

Статья опубликована в журнале “Известия РАН. Теория и системы управления”. 2005. № 5, с.137-145.

УДК 681.3.06:62–507

## КЛАССИФИКАЦИЯ СТРУКТУР, ПОРОЖДАЕМЫХ ОДНОМЕРНЫМИ ДВОИЧНЫМИ КЛЕТОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ ИЗ ТОЧЕЧНОГО ЗАРОДЫША

© 2004 г. Л.А. Наумов, А.А. Шалыто

*Санкт-Петербургский государственный ун-т информационных технологий,  
механики и оптики*  
Поступила в редакцию...

Приведены различные варианты классификации структур, порождаемых одномерными двоичными клеточными автоматами из точечного зародыша. Подсчитано количество классов автоматов при использовании различных операций инвариантности. Показано, что существуют автоматы с клетками без памяти и с памятью, демонстрирующие одинаковое поведение.

**Введение.** В настоящее время изучение клеточных автоматов стало неотъемлемой частью теории искусственного интеллекта [1]. Исследованиям клеточных автоматов посвящено множество работ, например, [2–4]. При этом большой интерес представляет рассмотрение одномерных клеточных автоматов, которые, в частности, порождают самовоспроизводящиеся структуры, такие, как салфетка Серпинского и двоичный треугольник Паскаля. В работах [5, 6] указанные структуры получаются с использованием весьма сложного математического аппарата. Одномерные клеточные автоматы являются простейшим средством для получения таких структур.

При этом под структурой понимается пошаговая последовательность состояний одномерной решетки [7] – набор конфигураций автомата, располагаемых одна под другой.

В работе [4] приведены все 256 возможных структур, порождаемых в результате функционирования одномерного двоичного клеточного автомата, содержащего на нулевом шаге единственный точечный зародыш. Среди этих структур существуют не только одинаковые, но и эквивалентные относительно таких инвариантных операций, как зеркальное отображение, инвертирование, сдвиг на одну клетку и т.д.

Цель настоящей работы – классификация структур, порождаемых одномерными клеточными автоматами из точечного зародыша, относительно вводимых инвариантных операций, а также подсчет числа представителей в различных классификациях.

**1. Задание функции переходов одномерного двоичного клеточного автомата.** Будем рассматривать такие клеточные автоматы, окрестность каждой клетки которого состоит из ее правого и левого соседей, с учетом тороидальных граничных условий. В силу того, что в настоящей работе поведение автомата рассматривается на числе шагов, значительно меньшем ширины решетки, то краевые эффекты не проявляют себя.

Функцию переходов автомата, определяющую изменения каждого состояния клетки, целесообразно задавать таблицей. В ее левой части в лексикографическом порядке перечисляются значения состояний ячеек с номерами  $i-1$ ,  $i$  и  $i+1$  на текущем шаге, а в правой – состояние ячейки с номером  $i$  на следующем шаге.

Эта таблица имеет восемь строк, каждой из которых соответствует одно из двух значений следующего состояния. Таким образом, существует 256 различных функций переходов. Это позволяет создать 256 клеточных автоматов указанного типа для любых начальных условий.

Каждому автомату может быть сопоставлен номер от 0 до 255, определяемый двоичной записью столбца значений в правой части таблицы переходов. Например, для функции  $f(c_{i-1}, c_i, c_{i+1}) = c'_i$  с транспонированной правой частью  $|0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1|^T$  этот номер равен  $0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = 232$ . Приведенная функция называется «два и более из трех» и реализуется булевой формулой

$$c'_i = (c_{i-1} \vee c_i) c_{i+1} \vee c_{i-1} c_i.$$

Функция с номером 90 =  $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7$  реализуется формулой

$$c'_i = c_{i-1} \oplus c_{i+1}.$$

Обратим внимание, что эта функция описывает автомат с клетками без памяти, так как соответствующая ей формула не содержит переменную  $c_i$  в правой части.

Кроме автомата с номером 232, в качестве еще одного примера автомата с клетками с памятью, приведем автомат с номером 18 =  $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7$ . Его функция переходов реализуется формулой

$$c'_i = !c_i (c_{i-1} \oplus c_{i+1}),$$

где ! – операция «инверсия».

