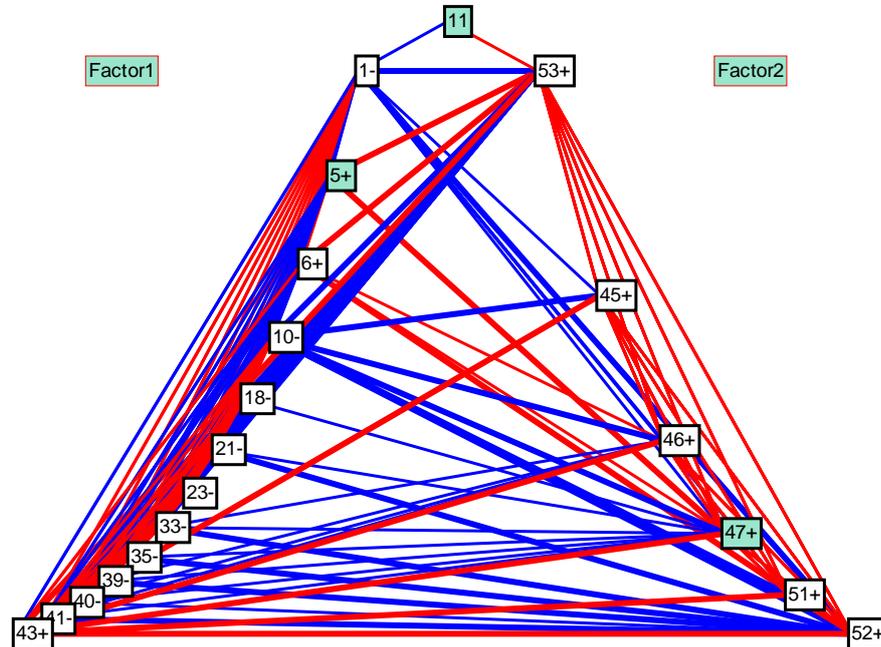


Рис. 11. Отрытая локальность SHARE –UNION.

ции отбираются SHARE, которые сохраняют согласованность в открытой локальности, по крайней мере, для одной эталонной модели.

Для открытой локальности может быть применена дополнительная балансировка несогласованных треугольников, которые не входят ни в одну из SHARE. Возможные варианты согласования определяются прямым перебором альтернатив и оценкой степени обусловленности каждого из вариантов для поиска наилучшего. Поскольку в основном баланс в UNION достигается через одну из эталонных моделей, число несбалансированных связей относительно не велико и использование переборных процедур вполне допустимо.

## 7. Оценка ролей вершин

После выделения разделяющих структур вершины графа связей становятся различимыми по своей роли в выявлении присущих системе неоднородностей. Классификация множества вершин для системы данных показана на рис. 12. Для оценки роли вершин сделаны несколько экспериментов. Результаты экспериментов представлены в таблице .

В первом эксперименте граф связей включал 40 вершин, которые составляют полное покрытие локальностями и полное ядерное покрытие. Этих вершин оказалось достаточно, чтобы проявились практически все характерные неоднородности системы данных.

Во втором эксперименте сохранены только вершины баз (39). Изменение покрытия на одну вершину, привело к уменьшению числа SHARE и особых вершин, но число локальностей сохранилось. Таким образом, базы оказывают влияние на представительность локальностей и отражают природу неоднородностей.

В третьем эксперименте из базы данных были удалены все особые вершины. В результате исчезли образуемые ими локальности, но появились две дополнительные особые вершины, которые отсутствовали в исходной базе. Объясняется это тем, что в результате удаления некоторых вершин окружения два предсинглета перешли в разряд синглетов и образовали 20 структур SHARE. Вторая

