

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему

Классификация поведения одномерных клеточных автоматов

Автор магистерской диссертации Скаков П.С.

Научный руководитель Шальто А.А.

Санкт-Петербург

2007

Оглавление

Введение	5
Глоссарий	6
Условные обозначения.....	7
1. Постановка задачи	8
2. Принципы классификации.....	9
3. Эквивалентные клеточные автоматы	11
4. Классы поведения.....	14
4.1. Класс I.....	14
4.2. Класс II.....	19
4.3. Класс III	21
4.4. Класс IV	25
4.5. Класс V	29
4.6. Класс VI.....	38
4.7 Выводы	40
5. Анализ поведения классов.....	41
5.1. Поведение класса I	41
5.2. Поведение класса II	43
5.3. Поведение класса III.....	43
5.4. Поведение класса IV	45
5.5. Поведение класса V	46
5.6. Поведение класса VI	48
5.7. Начальные условия специального вида	49
5.8. Выводы	52
6. Достоинства и недостатки построенной классификации	53

7. Сравнение построенной классификации с другими	54
7.1. Классификация С. Вольфрама.....	54
7.2. Классификация Д. Эпштейна	56
7.3. Вероятностный метод классификации клеточных автоматов	58
7.4. Классификация А. Вюнше.....	59
7.5. Классификация на основе порождаемых структур	60
7.6. Выводы	61
Выводы по работе.....	62
Приложение. Группы эквивалентных клеточных автоматов.....	64
Список литературы.....	68

Введение

Клеточный автомат – это математический объект с дискретным пространством и временем. Пространство представляет собой поле, состоящее из набора клеток, образующих некоторую периодическую решетку. Время – последовательность шагов или поколений. Состояние каждой клетки определяется как функция от состояний клеток в некоторой её окрестности на предыдущем шаге. Эта функция одинакова для всех клеток поля. Таким образом, клеточный автомат представляет собой систему, поведение которой полностью определяется текущим состоянием поля и локальными взаимодействиями. Такая структура весьма удобна для моделирования различных физических, биологических и информационных процессов, особенно если среду нельзя рассматривать как непрерывную. Применение клеточных автоматов позволяет получить сложное поведение без использования сложного и громоздкого математического описания.

Глоссарий

Клеточный автомат — набор клеток, образующих некоторую периодическую решетку с заданными правилами перехода, определяющими состояние клетки в следующий момент времени через состояние клеток, находящимися от нее на расстоянии не больше некоторого, в текущий момент времени.

Скорость распространения информации об изменении – отношение разности размеров областей изменений в случайном начальном состоянии и в состоянии через N шагов к количеству шагов N .

Универсальный клеточный автомат – клеточный автомат, способный моделировать поведение любого другого клеточного автомата. По вычислительным возможностям эквивалентен машине Тьюринга.

Устойчивое и неустойчивое состояния – состояния, обладающие и не обладающие свойством подавления изменений и сохранения себя при изменении конечного числа клеток поля.

Условные обозначения

<число> – идентификатор клеточного автомата: десятичное представление транспонированного столбца значений таблицы его переходов, которая записана в порядке убывания двоичных значений комбинации входных воздействий. Например, <254> – идентификатор клеточного автомата, графически заданного на рис. У.1.



Рис.У.1. Клеточный автомат <254>

Верхняя строка здесь соответствует исходным состояниям клетки и её соседей, нижняя – новым состояниям, 254 – десятичное представление двоичного числа 11111110. Таблица переходов этого клеточного автомата представлена на таблице 1.

Таблица 1. Таблица переходов клеточного автомата <254>

S_{i-1}	S_i	S_{i+1}	S_i'
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

{ } – периодическое повторение. Например, {01} соответствует ...01010101...

1. Постановка задачи

Для клеточных автоматов отсутствует общепринятая классификация более подробная, чем: размерность, количество состояний клетки, радиус взаимодействия.

В данной работе строится классификация одномерных двоичных клеточных автоматов на основе исследования их поведения при различных начальных состояниях, и анализа возможностей по сохранению, распространению и обработке (взаимодействию) информации.

Для построения классификации были выдвинуты следующие требования:

- 1) Классификация должна покрывать все возможные клеточные автоматы выбранной области.
- 2) Классы должны отражать существенные свойства клеточных автоматов.
- 3) Необходимо, чтобы вопрос, к какому классу принадлежит конкретный клеточный автомат, можно было решить за небольшое время.

2. Принципы классификации

В данной работе в качестве основы используется подход, предложенный С. Вольфрамом [3]: выделять классы на основе возможной сложности поведения клеточного автомата. Положительной чертой этого подхода является осмысленность получаемых групп: они характеризуют возможности по распространению и обработке информации клеточными автоматами. Отрицательной чертой является исключительная сложность определения класса для большинства клеточных автоматов.

Для решения проблемы определения класса упростим критерий классификации “возможная сложность поведения клеточного автомата” до “возможная сложность поведения клеточного автомата при случайном начальном состоянии”. Это позволит определить класс поведения для всех клеточных автоматов.

Кроме того, в данной работе классы поведения, содержащие много клеточных автоматов, разбиваются на подклассы в соответствии с характерными структурами, порождаемыми несколькими клеточными автоматами в классе.

Для генерации случайного начального состояния используется генератор псевдослучайных чисел *Вихрь Мерсенна MT 19937*, который обладает хорошими статистическими свойствами (доказан период

повторения $2^{19937} - 1$, статистически случаен во всех выходных битах и проходит тесты *DIEHARD*).

Сложность поведения анализируется на основе различий в поведении при близких начальных условиях, используются несколько соотношений количества чёрных и белых точек в начальном состоянии. Это позволяет отделить сложность поведения клеточного автомата от сложности начального состояния.

В качестве количественной оценки сложности взаимодействия информации поля клеточного автомата предлагается использовать *среднюю скорость распространения информации об изменении* – среднюю разность размеров областей изменений в случайном начальном состоянии и в состоянии через N шагов, разделённая на количество шагов N . Приведённые в данной работе численные значения вычислены на основе анализа 10000 различных начальных состояний, 500 шагов и трех точек изменений в области начального состояния, размером не более 12 точек, причём не учитывались случаи, в которых изменения начального состояния не отражались на конечном состоянии.

3. Эквивалентные клеточные автоматы

Не все из 256 возможных одномерных двоичных клеточных автоматов проявляют принципиально различное поведение. Например, поведение клеточного автомата <18> полностью совпадает с поведением <183> с точностью до инверсии цвета клеток (рис. 3.1, 3.2).

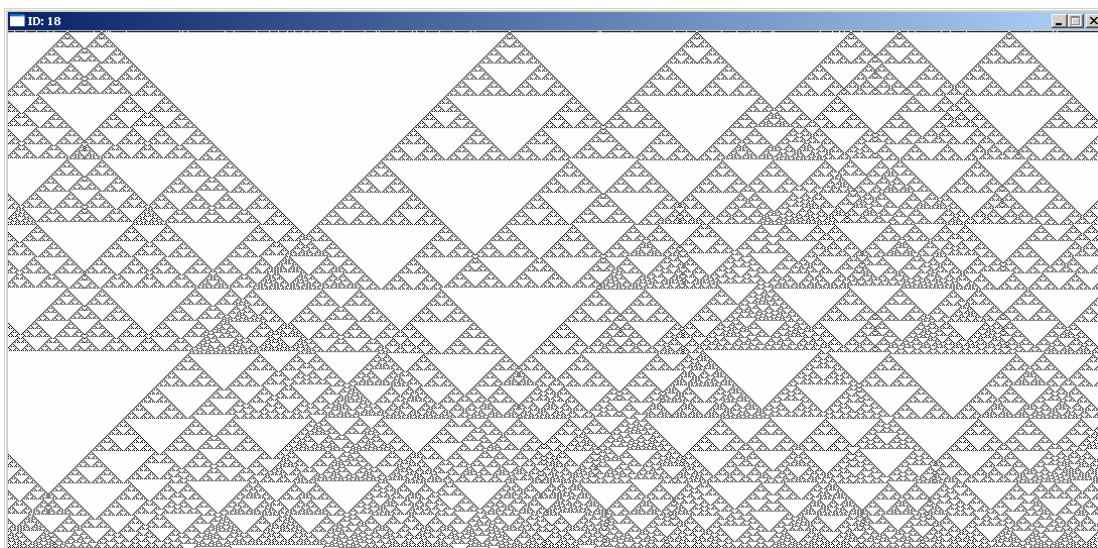


Рис.3.1. Клеточный автомат <18>

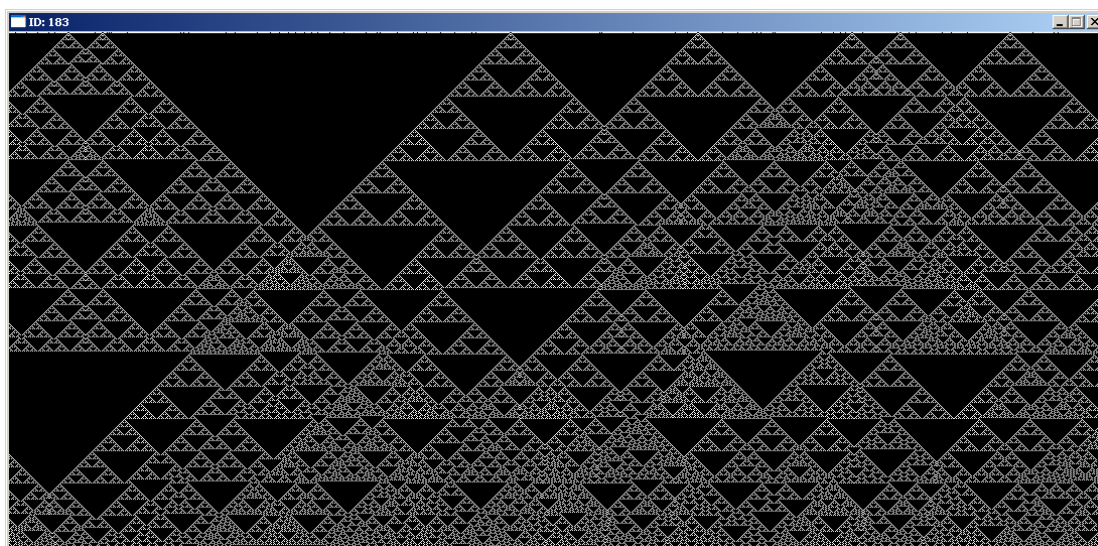


Рис.3.2. Клеточный автомат <183>

Поведение клеточного автомата $\langle 110 \rangle$ полностью совпадает с $\langle 124 \rangle$ после зеркального отображения относительно вертикальной оси (рис. 3.3, 3.4).