Рассмотрим еще одну функцию переходов автомата с клетками с памятью, которая называется «один из трех» и имеет номер 22 =  $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7$ . Она реализуется формулой

$$c'_i = !c_i (c_{i-1} \oplus c_{i+1}) \vee !c_{i-1} c_i !c_{i+1}.$$

Функция «нечетность» имеет номер 150 =  $0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7$  и реализуется формулой

$$c'_i = c_{i-1} \oplus c_i \oplus c_{i+1}.$$

Функция с номером 60 =  $0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7$  реализуется формулой

$$c'_i = c_{i-1} \oplus c_i.$$

Обратим внимание, что эта функция, как и функция с номером 90, не зависит от одной из переменных, однако, описывает автомат с клетками с памятью, так как в этом случае переменная  $c_i$  входит в правую часть формулы.

Функция с номером 165 =  $1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7$  реализуется формулой

$$c'_i = !(c_{i-1} \oplus c_{i+1}).$$

Эта функция инверсна функции с номером 90, что подтверждается равенством  $90 + 165 = 255$ .

**2. Начальные условия.** Структура, порождаемая клеточным автоматом при выбранной функции переходов, определяется его начальным состоянием. В настоящей работе каждый автомат на нулевом шаге содержит единственную клетку в состоянии «1».

**3. Инвариантность относительно операции «равенство».** Одинаковое поведение клеточных автоматов с разными функциями переходов является основанием для их объединения в один класс. При этом используется операция инвариантности, названная «равенство».

Один класс могут образовывать клеточные автоматы, имеющие существенно различные функции переходов. Так тривиальное поведение (зародыш погибает на первом же шаге) демонстрируют автоматы с такими различными функциями, как, например, «тождественный ноль» и «два и более из трех». Всего в этот класс входит 16 функций: {0, 8, 32, 40, 64, 72, 96, 104, 128, 136, 160, 168, 192, 200, 224, 232}. Для каждой из этих функций характерно, что в правой части ее таблицы переходов нули находятся в тех строках, левые части которых не содержат единиц или содержат только одну единицу. Их столбцы значений имеют вид  $|0\ 0\ 0\ ?\ 0\ ?\ ?\ ?|^T$ , где «?» – «0» или «1».

Авторы предполагают, что если два клеточных автомата рассматриваемого типа демонстрируют одинаковое поведение на первых пяти шагах, то они будут демонстрировать его и в дальнейшем.

**3.1. Поведение типа «салфетка Серпинского».** Автомат с номером 90 порождает самовоспроизводящуюся структуру, называемую «салфетка Серпинского». Ниже приведена структура, порожденная этим автоматом, после первых восьми шагов:

```

000000010000000
000000101000000
000001000100000
000010101010000
000100000001000
001010000010100
010001000100010
101010101010101

```

На рис. 1 приведено изображение этой же структуры после 64 шагов.

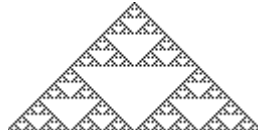
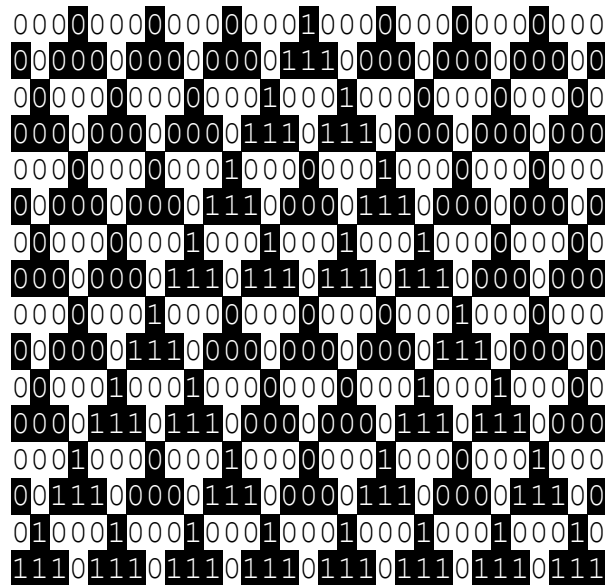


Рис. 1

Автомат с номером 18 порождает точно такую же структуру, как и автомат 90, так как правые части их функций переходов отличаются только в тех строках, левые части которых содержат комбинации с двумя единицами, которые не могут возникнуть при данных начальных условиях. Таким образом, в рассматриваемом случае автомат с клетками без памяти и с памятью имеют одинаковое поведение. При этом отметим, что формула, реализующая функцию переходов с номером 90, видимо, является простейшим математическим описанием «салфетки Серпинского» [5, 6, 8].

