Глава 12

Оценка функциональных возможностей программируемых логических матриц

Имеется большое число работ, посвященных методам рационального применения программируемых логических матриц (ПЛМ), например [1—4].

Однако вопрос об оценке функциональных возможностей таких матриц при реализации произвольных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕ в литературе не рассматривался.

Решению этого вопроса посвящена настоящая глава. При этом используется следующее ограничение: предполагается, что у ПЛМ имеются только прямые входы и выходы.

12.1. Непосредственная реализация произвольной скобочной булевой формулы

Реализация произвольной скобочной формулы в рассматриваемом базисе с помощью ПЛМ сводится к реализации системы из $c/2+1$ дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), являющихся подформулами заданной формулы, где c — число скобок в формуле.

При этом каждая ДНФ реализуется на соответствующем выходе ПЛМ, а каждый из выходов, кроме последнего, на котором реализуется формула в целом, соединяется с соответствующим входом ПЛМ.

Наихудшие параметры (v — число входов, t — число термов, b — число выходов) будет иметь ПЛМ, реализующая нормальную бесповторную формулу в базисе И, ИЛИ, которая содержит максимальное число скобок и в которой h одиночных букв объединены между собой непосредственно только операцией ИЛИ. Например, при $h = 16$ соответствующая формула имеет следующую структуру:

$$f = \big((1+1)(1+1)+(1+1)(1+1)\big)\big((1+1)(1+1)+(1+1)(1+1)\big).$$

Для оценки параметров ПЛМ, реализующих формулы этого класса, определим число скобок в них.

На первом уровне каждая пара скобок объединяет две буквы. При этом одна скобка соответствует одной букве. Таким образом, число скобок первого уровня $c_1 = h = h/4^0$.

На втором уровне каждая пара скобок объединяет восемь букв: одна скобка на четыре буквы. Следовательно, число скобок второго уровня $c_2 = h/4 = h/4^1$.

На третьем уровне каждая пара скобок объединяет 32 буквы: одна скобка на 16 букв. Следовательно, $c_3 = h/16 = h/4^2$.

Максимальное число уровней скобок для БФ из h букв определяется соотношением $y = \log_4 h$. При этом число скобок максимального уровня $c_y = h/4^{\log_4 h - 1}$.

Таким образом, общее число скобок определяется соотношением

$$c = \sum_{i=1}^{y} c_i = \frac{h}{4^0} + \frac{h}{4^1} + \frac{h}{4^2} + \ldots + \frac{h}{4^{(\log_4 h)-1}} =$$

$$= \frac{h}{4^0} + \frac{h}{4^1} + \frac{h}{4^2} + \ldots + \frac{h}{4^{(\log_4 h)-1}} + \frac{h}{4^{\log_4 h}} - 1 =$$

$$= \underbrace{(1 + 4 + 16 + \ldots + h)}_{1+\log_4 h} - 1 = \frac{4^{1+\log_4 h} - 1}{4-1} - 1 = \frac{4h-1}{3} - 1 = \frac{4(h-1)}{3}.$$

Ввиду того что число скобок четно, то

$$c = \left\langle \frac{4(h-1)}{3} \right\rangle,$$

где $\langle\ \rangle$ — символ округления до ближайшего меньшего четного. Это соотношение определяет максимальное число скобок в базисе И, ИЛИ из h букв.

При этом

$$v = h + \frac{c}{2} \leqslant h + \frac{\langle (4/3)(h-1) \rangle}{2} < h + \frac{2(h-1)}{3} = \frac{5h-2}{3} < [1.67h];$$

$$b = 1 + \frac{c}{2} \leqslant 1 + \frac{\langle (4/3)(h-1) \rangle}{2} < 1 + \frac{2(h-1)}{3} = \frac{2h+1}{3} < 1 + [0.67h].$$

Определим число термов для формул рассматриваемого вида. Искомая величина определяется соотношением $t_1 = h + u$, где u —

число двухвходовых элементов И в древовидной схеме, реализующей формулу рассматриваемого класса.