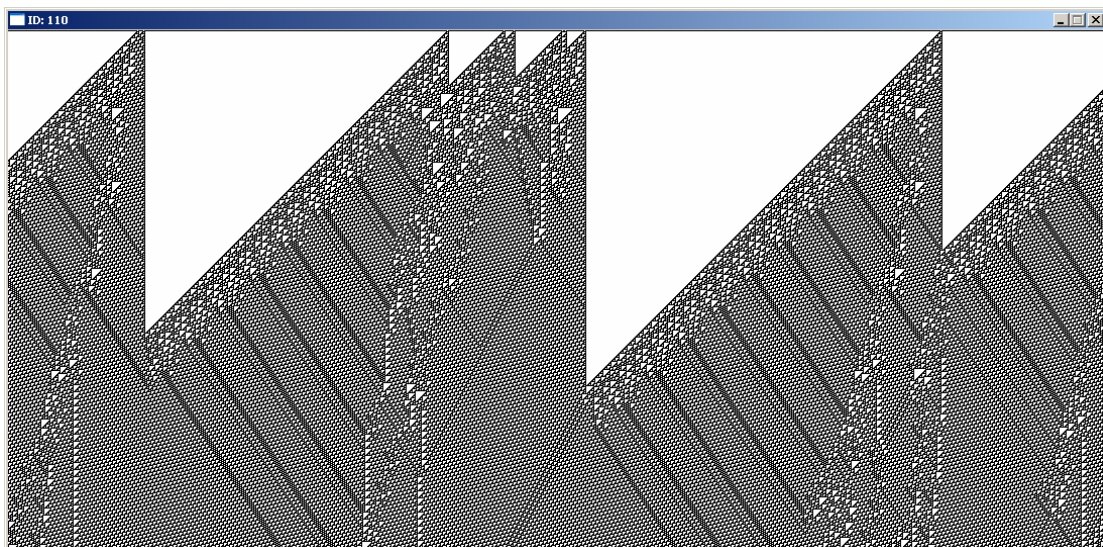


Рис.3.3. Клеточный автомат $\langle 110 \rangle$

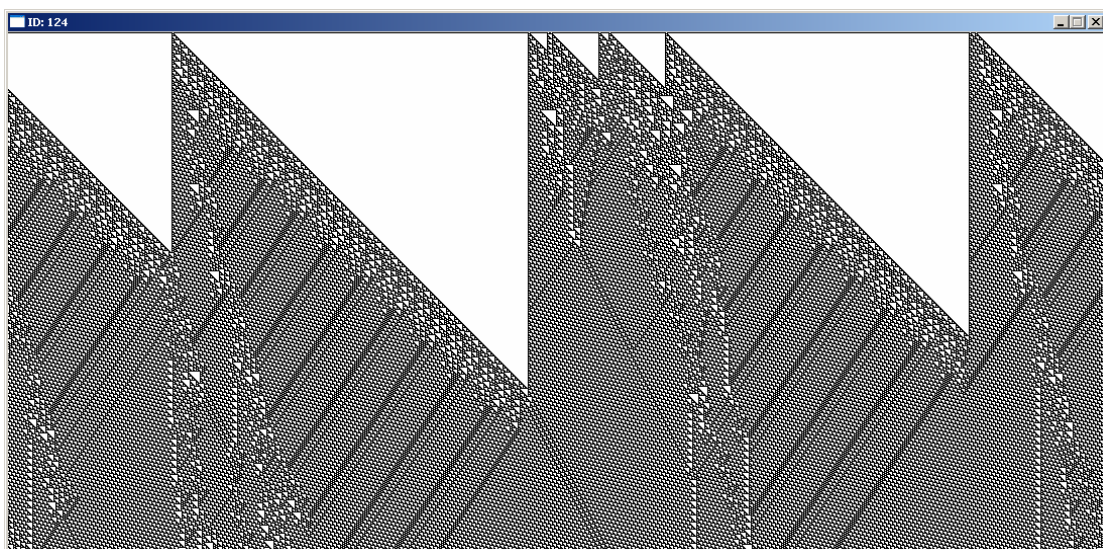


Рис.3.4. Клеточный автомат $\langle 124 \rangle$

Таким образом, целесообразно разделить 256 исходных клеточных автоматов на группы эквивалентности, и в дальнейшем анализировать поведение только одного представителя из каждой группы. (В данной работе

всегда будет использоваться клеточный автомат с наименьшим значением идентификатора в группе.)

При введенном способе обозначения идентификаторы эквивалентных клеточных автоматов получаются при выполнении следующих действий:

- 1) Относительно замены чёрного и белого: нужно изменить порядок восьми бит двоичного представления идентификатора исходного автомата, а затем инвертировать их.
- 2) Относительно зеркального отображения: поменять местами биты 1 и 4 а также 3 и 6 двоичного представления идентификатора исходного автомата.
- 3) Относительно замены чёрного и белого, а также зеркального отображения: последовательно выполнить преобразования из пунктов 1 и 2.

Необходимо отметить, что не все клеточные автоматы имеют три или даже один эквивалентный им относительно рассмотренных критериев. Например, уникально поведение клеточного автомата <178>. Это является следствием того, что он эквивалентен самому себе при всех данных преобразованиях.

Получается 88 групп эквивалентности, которые приведены в приложении.

4. Классы поведения

4.1. Класс I

Система переходит в одно из конечного набора возможных состояний.

К данному классу относятся системы, которым характерно лишь конечное число состояний, в которые система переходит при эволюции из произвольного начального состояния, причём этот набор не зависит от размеров поля.

Клеточный автомат <0> – одно состояние: {0} (рис. 4.1.1).

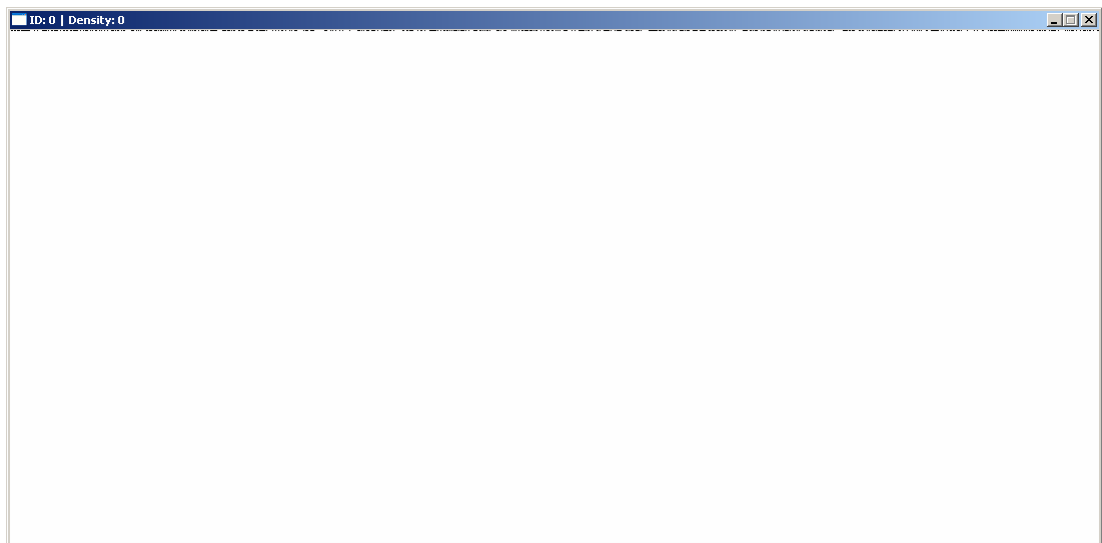


Рис.4.1.1. Клеточный автомат <0>

В таблице переходов отсутствуют переходы в состояние 1, поэтому система после первого шага переходит в единственно возможное состояние {0}.

Клеточный автомат <8> – одно состояние: {0} (рис. 4.1.2).

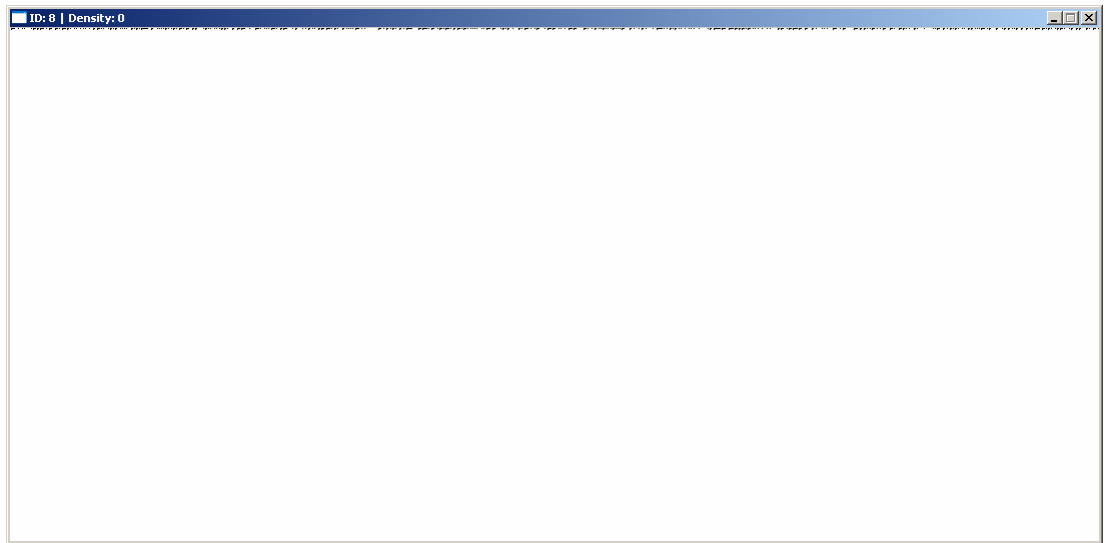


Рис.4.1.2. Клеточный автомат <8>

Таблица переходов имеет только один переход в состояние 1: $011 \rightarrow 1$. После первого шага возможно получение нескольких клеток в состоянии 1, но расстояние между ними будет не меньше двух клеток. На втором шаге переход $011 \rightarrow 1$ невозможен, и система окажется в состоянии {0}.