Отметим также, что класс «салфеток Серпинского» в целом содержит восемь автоматов с номерами  $\{18, 26, 82, 90, 146, 154, 210, 218\} = C$ .

Обратим внимание, что в этот класс не входит автомат с номером 22. Он один в своем классе и порождает разновидность «салфетки Серпинского», состоящую из нулевых и единичных «пьедесталов». В приводимой ниже структуре смежные пьедесталы выделены разным цветом:



Если нулевые пьедесталы заменить нулем, а единичные – единицей, то получится «салфетка Серпинского», рассмотренная выше.

На рис. 2 приведено изображение порождаемой автоматом с номером 22 структуры после 64 шагов.



Рис. 2

Также уникален автомат с номером 150, порождающий еще одну самоподобную структуру:

```

000000010000000
000000111000000
000001010100000
000011010110000
000100010001000
001110111011100
010100010001010
110110111011011

```

На рис. 3 приведено изображение этой же структуры после 64 шагов.



Рис. 3

**3.2. Поведение типа «двоичный треугольник Паскаля».** Существуют различные способы построения треугольника Паскаля [6, 9–11]. Ниже предлагается еще один способ, связанный с вычислением симметрических булевых функций [12, 13]. Он состоит в следующем:

- строится симметрический многополюсник Шеннона [12];
- он преобразуется в симметрическую схему алгоритма [13];
- по построенной схеме, используя «закон Кирхгофа», подсчитывается число путей, каждый из которых является соответствующим компонентом треугольника Паскаля.

На рис. 4 в качестве примера приведена симметрическая схема алгоритма для пяти переменных, а на рис. 5 – структура, моделирующая первые пять строк треугольника Паскаля.