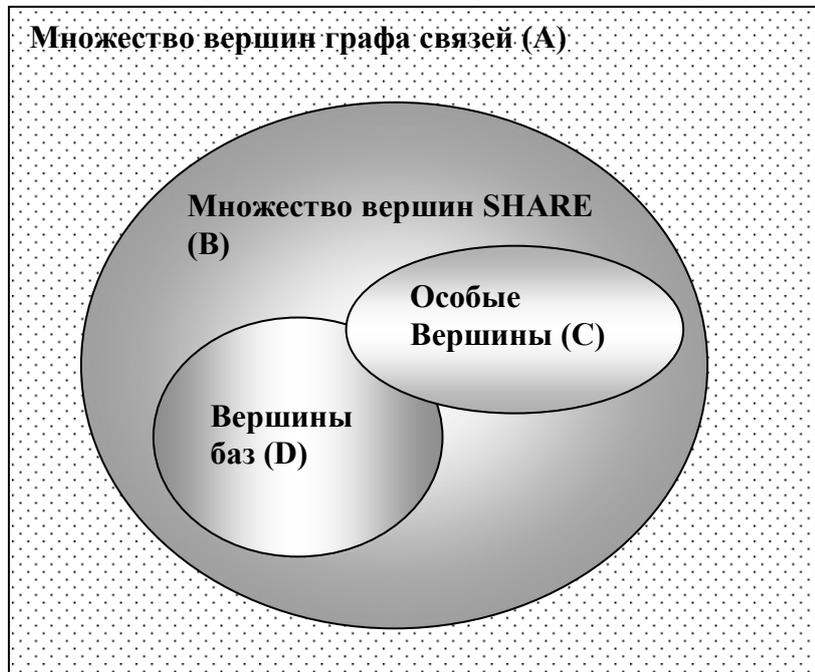


Рис. 12. Классификация вершин

итерация по удалению особых вершин (эксперимент 4) полностью завершила процесс удаления. Редуцированная система данных сохранила противоречия, которые не могут быть разрешены в рамках данной парадигмы. Это указывает на факт недостаточной представительности системы данных для 40 оставшихся показателей.

В пятом эксперименте база данных содержала 13 показателей, которые яв-

Таблица. Оценка роли вершин системы данных

Состав системы данных	Число вершин в графе связей	Общее число треугольников	Число треугольников противоречий	Число локальностей	Число SHARE	Размер множества вершин SHARE	Число особых вершин	Число вершин баз
0. (A)	55	3281	393	47	108	40	13	39
1.(B)	40	2535	292	47	108	40	13	39
2. (D)	39	2501	272	47	102	39	11	38
3. (A-C) Итер. 1.	42	1290	129	3	20	17	2	12
4.(A-C) Итер. 2.	40	1032	87	0	0	0	0	0
5. (C)	13	36	17	13	13	11	8	11

ляются особыми вершинами в исходной базе данных. В результате сохранено 13

различных локальностей с единичным наполнением, число особых вершин уменьшилось до 8. Эти 13 показателей выделяют кластер неоднородностей, обусловленных сложными внутрисистемными взаимодействиями.

В последнем эксперименте были удалены все вершины покрываемые множеством локальностей SHARE. В результате 14 оставшихся показателей образовали граф без противоречий, с низкой плотностью связей.

Оценочный анализ позволяет выделить наиболее информативный состав вершин и сделать выводы о полноте системы данных.

## Заключение

Основная конструктивная идея новой парадигмы знаковой балансировки может быть выражена фразой «если нельзя достигнуть полного баланса, то можно попытаться выделить ограниченные области знакового графа, для которых возможности и варианты балансировки максимально обоснованы структурой графа». Рабочим инструментом исследования являются первичные системные единицы (SHARE), которые представляют собой минимальные артефакты, локально выражающие логические принципы симметрии и двухфакторного разделения. Локальности SHARE можно рассматривать как «точки кристаллизации», которые позволяют запустить механизм индукции в процедуре согласования знакового графа. Доказанная теорема «О разделении граней тетраэдра» дает строгое математическое обоснование новой парадигме балансировки. Первичная системная единица наделена морфологией: в ней имеется особая вершина, вершины базы, база, боковые ребра и вершины непересекающихся факторов. Эти морфологические различия – дополнительная информация, позволяющая реализовать итерационный механизм структурного анализа знакового графа.