Клеточный автомат <32> – два состояния:

- 1) {0} – устойчивое.
- 2) {01} – неустойчивое (рис. 4.1.3).

Таблица переходов имеет один переход в состояние 1: $101 \rightarrow 1$. Таким образом, система способна неограниченно долго поддерживать состояние {01}, но при любом изменении переходит в состояние {0}.

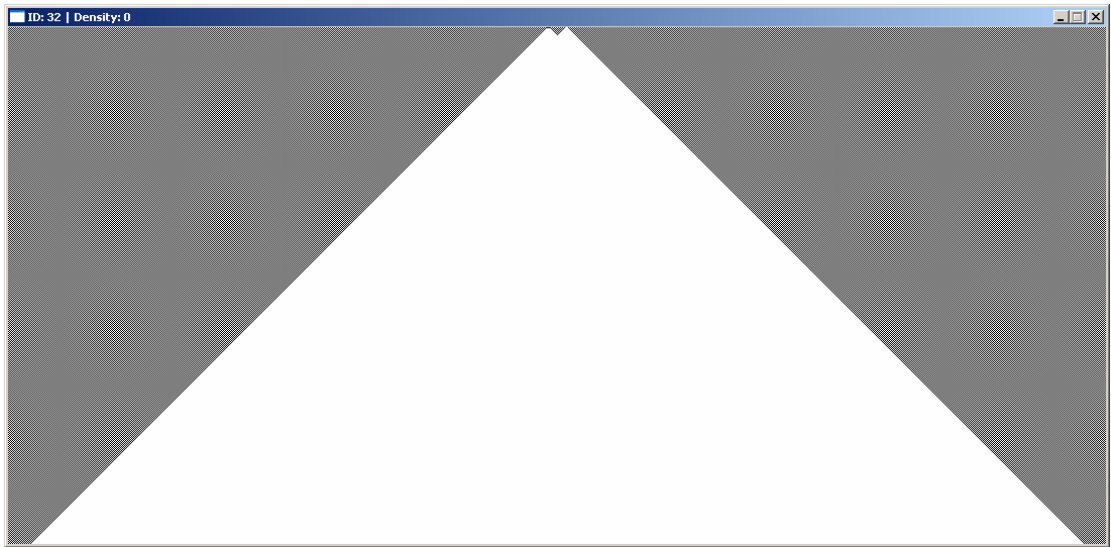


Рис.4.1.3. Клеточный автомат <32>

Клеточный автомат <128> – два состояния:

- 1) {0} – устойчивое.
- 2) {1} – неустойчивое (рис. 4.1.4).

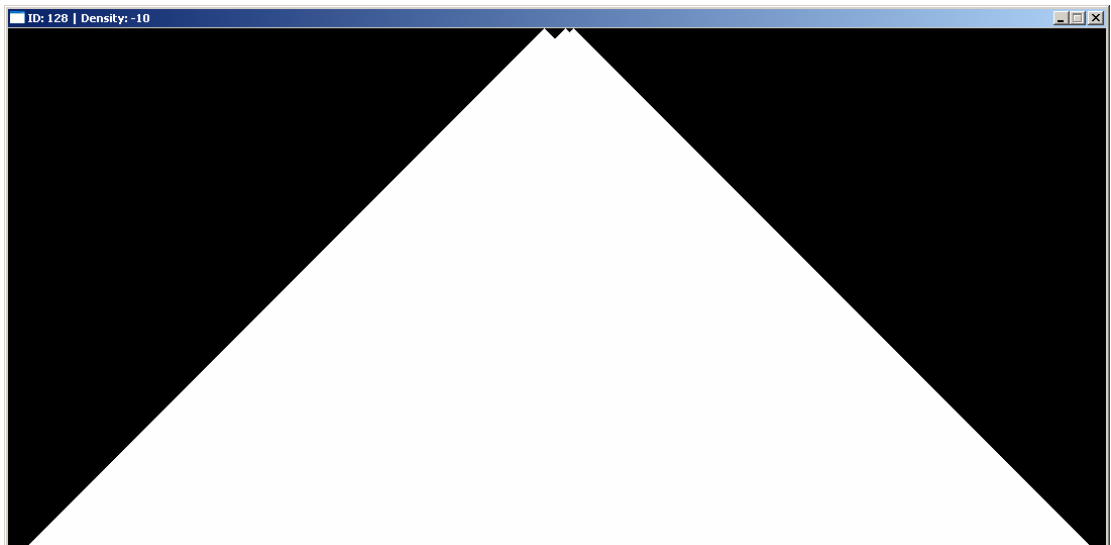


Рис.4.1.4. Клеточный автомат <128>

Таблица переходов имеет один переход в состояние 1: $111 \rightarrow 1$. Система способна неограниченно долго поддерживать состояние {1}, но при любом изменении переходит в состояние {0}.

Клеточный автомат <136> – три состояния:

- 1) $\{0\}$ – устойчивое.
- 2) $\{1\}$ – неустойчивое, переходит в состояние 3.
- 3) $\{0\}\{1\}$ – устойчивое как класс состояний, неустойчивое как конкретное состояние (рис. 4.1.5).

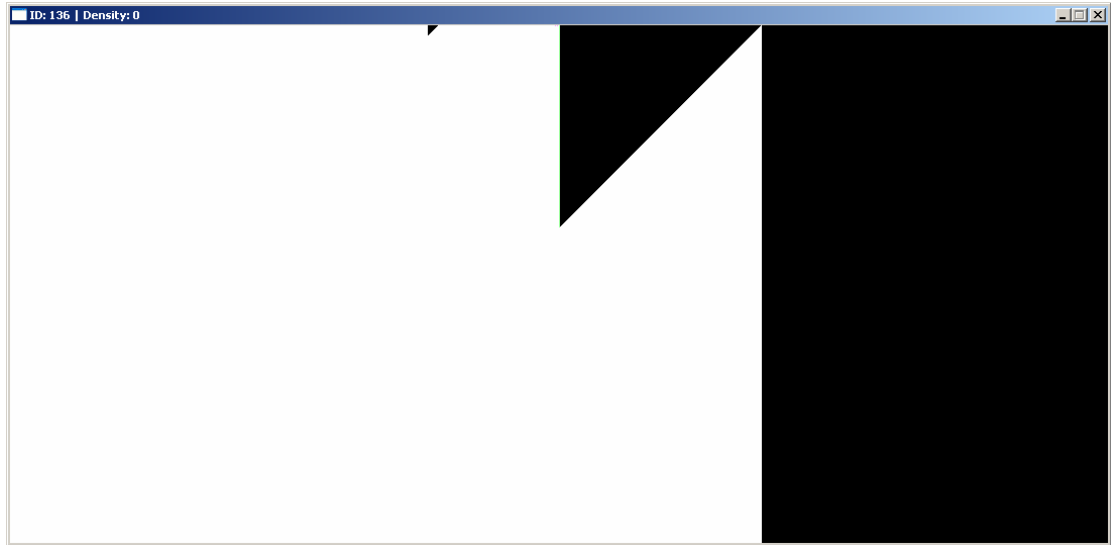


Рис.4.1.5. Клеточный автомат <136>

Изменения внутри области $\{0\}$ подавляются клеточным автоматом, а изменения в области $\{1\}$ приводят к распространению 0 неограниченно влево, что вызывает переход в другое стабильное состояние из класса $\{0\}\{1\}$.

Клеточный автомат <160> – три состояния:

- 1) $\{0\}$ – устойчивое.
- 2) $\{1\}$ – неустойчивое, переходит в 3 или 1.
- 3) $\{01\}$ – устойчивое при изменениях $0 \rightarrow 1$; неустойчивое при других, переходит в 1 (рис. 4.1.6).

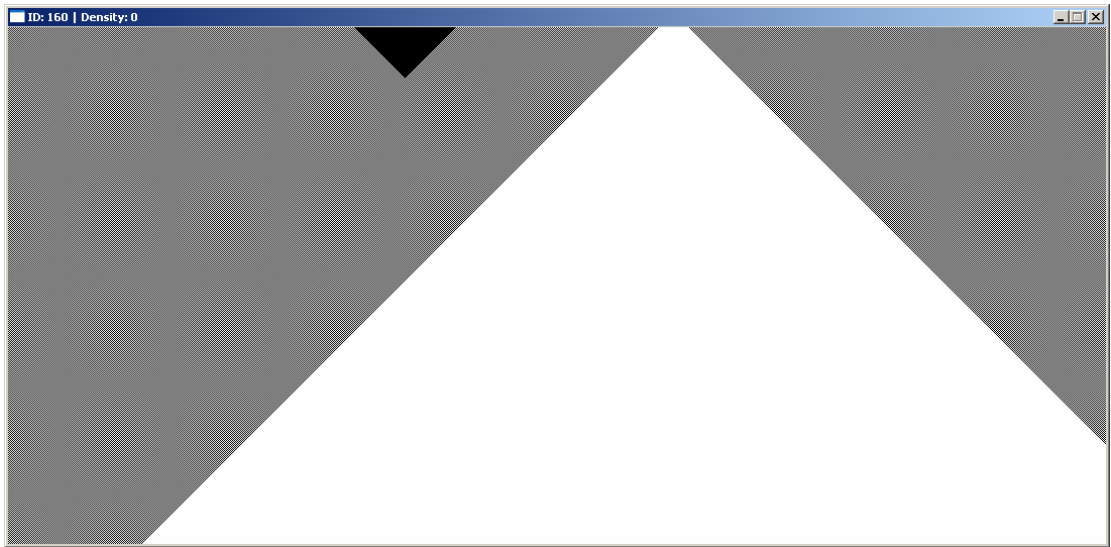


Рис.4.1.6. Клеточный автомат <160>

4.2. Класс II

Возможно только сохранение информации.

В системах этого класса информация всегда сохраняется и может перемещаться по полю, но любое взаимодействие отсутствует.

Клеточный автомат <170>. Каждое следующее состояние данного клеточного автомата является точной копией его предыдущего, но сдвинуто на одну клетку влево. Поведение показано на рис. 4.2.1.