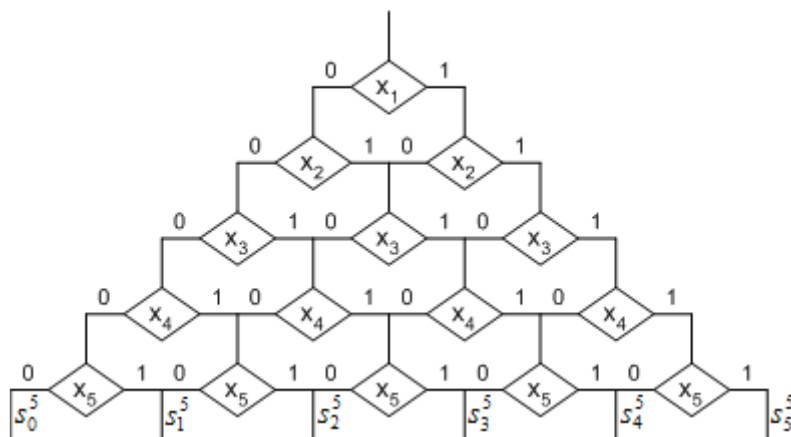


Рис. 4

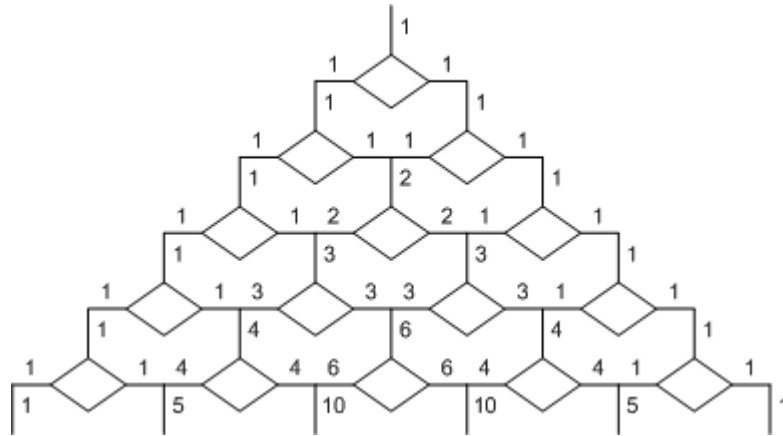
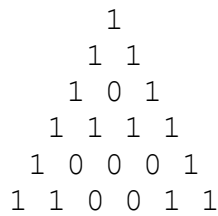
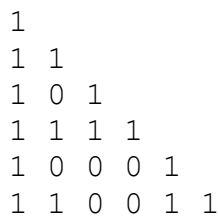


Рис. 5

По треугольнику Паскаля может быть построен двоичный треугольник Паскаля:



Деформируем этот треугольник так, как показано ниже:



Автомат с номером 60 порождает деформированный двоичный треугольник Паскаля (рис. 6), который один в своем классе.

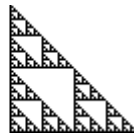


Рис. 6

**3.3. Моделирование чисел Фибоначчи.** Известно [10], что леводиAGONАЛЬНЫЕ срезы треугольника Паскаля позволяют получить числа Фибоначчи.

Приведем оригинальный метод моделирования чисел Фибоначчи, связанный с вычислением знакопередающих бесповторных пороговых формул. Этот метод, описанный в [13], состоит в следующем:

- по заданной формуле строится линейный бинарный граф;

- используя «закон Кирхгофа», подсчитывается число путей от начальной вершины до конечных.

При этом числа, указанные у каждой из условных вершин графа, соответствуют числам Фибоначчи. Число «единичных» и «нулевых» путей, как, впрочем, и общее их количество, также являются числами Фибоначчи.

Выполним моделирование чисел Фибоначчи посредством вычисления формулы

$$f = ((x_1 x_2 \vee x_3) x_4 \vee x_5) x_6 \vee x_7.$$

Рис. 7 и 8 иллюстрируют это вычисление.

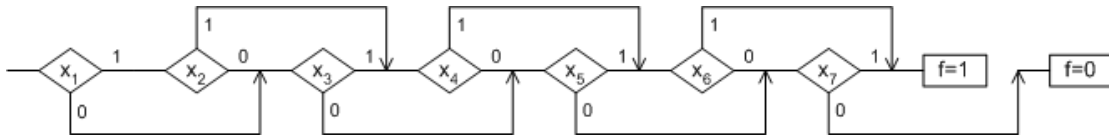


Рис. 7

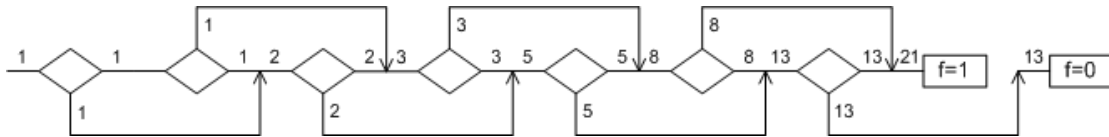


Рис. 8

В завершение разд. 3 отметим, что число классов инвариантности относительно операции «равенство» – 143. Это и все последующие числа, характеризующие различные варианты классификации, вычислены с помощью программы, упомянутой в разд. 10.

Отметим, что 115 из указанных выше классов содержат по одному представителю, а оставшиеся 28 классов (приложение 1) – по два и более.

По аналогии с классификацией булевых функций [13], например, PN-классификацией (от английских слов «Permutation» – «перестановка» и «Negation» – «отрицание»), назовем проведенное выше объединение в классы E-классификацией (от «Equality» – «равенство»).

**4. Инвариантность относительно операций «равенство» и «инверсия».** Приведем в качестве примера структуру, инверсную структуре, порождаемой автоматом с номером 90. Она генерируется автоматом с номером 165 (рис. 9).



Рис. 9

Отметим, что в настоящей работе инверсность рассматривается с точностью до нулевого шага.