Структуры SHARE локализируют неоднородности системы данных и через критерий знакового баланса выражают локальные механизмы их порождения. В работе показано, что критерий знакового баланса коррелируется с мерой обусловленности системной матрицы ядра структурных единиц. Для анализа степени обусловленности предложено использовать топологические формулы обобщенного сигнального графа. Оптимальность процедур балансировки в локальностях базируется на принципе минимальных изменений знакового графа и оценки степени обусловленности структурных единиц.

Расширение балансируемых локальностей связано с анализом взаимодействий первичных системных единиц. Одним из вариантов расширения локальности состоит в выделении на множестве SHARE однородных классов по особой вершине. Другие линии развития основаны на общности баз и боковых ребер. Концепция взаимодействий первичных единиц, определяет пути расширения балансируемых локальностей и одновременно выявляет возможные варианты балансировки. Обоснование выбора моделей взаимодействия подтверждается количественной оценкой степени обусловленности структурных образований. По существу совокупность эталонных моделей выражает метафорические аттракторы реальной системы, т.е. множества состояний которые являются наиболее типичными проявлениями поведения системы, а структурные образы системы данных образуют базу для построения предметных знания и разработки прикладных проектных решений.

## Литература

---

1. Cartwright, Dorwin, and Harary, F. (1956). Structural balance: A generalization of Heider's theory. *Psychological Review* 63: 277-292.
- 2 Harary, F.: On the notion of balance of a signed graph. *Michigan Mathematical Journal*, 2, 143-146 (1953-54).
- 3 Akira Notsu, Hidetomo Ichihashi and Katsuhiko Honda. Agent Simulation Based on Perceptual Balance / *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*, VOL.6 No.12, December 2006.- pp.50-54.
- 4 Кораблин М.А., Мелик-Шахназаров А.В., Салмин А.А. Регрессионно-когнитивные графы в задачах анализа биллинговых систем // *Информационные технологии*, 2005, № 8, стр. 35-39.
- 5 Conditional colorability in graphs. *Graphs and Applications*. (F. Harary, J. Maybee, Eds.) Wiley, New York (1985) 127-136.
- 6 Harary, F., 1959. On the measurement of structural balance. *Behavioural Science* 4, 316-323.
- 7 J.A. Kabell A simple algorithm to detect balance in signed graphs. *Math. Social Sci.* 1 (1980) 131-136.
- 8 Roberts F. S. *Discrete Mathematical Models\_ With Applications to Social, Biological and Environmental Problems Chapter \_ Signed Graphs and the Theory of Structural Balance* p.64-81 (1976) Prentice Hall, Inc. Englewood Clis. New Yersey. Есть русский перевод: Робертс Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам*. Пер. с англ. М.: Наука, 1986.
9. Doreian, P., Mrvar, A., 1996. A partitioning approach to structural balance. *Social Networks* 18, 149–168.
- 10 Doreian P., Hummon N. P. Some dynamics of social balance processes: bringing Heider back into balance theory, *Social Networks*, Vol. 25, 2003, pp. 17-49.
- 11 Качанова Т.Л., Фомин Б.Ф. Симметрии, взаимодействия в локальностях, компоненты поведения сложных систем / *Издательско-полиграфический центр СПбГЭТУ, СПб, 1998.- 126с. (Препринт № 2).*
12. Качанова Т.Л., Фомин Б.Ф. *Метатехнология системных реконструкций*: СПб: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002. 336с.
13. Качанова Т.Л., Фомин Б.Ф. *Технология системных реконструкций.- СПб.: Политехника, 2003.- 146с. – (Проблемы инновационного развития. Вып.2).*
14. Бахвалов Н.С. *Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)* М.: Наука, 1975.- 631с.
15. Анисимов В.И. *Топологический расчет электронных схем*. Л., «Энергия», 1977. 240с.
16. Дорогов А.Ю., Курбанов Р.Г., Разин В.В Быстродействующий алгоритм семантической классификации JPEG-изображений / *Электронный журнал «Нейроинформатика»* 2006, том 1, № 2 с.124-144. - <http://www.ni.iomt.ru/Journal/N2/>.