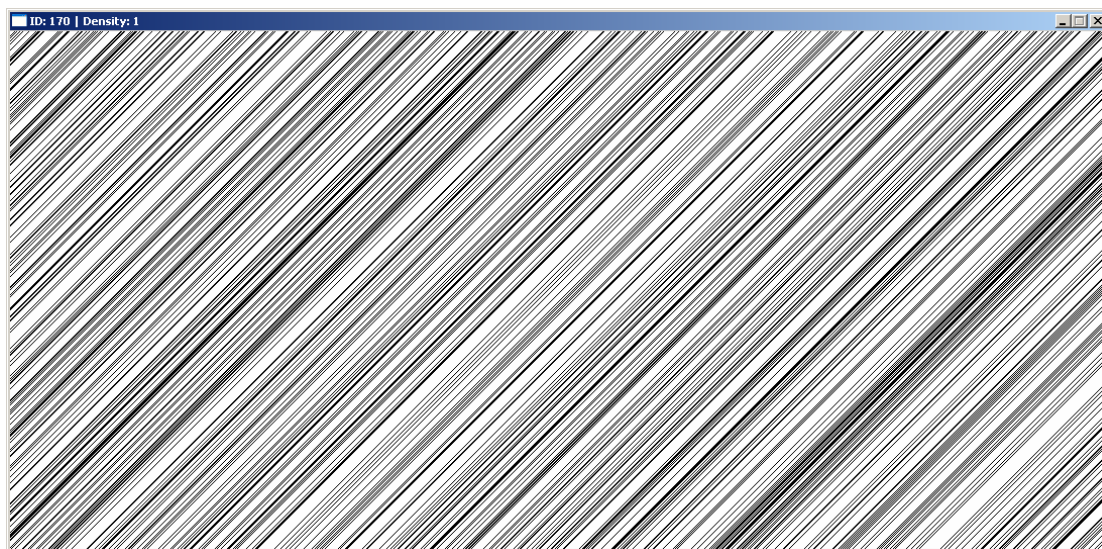


Рис.4.2.1. Клеточный автомат <170>

Клеточный автомат <204>. Каждое следующее состояние клеточного автомата является точной копией его предыдущего. Поведение показано на рис. 4.2.2.

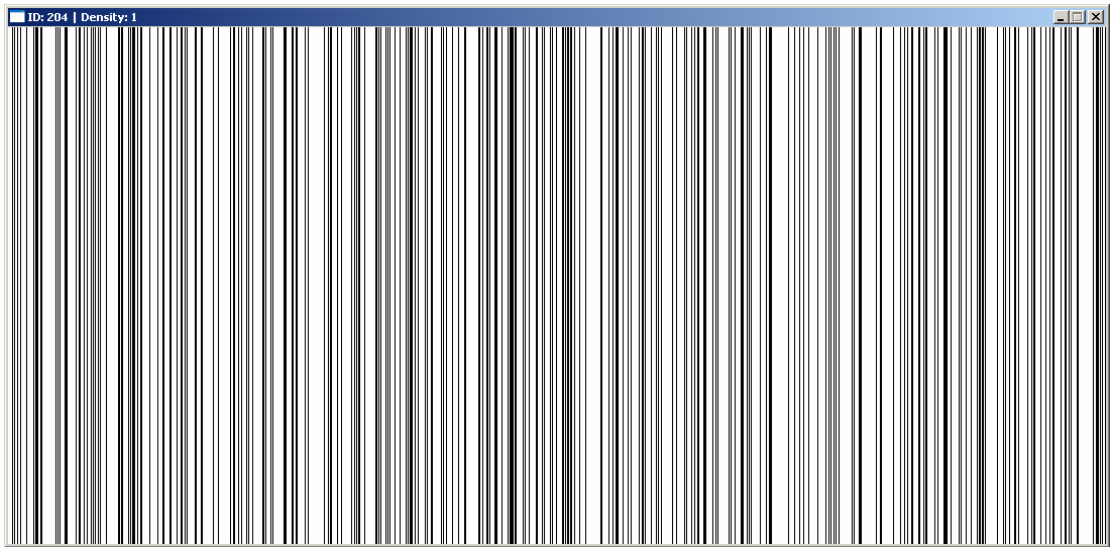


Рис.4.2.2. Клеточный автомат <204>

Также к этому классу относятся клеточные автоматы <15> и <51>.

4.3. Класс III

Возможно сохранение, распространение и простое взаимодействие информации.

Подкласс 3.1. Взаимодействие возможно в течение лишь константного числа шагов, заканчивается неперiodическими структурами.

К этому подклассу относятся следующие клеточные автоматы: <2>, <4>, <10>, <12>, <24>, <34>, <36>, <42>, <46>, <72>, <76>, <138>, <200>.

Пример: поведение клеточного автомата <46> показано на рис. 4.3.1.

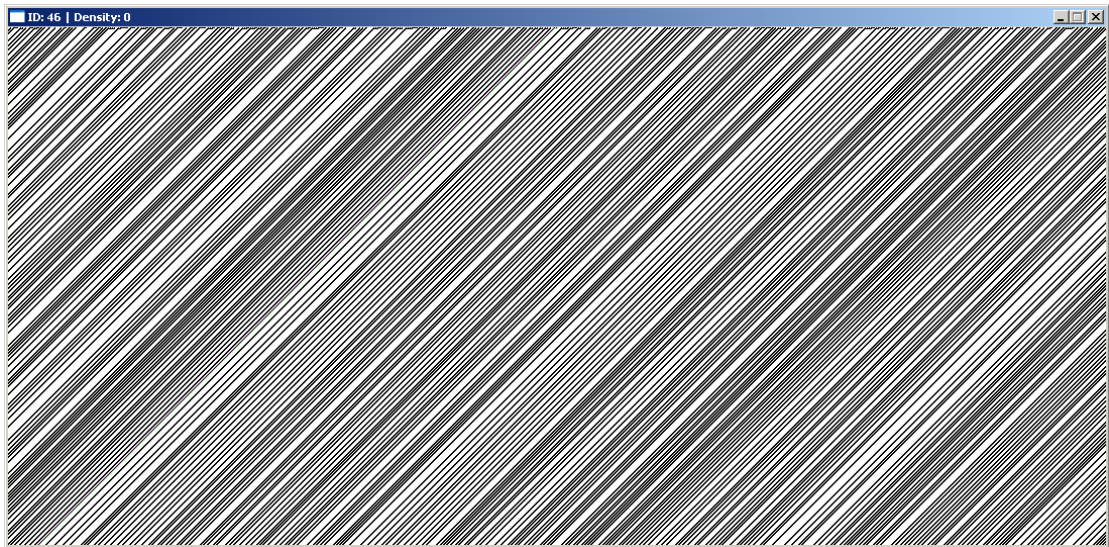


Рис.4.3.1. Клеточный автомат <46>

Подкласс 3.2. Простое взаимодействие, не ограниченное константным числом шагов, заканчивается неперiodическими структурами.

В этот подкласс входят клеточные автоматы <13>, <35>, <40>, <44>, <56>, <58>, <77>, <78>, <104>, <130>, <132>, <140>, <152>, <162>, <164>, <168>, <172>, <232>.

Пример: поведение клеточного автомата <56> показано на рис. 4.3.2.

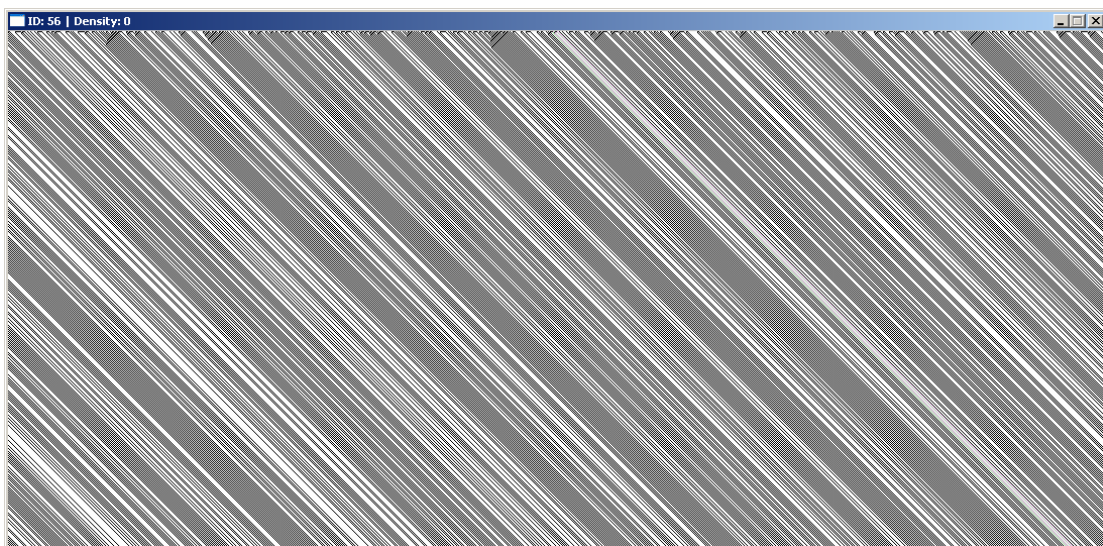


Рис.4.3.2. Клеточный автомат <56>

Подкласс 3.3. Взаимодействие возможно в течение лишь константного числа шагов, заканчивается простыми периодическими структурами.

К этому подклассу относятся клеточные автоматы <1>, <3>, <5>, <19>, <27>, <29>, <38>, <108>.

Пример: поведение клеточного автомата <3> показано на рис. 4.3.3.

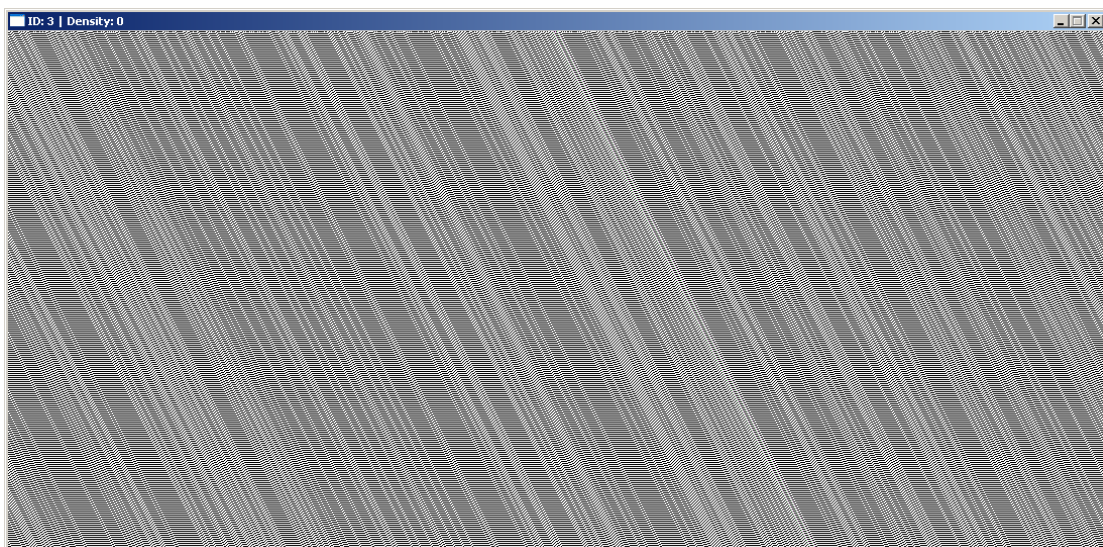


Рис.4.3.3. Клеточный автомат <3>

Подкласс 3.4. Простое взаимодействие, не ограниченное константным числом шагов, заканчивается простыми периодическими структурами.