Указанная взаимосвязь «прямых» и «инверсных» структур может являться основанием для их объединения в один класс относительно операции инвариантности «инверсия». Однако, проведение классификации относительно только операций инвариантности «инверсия» нецелесообразно. Это связано с тем, что, во-первых, в каждом классе не могло бы содержаться больше двух экземпляров, а, во-вторых, многие экземпляры принадлежали бы более чем одному классу. Поэтому общее число классов могло бы существенно возрасти.

В связи с изложенным предлагается в один класс объединять структуры, инвариантные относительно двух операций: «равенство» и «инверсия».

При использовании этих операций в один класс будут входить, например, девять автоматов с номерами  $C \cup \{165\} = \{18, 26, 82, 90, 146, 154, 165, 210, 218\}$ .

Обратим внимание, что в рассмотренном в настоящем разделе примере инверсны не только поведения автоматов, но и их функции, что подтверждается тем, что сумма их номеров ( $90 + 165$ ) равна 255.

При этом отметим, что инверсии функций 18, 26, 82, 146, 154, 210 и 218 не порождают инверсных структур для класса  $C$ . В частности, функция 37 (инверсия функции 218) порождает малоинтересное поведение (рис. 10).

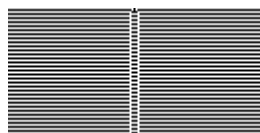


Рис. 10

В завершение раздела отметим, что число классов инвариантности относительно операций «равенство» и «инверсия» – 135. Назовем эту классификацию EI-классификацией (от «Equality» и «Inverse» – «инверсия»).

**5. Инвариантность относительно операций «равенство» и «зеркальное отображение».** Приведем в качестве примера структуру, зеркальную (относительно вертикальной оси) к структуре, порождаемой автоматом с номером 60. Эта структура порождается автоматом с номером 102 (рис. 11).

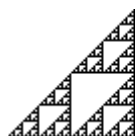


Рис. 11

Число классов инвариантности относительно операций «равенство» и «зеркальное отображение» – 89.

Назовем эту классификацию EM-классификацией (от «Equality» и «Mirror» – «зеркало»).

В качестве примера приведем EM-класс с максимальным числом представителей:  $\{2, 10, 16, 24, 34, 42, 48, 56, 66, 74, 80, 88, 98, 106, 112, 120, 130, 138, 144, 152, 162, 170, 176, 184, 194, 202, 208, 216, 226, 234, 240, 248\}$ . В нем 32 элемента, так как этот класс является объединением двух E-классов:



- {2, 10, 34, 42, 66, 74, 98, 106, 130, 138, 162, 170, 194, 202, 226, 234} – «левая диагональ», для которой столбцы значений таблиц переходов имеют вид  $|0\ 1\ 0\ ?\ 0\ ?\ ?\ ?|^T$ ;
- {16, 24, 48, 56, 80, 88, 112, 120, 144, 152, 176, 184, 208, 216, 240, 248} – «правая диагональ», для которой столбцы значений таблиц переходов имеют вид  $|0\ 0\ 0\ ?\ 1\ ?\ ?\ ?|^T$ .

**6. Инвариантность относительно операций «равенство», «инверсия» и «зеркальное отображение».** Приведем в качестве примера четыре структуры с номерами {60, 102, 153, 195}, принадлежащие одному классу относительно рассматриваемого набора операций (рис. 12).

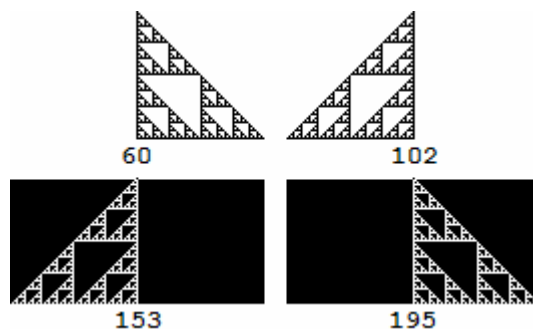


Рис. 12

Этот рисунок показывает, что структуры 60 и 102 зеркальны, также как и структуры 153 и 195. При этом структуры 60 и 195 инверсны, как и структуры 102 и 153.