Число элементов И в дереве, последним элементом в котором является элемент И, определяется соотношением

$$u = \underbrace{\frac{h}{4} + \frac{h}{16} + \frac{h}{64} + \frac{h}{256} + \ldots}_{\log_4 h} = \frac{h}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{h}{4}\,\frac{(1/4)^{\log_4 h} - 1}{1/4 - 1} = \frac{h}{4}\,\frac{1 - (1/4)^{\log_4 h}}{3/4} = \frac{h}{3}(1 - 4^{-\log_4 h}) = \frac{h-1}{3}.$$

Если последним элементом в схеме является элемент ИЛИ, то

$$u = 2\,\frac{h/2 - 1}{3} = \frac{h-2}{3}.$$

Таким образом,

$$u = \begin{cases} \dfrac{h-1}{3} & \text{при } h = 2^2, 2^4, 2^6, \ldots \\ \dfrac{h-2}{3} & \text{при } h = 2^3, 2^5, 2^7, \ldots \end{cases}$$

Следовательно,

$$u = \left[\frac{h-1}{3}\right].$$

При этом

$$t_1 = h + \left[\frac{h-1}{3}\right] = [1.33\,h].$$

Следовательно, площадь программируемой логической матрицы, реализующей произвольную БФ в базисе И, ИЛИ, определяется соотношением:

$$s_1 = (v + b)\,t_1 = \left(\frac{5h-2}{3} + \frac{2h+1}{3}\right)\frac{4h}{3} < 3.11h^2.$$

Число точек, оставшихся в ПЛМ после программирования, определяется соотношением

$$T_1 \leqslant h + 2\,(h-1) + 1 = 3h - 1,$$

так как каждой букве и каждому выходу соответствует одна точка, а каждому элементу древовидной схемы — две.

12.2. Реализация дизъюнктивной нормальной формы, соответствующей произвольной скобочной булевой формуле

Оценим число термов и число букв в ДНФ, получающейся после раскрытия скобок в заданной формуле в рассматриваемом базисе. Автор предполагает, что эти величины максимальны, если заданная формула имеет вид:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_k)(x_{k+1} \vee x_{k+2} \vee \ldots \vee x_{2k})\ldots \qquad (12.1)$$

Определим средние значения величины k, при которых указанные характеристики принимают максимальные значения.

Если исходная формула состоит из h букв, то число сомножителей в ней равно h/k. Тогда число термов в соответствующей ДНФ определяется соотношением

$$t_2 = k^{h/k},$$

а число букв — соотношением

$$h_2 = (h/k)\,t_2 = (h/k)\,k^{h/k} = hk^{h/k-1}.$$

Определим производную

$$(t_2)'_k = (k^{h/k})' = (e^{(h/k)\ln k})' = e^{(h/k)\ln k}\left((h/k)\ln k\right)' =$$

$$= k^{(h/k)}\left(-(h/k^2)\ln k + (h/k)(1/k)\right) = \frac{h}{k^2}(1-\ln k)k^{h/k} =$$

$$= h(1-\ln k)k^{h/k-2}.$$

Найдем значение k, при котором

$$h(1-\ln k)k^{h/k-2} = 0.$$

Следовательно, $k = e$.

Определим теперь

$$(k^{h/k-1})'_k = (e^{(h/k-1)\ln k})' = e^{(h/k-1)\ln k}\left((h/k)\ln k - \ln k\right)' =$$

$$= k^{h/k-1}\left(-(h/k^2)\ln k + (h/k)(1/k) - (1/k)\right) =$$

$$= k^{h/k-1}\left((h/k^2)(1-\ln k) - (1/k)\right) =$$

$$= k^{h/k-2}\left((h/k)(1-\ln k) - 1\right).$$

Определим соотношение, при выполнении которого

$$k^{(h/k)-2}\left((h/k)(1-\ln k)-1\right)=0.$$

Из этого соотношения следует, что

$$k+h(\ln k)=h. \qquad (12.2)$$

Таким образом, для любого h величина k, обеспечивающая максимум числа термов, постоянна и равна e, в то время как значение k, гарантирующее максимум числа букв в ДНФ, зависит от числа букв в заданной формуле.

Выполним анализ соотношения (12.2).

При $h \to \infty$ это соотношение приобретает вид:

$$h(\ln k)=h.$$

При этом $k = e$. Предположим, что $k = e$, тогда

$$e+h>h,$$

и поэтому $k < e$.