В этот подкласс входят клеточные автоматы <6>, <7>, <11>, <23>, <28>, <33>, <37>, <50>, <74>, <134>, <156>, <178>.

Пример: поведение клеточного автомата <37> показано на рис. 4.3.4.

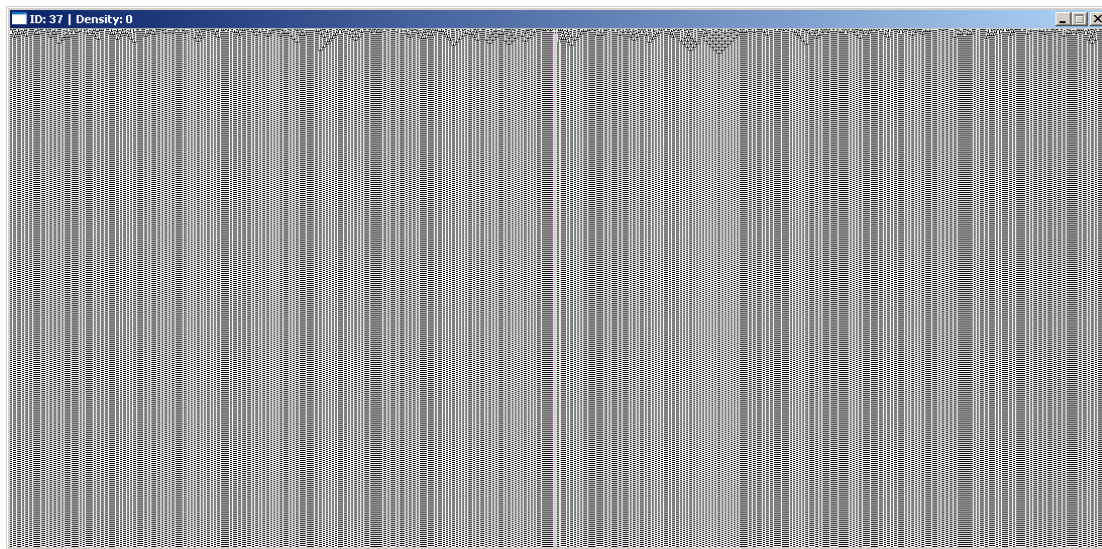


Рис.4.3.4. Клеточный автомат <37>

Подкласс 3.5. Все остальные клеточные автоматы класса III: порождающие более сложные периодические структуры; локальные структуры, способные перемещаться.

К этому подклассу относятся клеточные автоматы <9>, <14>, <25>, <26>, <41>, <43>, <57>, <62>, <73>, <94>, <142>, <154>, <184>.

Пример периодических структур, проявляемых клеточным автоматом <26>, показан на рис. 4.3.5.

Пример локальных структур, проявляемых клеточным автоматом <62>, показан на рис. 4.3.6.

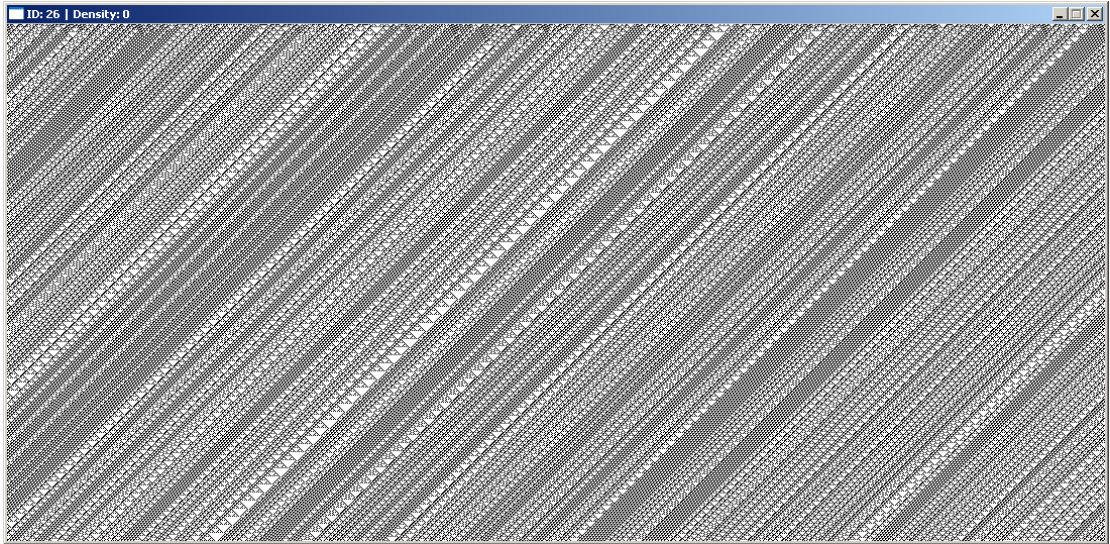


Рис.4.3.5. Периодические структуры клеточного автомата <26>

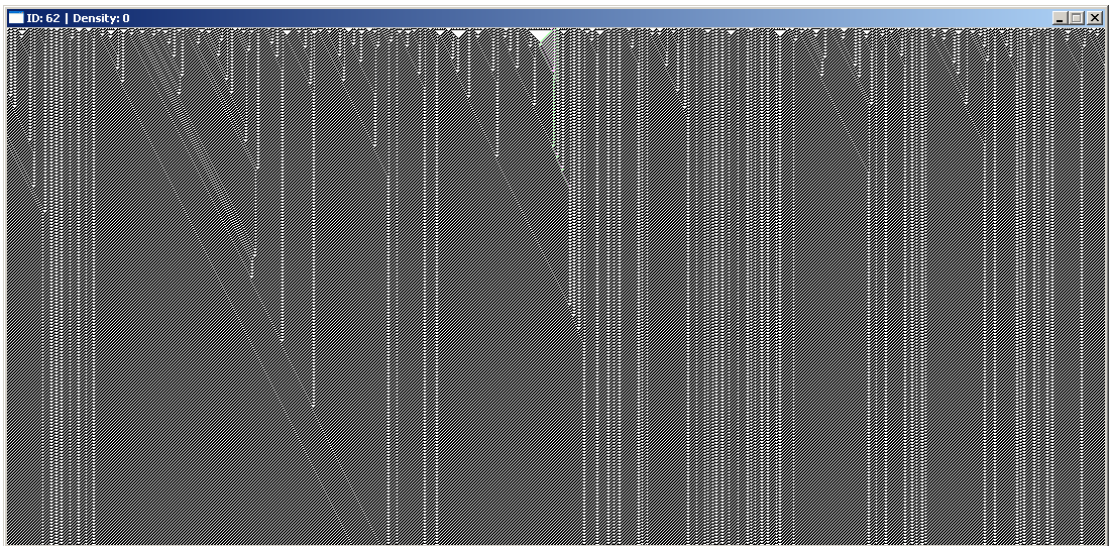


Рис.4.3.6. Локальные структуры клеточного автомата <62>

4.4. Класс IV

Неограниченное распространение информации, линейное взаимодействие.

Клеточные автоматы данного класса порождают расширяющиеся структуры, которые аддитивно накладываются друг на друга.

Клеточный автомат <60>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.4.1, разница при изменении двух точек – на рис. 4.4.2.

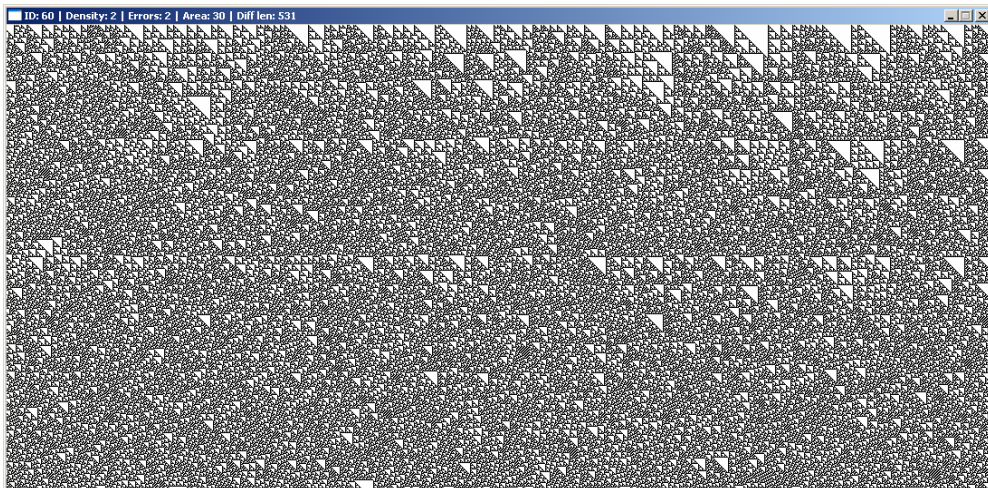


Рис.4.4.1. Клеточный автомат <60>

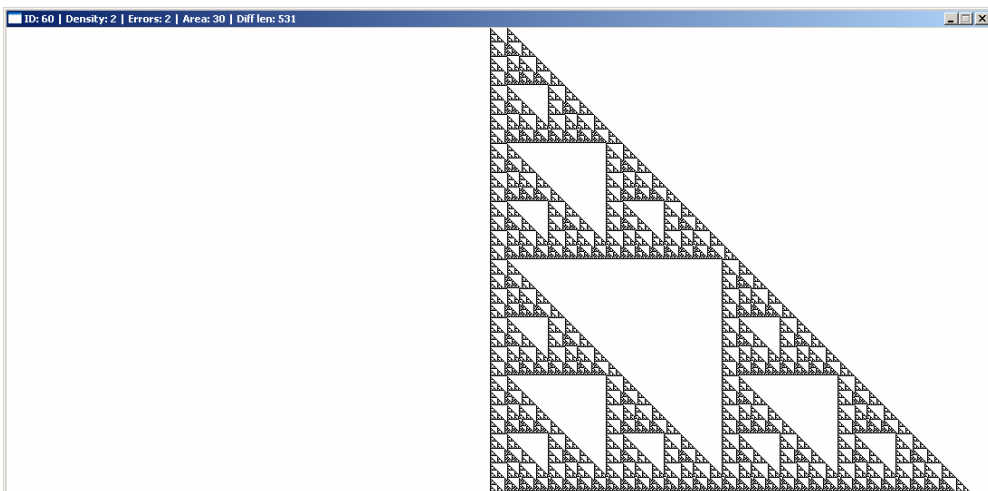


Рис.4.4.2. Разница состояний клеточного автомата <60>

Клеточный автомат <90>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.4.3, разница при изменении двух точек – на рис. 4.4.4.