Число классов инвариантности относительно операций «равенство», «инверсия» и «зеркальное отображение» – 83.

Назовем эту классификацию EIM-классификацией (от «Equality», «Inverse» и «Mirror»). Эта классификация содержит наименьшее число представителей из рассмотренных.

**7. Инвариантность относительно операций «равенство» и «инверсно-зеркальное отображение».** Приведем в качестве примера те же четыре структуры с номерами {60, 102, 153, 195}. При классификации относительно указанного выше набора операций один класс образует пара автоматов {60, 153}, а другой – пара {102, 195}.

Назовем эту классификацию E(I+M)-классификацией (от «Equality», «Inverse» и «Mirror»).

Число классов инвариантности относительно операций «равенство и «инверсно-зеркальное отображение» – 135, что совпадает с количеством EI-классов. В действительности, эти две классификации порождают похожие классы. При этом только 40 структур классифицируются по-разному. Они попадают в разные четыре класса при EI- и E(I+M)-классификациях. Различия между этими четырьмя классами показаны в табл. 1.

Таблица 1. Различия между EI- и E(I+M)-классификациями

<b>EI-классификация</b>	<b>E(I+M)-классификация</b>
2, 10, 34, 42, 66, 74, 98, 106, 130, 138, 162, 170, 173, 189, 194, 202, 226, 234	2, 10, 34, 42, 66, 74, 98, 106, 130, 138, 162, 170, 194, 202, 226, 229, 231, 234
16, 24, 48, 56, 80, 88, 112, 120, 144, 152, 176, 184, 208, 216, 229, 231, 240, 248	16, 24, 48, 56, 80, 88, 112, 120, 144, 152, 173, 176, 184, 189, 208, 216, 240, 248
60, 195	60, 153
102, 153	102, 195

В завершение раздела отметим, что все рассмотренные выше операции инвариантности могут быть отнесены к операциям с прямым наложением (без сдвигов). В столбце «L0» табл. 2 приведены количества классов для рассмотренных вариантов классификаций.

Таблица 2. Число классов при разных вариантах классификации без сдвигов

	<b>L0</b>	<b>L1</b>	<b>L2</b>	<b>L3</b>	<b>L4</b>	<b>L5</b>	<b>L6</b>
<b>E</b>	143	134	129	128	128	128	127
<b>EM</b>	89	83	81	80	80	80	79
<b>EI</b>	135	124	120	119	119	119	118
<b>E(I+M)</b>	135	124	120	119	119	119	118
<b>EIM</b>	83	76	74	73	73	73	72

**8. Классификации с учетом сдвигов на одну клетку.** Введем новые операции инвариантности: «равенство со сдвигом», «инверсия со сдвигом», «зеркальное отображение со сдвигом» и «инверсно-зеркальное отображение со сдвигом». При выполнении этих операций взаимное соответствие двух структур проверяется не только прямым наложением, но и наложением со сдвигами на одну клетку по вертикали, горизонтали и диагоналям. При этом эквивалентными считаются структуры, которые соответствуют друг другу непосредственно или с учетом любого из этих смещений.

Классификации относительно операций со сдвигами будем называть так же, как классификации без сдвигов, но с добавлением суффикса «O» (от «Offset» – «сдвиг»).

В качестве примера приведем структуры 20 и 155 (рис. 13), эквивалентные друг другу относительно операции «инверсно-зеркальное отображение со сдвигом». Отметим, что, в отличие от рисунков, приведенных выше, структуры на рис. 13 приведены с увеличением.



Рис. 13

Структура 155 получается из структуры 20 посредством зеркального отображения, инвертирования и сдвига на одну клетку вниз.

Рассматривать операции инвариантности со сдвигами больше, чем на одну клетку, нет смысла, так как цель настоящей работы состоит в объединении в классы автоматов со сходным поведением. При этом зародыш может за один шаг повлиять лишь на клетки, получаемые из него самого сдвигом на одну клетку и не более того.

Классификации со сдвигом позволяют уменьшить число полученных классов, по сравнению с классификациями без сдвигов.

Так, например, если EIM-классификация выделяет 83 класса, то EIMO-классификация сокращает их количество до 56 классов (приложение 2).