При $h = 0$ справедливо соотношение $k = 0$. Таким образом,

$$0<k=f(h)<\mathrm{e}.$$

Например, $k = 2.22$ при $h = 10$ и $k = 2.45$ при $h = 20$.

Предположим, что $h = 20$, и рассмотрим три формулы:

1) $f=(x_1\vee x_2)(x_3\vee x_4)\ldots(x_{19}\vee x_{20})$, для которой $k = 2, t_2 = 2^{20/2}=1024$, $h_2=20\cdot 2^{20/2-1}=10240$;

2) $f=(x_1\vee x_2\vee x_3)\ldots(x_{16}\vee x_{17}\vee x_{18})(x_{19}\vee x_{20})$, для которой $k=20/7=2.86$, $t_2=3^6\cdot 2=1458$, $h_2=1458\cdot 7=10206$;

3) $f=(x_1\vee x_2\vee x_3)\ldots(x_{10}\vee x_{11}\vee x_{12})(x_{13}\vee x_{14})\ldots(x_{19}\vee x_{20})$, для которой $k=20/8=2.5$, $t_2=3^4\cdot 2^4=1296$, $h_2=1296\cdot 8=10368$.

Из соотношения (12.1) и того, что величина t достигает максимума при $k = e$, следует, что

$$f=\begin{cases}(1+1+1)(1+1+1)\ldots(1+1+1), & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h=0;\\ (1+1+1)\ldots(1+1+1)(1+1)(1+1), & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h=1;\\ (1+1+1)\ldots(1+1+1)(1+1), & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h=2.\end{cases}$$

При этом соотношение для подсчета максимального числа термов в ДНФ имеет вид:

$$t_2=\begin{cases}3^{h/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h=0;\\ 4\cdot 3^{(h-4)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h=1;\\ 2\cdot 3^{(h-2)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h=2.\end{cases} \qquad (12.3)$$

Это соотношение полностью совпадает с соотношением для определения числа клик (максимальных полных подграфов) в графах Муна—Мозера [6], которые имеют наибольшие возможные клики для графов с h вершинами. При этом показано, что произвольный граф с h вершинами может иметь не более t_2 клик [7].

Таким образом, максимальное число термов в ДНФ, получаемых за счет раскрытия скобок в произвольных БФ в базисе И, ИЛИ из h букв, совпадает с максимальным числом клик в произвольном графе с h вершинами.

Из соотношения (12.3) следует, что

$$t_2 \leqslant 3^{h/3}. \tag{12.4}$$

Площадь программируемой логической матрицы, реализующей ДНФ, определяется соотношением

$$S_2 = (h+1)\, t_2.$$

Следовательно, площадь ПЛМ, требующаяся для реализации формул, порождающих ДНФ с максимальным числом термов, определяется соотношением:

$$S_2 = \begin{cases} (h+1)\cdot 3^{h/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 0; \\ 4\cdot(h+1)\cdot 3^{(h-4)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 1; \\ 2\cdot(h+1)\cdot 3^{(h-2)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 2. \end{cases}$$

Из соотношения (12.4) следует, что

$$S_2 \leqslant (h+1)\cdot 3^{h/3}.$$

Число букв в формулах, порождающих ДНФ с максимальным числом термов, определяется соотношением:

$$h_2 = \begin{cases} (h/3)\cdot 3^{h/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 0; \\ 4\cdot\,]h/3[\, \cdot 3^{(h-4)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 1; \\ 2\cdot\,]h/3[\, \cdot 3^{(h-2)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$h_2 \leqslant\,]h/3[\, \cdot 3^{h/3}.$$

Число точек программирования в этом случае определяется соотношением

$$T_2 = h_2 + t_2.$$

Следовательно, для формул, порождающих ДНФ с максимальным числом термов:

$$T_2 = \begin{cases} \left((h/3) + 1 \right) \cdot 3^{h/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 0; \\ 4 \cdot (\,]h/3[\, + 1) \cdot 3^{(h-4)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 1; \\ 2 \cdot (\,]h/3[\, + 1) \cdot 3^{(h-2)/3}, & \text{если } \mathrm{mod}_3\, h = 2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$T_2 \leqslant (\,]h/3[\, + 1) \cdot 3^{h/3}.$$

Из приведенных соотношений следует, что метод реализации БФ, рассмотренный в предыдущем разделе, имеет более низкие оценки сложности.