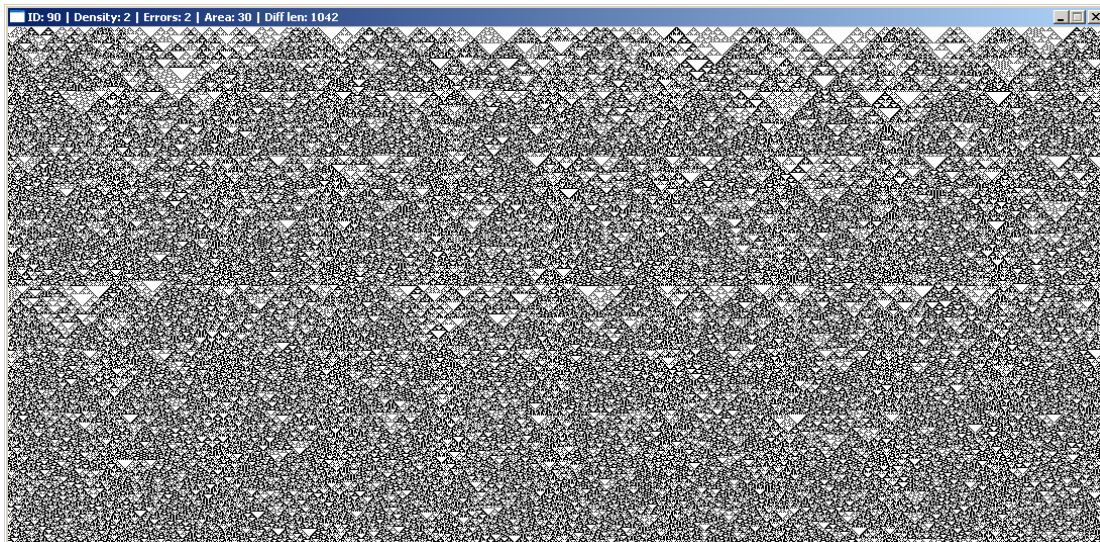


Рис.4.4.3. Клеточный автомат <90>

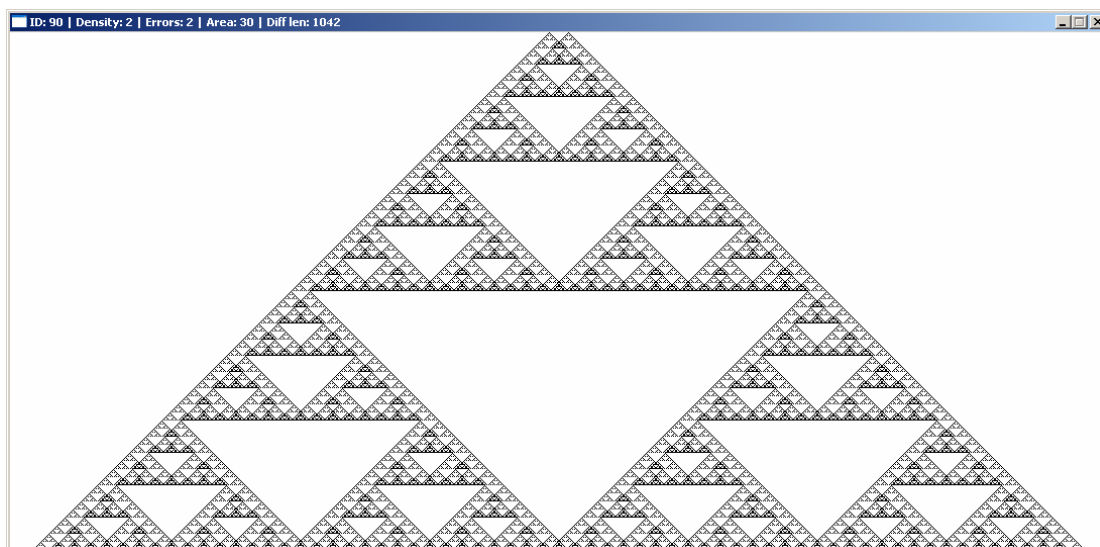


Рис.4.4.4. Разница состояний клеточного автомата <90>

Клеточный автомат <105>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.4.5, разница при изменении двух точек – на рис. 4.4.6.

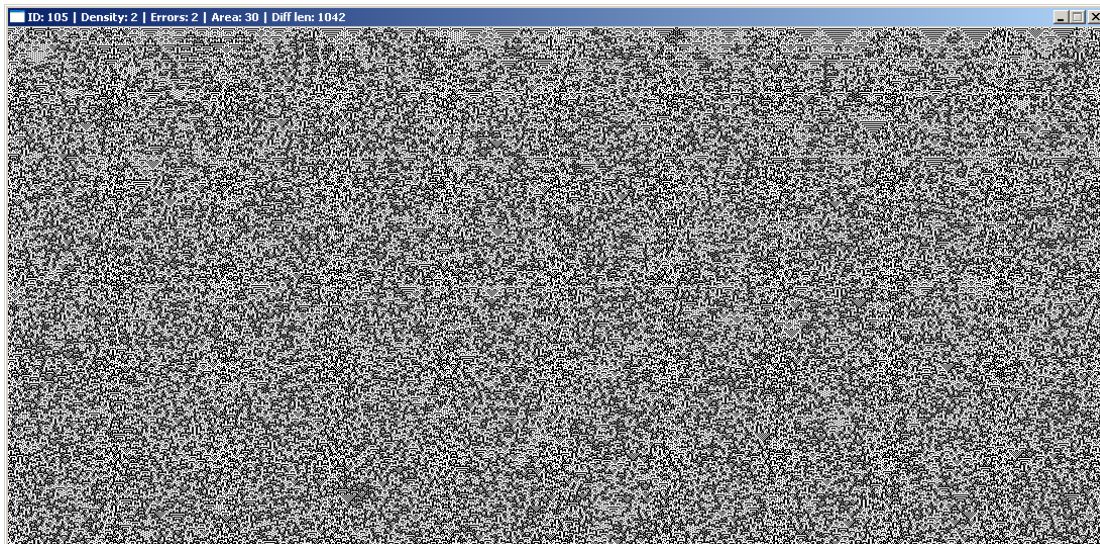


Рис.4.4.5. Клеточный автомат <105>

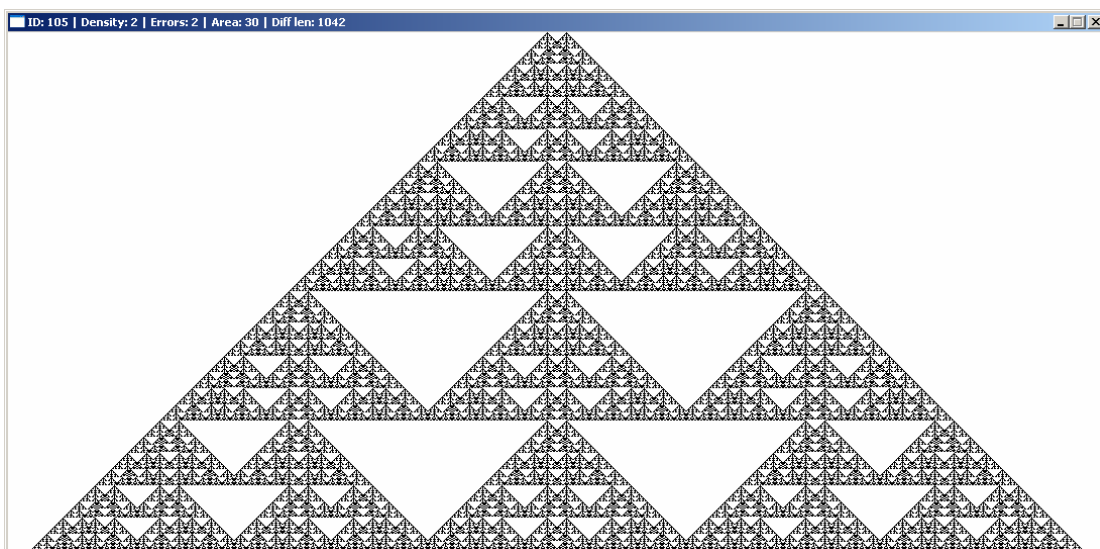


Рис.4.4.6. Разница состояний клеточного автомата <105>

Клеточный автомат <150>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.4.7, разница при изменении двух точек – на рис. 4.4.8.