Количество классов, получаемых при использовании инвариантных операций со сдвигами, приведено в табл. 3 в столбце «OL0».

Таблица 3. Число классов при разных вариантах классификации со сдвигами

	OL0	OL1	OL2	OL3	OL4	OL5	OL6
<b>E</b>	125	118	118	117	117	117	117
<b>EM</b>	78	75	75	74	74	74	74
<b>EI</b>	88	86	86	85	85	85	85
<b>E(I+M)</b>	88	85	85	84	84	84	84
<b>EIM</b>	56	55	55	54	54	54	54

**9. Классификации с учетом погрешностей.** Соответствие между структурами относительно операций инвариантности имеет смысл проверять не только строго, но и допуская небольшое число несоответствий, так как отличия в нескольких клетках не является основанием для того, чтобы не считать порождаемые структуры родственными.

В качестве примера приведем структуры 233 и 235 (рис. 14), отличающиеся лишь пятью клетками.



Рис. 14

Классификации относительно операций с учетом погрешностей будем называть так же, как классификации без них, но с добавлением суффикса «Ln» (от «Lapse» – «небольшая ошибка»), где  $n$  – наибольшее допустимое количество несовпадений.


В табл. 2 и 3 в столбцах «L0» – «L6» и «OL0» – «OL6», соответственно, приводится количество классов для различных классификаций с числом несовпадений от нуля до шести.

Обратим внимание, что, если сдвиги не использовать, то значения в строках «EI» и «E(I+M)» табл. 2 совпадают в каждом столбце, в то время как в табл. 3 они различны, причем значение из первой строки не меньше значения из второй.

**10. Дополнительные материалы.** На сайтах <http://is.ifmo.ru> в разделе «Статьи» и <http://camel.ifmo.ru> размещены следующие материалы:

- программа для моделирования и изучения автоматов рассматриваемого типа;
- программа для анализа и классификации порождаемых структур;
- 256 изображений порождаемых структур (в формате Portable Network Graphic);
- 256 изображений порождаемых структур при четырехкратном увеличении (в формате Portable Network Graphic);
- 256 текстовых представлений порождаемых структур;
- 70 вариантов классификации порождаемых структур;
- порождаемые структуры и некоторые классификации в табличной форме.

**Заключение.** В настоящей работе впервые проведены различные варианты классификации структур, порождаемых одномерными клеточными автоматами из точечного зародыша. Показано, что существуют автоматы с клетками без памяти и с памятью, демонстрирующие одинаковое поведение.

Как отмечалось выше, исследование этого класса структур было автоматизировано. В настоящее время авторами разрабатывается среда  **CAMEL** (Cellular Automata Modeling Environment & Library – среда моделирования и библиотека разработчика клеточных автоматов), которая предоставит развитый инструментарий для решения исследовательских задач с помощью клеточных автоматов [14, 15]. В среде предусмотрена поддержка распределенных и параллельных вычислений на кластерной платформе. Для вычислений такого рода был разработан специализированный сетевой протокол CTP (Commands Transfer Protocol) [16, 17].

Ознакомиться и скачать программное обеспечение CAME&L можно с сайта <http://camel.ifmo.ru>.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по гранту № 05-07-90086 «Разработка среды и библиотеки "CAMEL" для организации параллельных и распределённых вычислений на основе клеточных автоматов» и корпорации Borland.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Люгер Дж.* Искусственный интеллект. М.: Вильямс, 2003.
2. *фон Нейман Дж.* Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971.
3. *Тоффоли Т., Марголюс Н.* Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
4. *Wolfram S.* A New Kind of Science. IL: Wolfram Media, 2002.
5. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. М.: Триумф, 2003.
6. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
7. *Naumov L.* Generalized Coordinates for Cellular Automata Grids // Computational Science – ICCS 2003. Part 2. Springer–Verlag. 2003.
8. *Вирт Н.* Алгоритмы и структуры данных. СПб.: Невский диалект, 2001.
9. *Гарднер М.* Математические новеллы. М.: Мир, 1974.
10. *Богатырев Р.* Золотой треугольник // Мир ПК. 2001. № 6.
11. *Скляревский Е.* Удивительный треугольник великого француза // Hard'n'Soft. 2003. №10.