Однако, несмотря на это, можно показать, что существуют такие постановки задачи, при которых оба рассмотренных метода позволяют использовать ПЛМ с одинаковой эффективностью.

Пусть выбрана ПЛМ 556 РТ1 с параметрами $v = 16$, $t = 48$, $b = 8$ и требуется определить максимальную величину h, при которой произвольная формула из этого числа букв будет реализована с помощью одной такой ПЛМ.

Другими словами, требуется определить, для какой величины h выбранная ПЛМ является модулем, универсальным в классе формул в базисе И, ИЛИ, НЕ.

При использовании первого метода при $h = 10$ $v_1 = 16$, $t_1 = 13$, $b_1 = 7$; при $h = 11$ $v_1 = 17$, $t_1 = 14$, $b_1 = 7$. Таким образом, в этом случае $h = 10$.

При применении второго метода при $h = 10$ $v_2 = 10$, $t_2 = 36$, $b_2 = 1$; при $h = 11$ $v_2 = 11$, $t_1 = 54$, $b_2 = 1$. Таким образом, и в этом случае $h = 10$.

Следовательно, выбранная ПЛМ является при использовании любого из рассмотренных методов модулем, универсальным в рассматриваемом классе формул из $q = 10$ букв.

Это позволяет оценить [5] число программируемых логических матриц, требующихся для реализации произвольной формулы в рассматриваемом базисе из h ($h > 10$) букв

$$L \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{q}\right[= \left]\frac{h-1}{5}\right[,$$

и для реализации системы из N произвольных формул в рассматриваемом базисе, правые части которых содержат H букв:

$$L \leqslant \left]\frac{2(H-N)}{q}\right[+ N - 1 = \left]\frac{H-N}{5}\right[+ N - 1.$$

Еще один подход к применению ПЛМ в качестве многофункциональных логических модулей состоит в программировании их по порождающим функциям таких модулей [8]. Это позволяет, в частности, использовать однократно программируемые ПЛМ (как, впрочем, и однократно программируемые ПЗУ) в режиме устройств, многократно программируемых с помощью настроечных входов.

Предложенный в настоящем разделе подход базируется на материале, изложенном в [9].

Выводы

1. Предложены два метода вложения произвольных булевых формул в базисе И, ИЛИ из h букв в программируемые логические матрицы и получены соответствующие оценки сложности последних.

2. Показано, что максимальное число термов в дизъюнктивных нормальных формах, получаемых за счет раскрытия скобок в произвольных булевых формулах в базисе И, ИЛИ из h букв, совпадает с числом клик (максимальных полных подграфов) в графах Муна—Мозера, имеющих наибольшие возможные клики для графов с h вершинами.

3. Предложены подходы к применению ПЛМ в качестве многофункциональных логических модулей, универсальных в рассматриваемом классе формул из q букв, что позволяет оценить число программируемых логических матриц, требующихся для реализации произвольных формул этого класса.

Литература

1. *Баранов С. И., Синев В. Н.* Программируемые логические матрицы в цифровых системах // Зарубежная радиоэлектроника. 1979. № 1.

2. *Баранов С. И., Баркалов А. А.* Применение программируемых логических матриц в цифровой технике // Зарубежная радиоэлектроника. 1982. № 6.

3. *Баранов С. И., Скляров В. А.* Цифровые устройства на программируемых БИС с матричной структурой. М.: Радио и связь, 1986.

4. *Ачасова С. М.* Алгоритмы синтеза автоматов на программируемых матрицах. М.: Радио и связь, 1987.

5. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.

6. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.: Мир, 1980.

7. *Moon J., Moser L.* On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965. N 3.

8. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Унифицированные логические схемы. Л.: ИПК СП, 1981.

9. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А., Кузнецова О. С.* Оценка функциональных возможностей программируемых логических матриц // Автоматика и вычисл. техника. 1985. № 2.