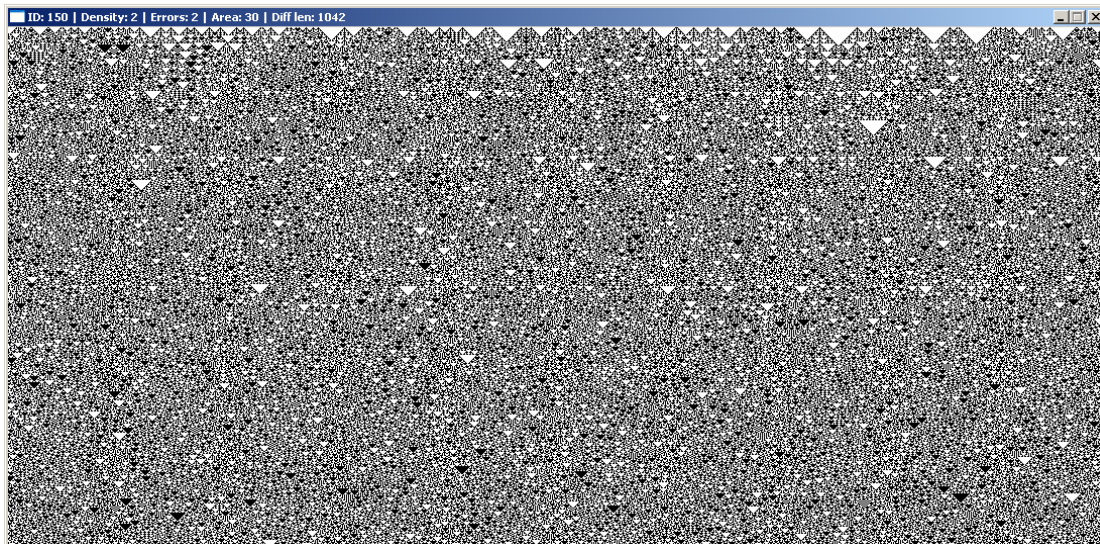


Рис.4.4.7. Клеточный автомат <150>

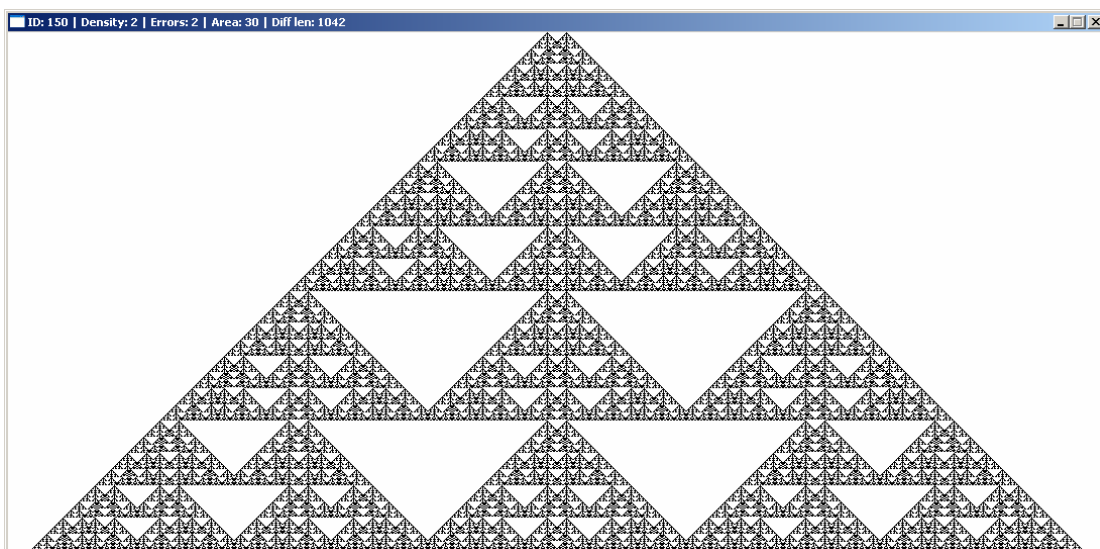


Рис.4.4.8. Разница состояний клеточного автомата <150>

При рассмотрении разницы в изменении состояний системы при изменении исходного состояния хорошо видно, что поведение клеточных автоматов <105> и <150> абсолютно одинаково, несмотря на то, что состояния клеток их полей различно.

4.5. Класс V

Неограниченное распространение информации со сложным взаимодействием, кажущимся хаотическим.

Подкласс 5.1. Наблюдается и хаос, и регулярные структуры. Средняя скорость распространения информации слабо зависит от начального состояния поля.

Клеточный автомат <18>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.1, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.2.

Средние скорости распространения информации: 0.972; 0.984; 0.984.

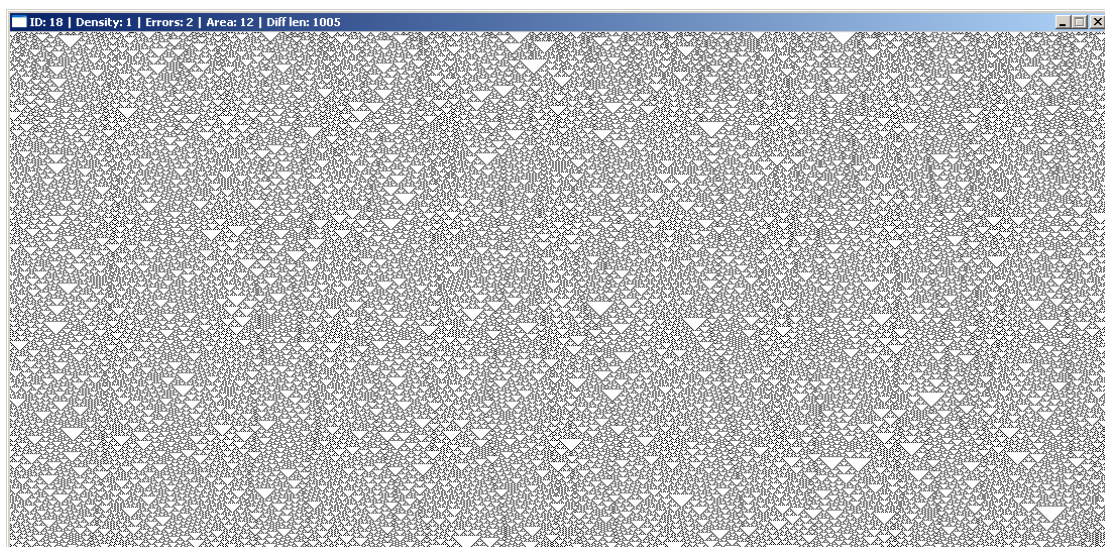


Рис.4.5.1. Клеточный автомат <18>

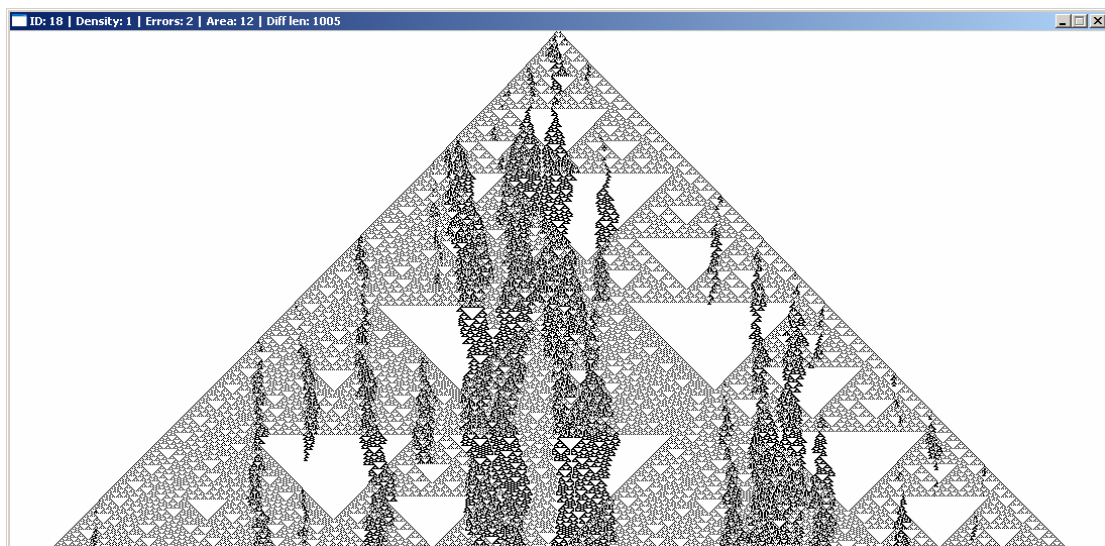


Рис.4.5.2. Разница состояний клеточного автомата <18>

Клеточный автомат <122>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.3, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.4.

Средние скорости распространения информации: 0.972; 0.979; 0.979.