12. Шеннон К. Э. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. литер., 1963.
13. Шалыто А. А. Логическое управление. Методы аппаратной и программной реализации алгоритмов. СПб.: Наука, 2000.
14. Naumov L. CAME&L – Cellular Automata Modeling Environment & Library // Cellular Automata (Proceedings of Sixth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry). Springer–Verlag. 2004.
15. Наумов Л. CAME&L – Среда моделирования и библиотека разработчика клеточных автоматов // Труды XI Всероссийской научно-методической конференции «Телематика'2004». Том 1. СПб.: СПбГУ ИТМО. 2004.
16. Наумов Л. СТР (Commands Transfer Protocol) – Сетевой протокол для высокопроизводительных вычислений // Труды XI Всероссийской научно-методической конференции «Телематика'2004». Том 1. СПб.: СПбГУ ИТМО. 2004.
17. Naumov L. Commands Transfer Protocol (СТР) – New Networking Protocol for Parallel or Distributed Computations // <http://www.codeproject.com/internet/ctp.asp>. 2004.

**Приложение 1.** Классы эквивалентности относительно операции «равенство» (E-классы), содержащие более одного элемента

1. 0 8 32 40 64 72 96 104 128 136 160 168 192 200 224 232
2. 1 33
3. 2 10 34 42 66 74 98 106 130 138 162 170 194 202 226 234
4. 3 35
5. 4 12 36 44 68 76 100 108 132 140 164 172 196 204 228 236
6. 6 38 134 166
7. 7 19 21 23 31 55 63 87 95 119 127
8. 11 43 47
9. 14 46 142 174
10. 16 24 48 56 80 88 112 120 144 152 176 184 208 216 240 248
11. 17 49
12. 18 26 82 90 146 154 210 218
13. 20 52 148 180
14. 28 156
15. 50 58 114 122 178 186 242 250
16. 70 198
17. 81 113 117
18. 84 116 212 244
19. 129 161
20. 139 171
21. 151 159 183 191 215 223 233 235 237 239 247 249 251 253 255
22. 173 189
23. 203 217 219
24. 206 238
25. 209 241
26. 220 252
27. 222 254
28. 229 231

**Приложение 2.** Классы эквивалентности относительно операций «равенство», «инверсия» и «зеркальное отображение» с учетом сдвигов на одну клетку (ЕМО-классы)

1. 0 8 32 40 64 72 96 104 128 136 151 159 160 168 183 191 192 200 215 223 224  
232 235 237 239 247 249 251 253 255
2. 1 33 123
3. 2 10 16 24 34 42 48 56 66 74 80 88 98 106 112 120 130 138 144 152 162 170 173  
175 176 184 187 189 194 202 208 216 226 229 231 234 240 243 245 248
4. 3 17 35 49 59 115
5. 4 12 36 44 68 76 100 108 132 140 164 172 196 203 204 207 217 219 221 228 236
6. 5
7. 6 20 38 52 134 148 155 166 180 211
8. 7 19 21 23 31 55 63 87 95 119 127
9. 9 65 111 125
10. 11 43 47 81 113 117
11. 13 69 79 93
12. 14 46 84 116 139 142 143 171 174 209 212 213 241 244
13. 15 85
14. 18 26 82 90 146 154 165 167 181 210 218
15. 22
16. 25 61 67 103
17. 27 39 53 83
18. 28 70 156 157 198 199
19. 29 71
20. 30 86 135 149
21. 37 91
22. 41 97
23. 45 101
24. 50 58 114 122 178 179 186 242 250
25. 51
26. 54 147
27. 57 99
28. 60 102 153 195
29. 62 118
30. 73
31. 75 89
32. 77
33. 78 92
34. 94
35. 105
36. 107 121
37. 109
38. 110 124
39. 126 129 161
40. 131 145
41. 133
42. 137 193
43. 141 197
44. 150

45. 158 214  
46. 163 177  
47. 169 225  
48. 182  
49. 185 227  
50. 188 230  
51. 190 246  
52. 201  
53. 205  
54. 206 220 238 252  
55. 222 254  
56. 233