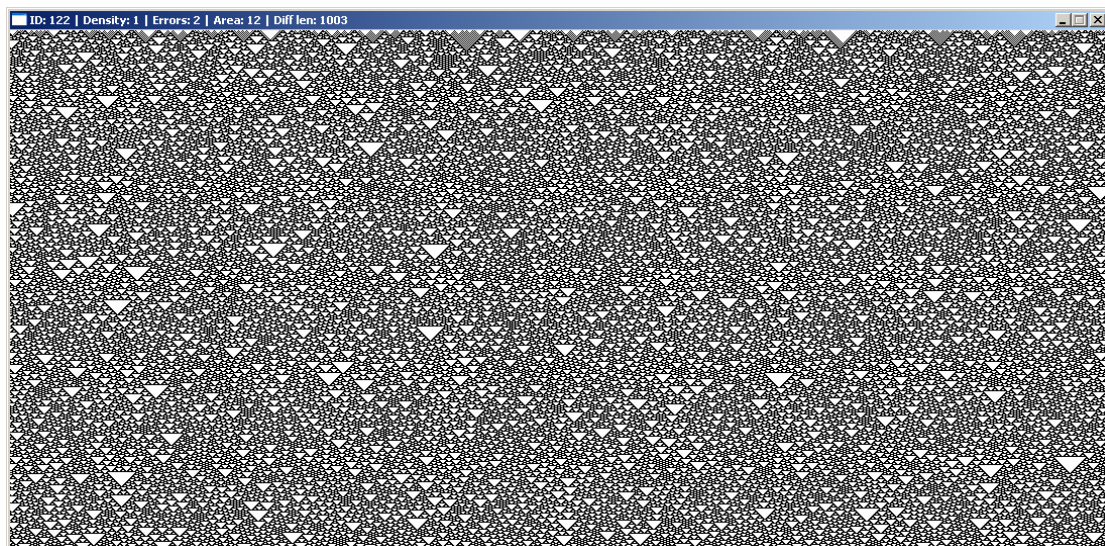


Рис.4.5.3. Клеточный автомат <122>

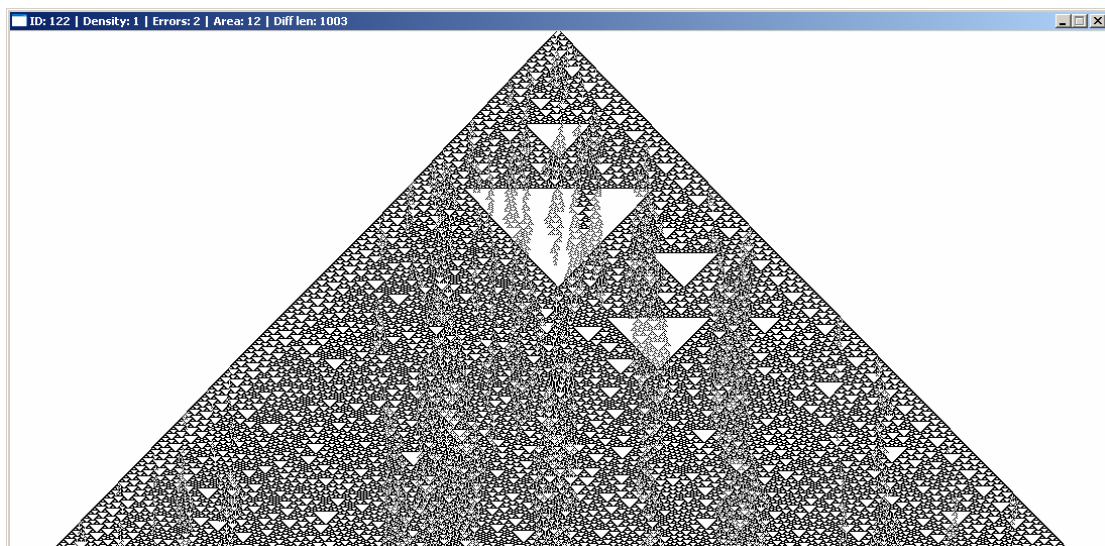


Рис.4.5.4. Разница состояний клеточного автомата <122>

Клеточный автомат <126>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.5, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.6.

Средние скорости распространения информации: 0.972; 0.979; 0.979.

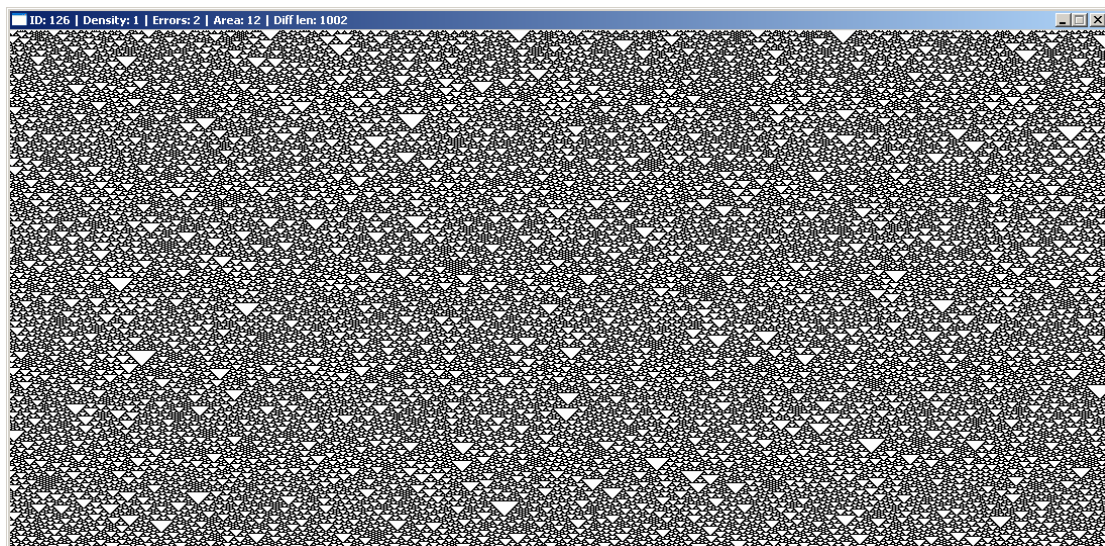


Рис.4.5.5. Клеточный автомат <126>

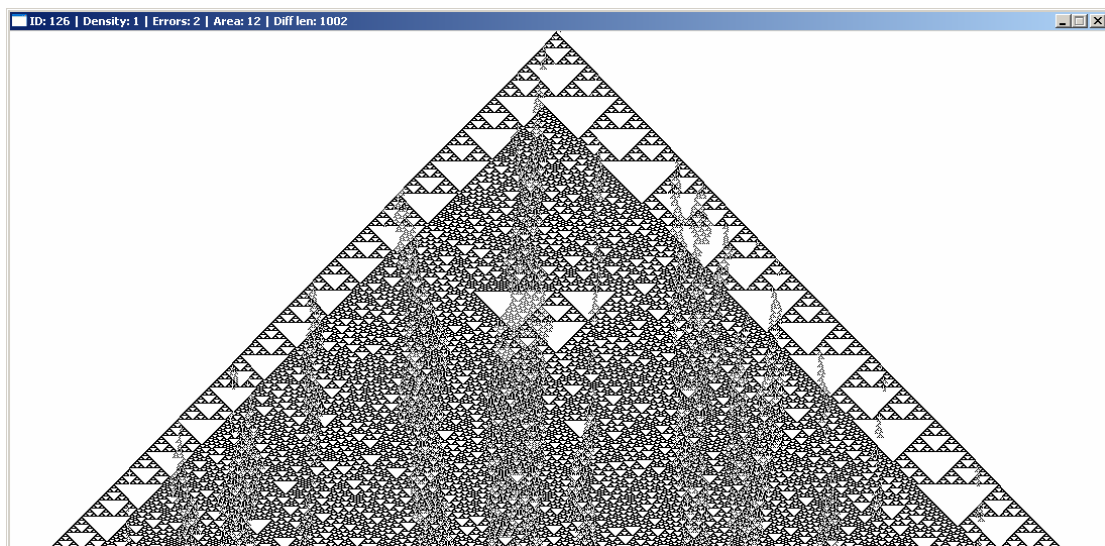


Рис.4.5.6. Разница состояний клеточного автомата <126>

Клеточный автомат <146>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.7, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.8.

Средние скорости распространения информации: 0.974; 0.984; 0.982.

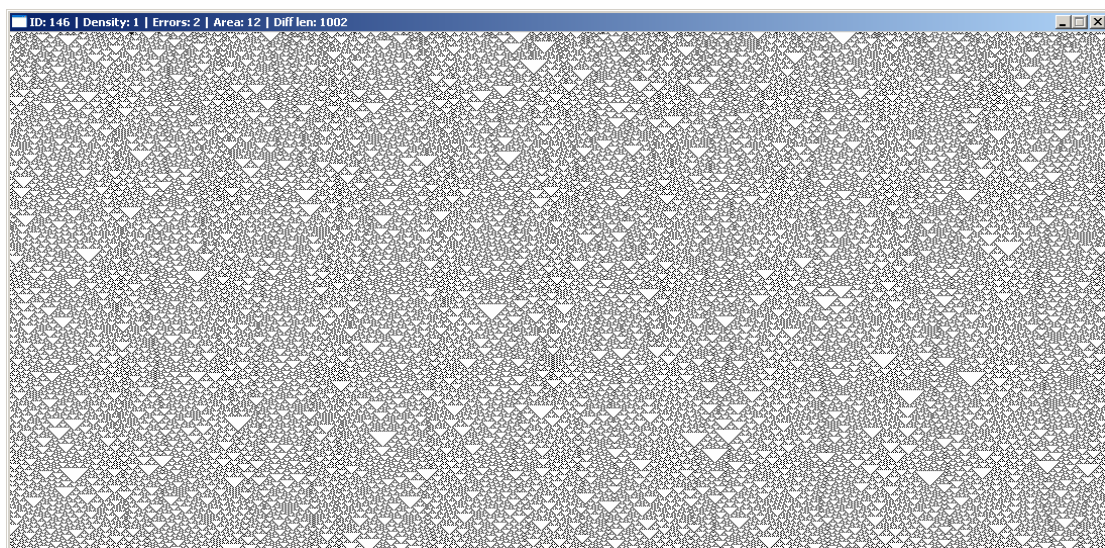


Рис.4.5.7. Клеточный автомат <146>

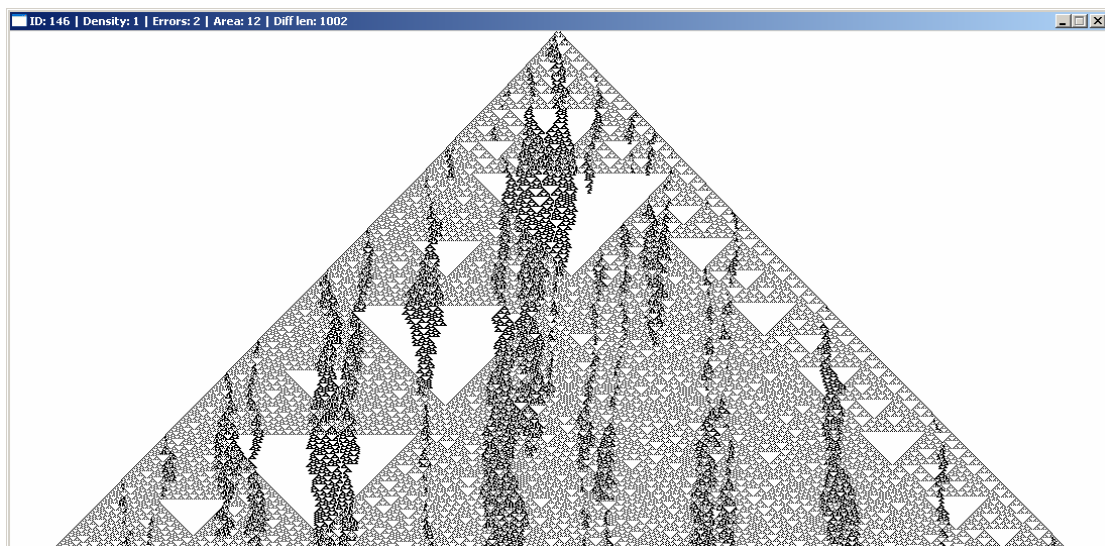


Рис.4.5.8. Разница состояний клеточного автомата <146>

Подкласс 5.2. Наблюдается сложное поведение, кажущееся хаотическим. Средняя скорость распространения информации существенно зависит от характеристик случайного начального состояния поля.

Клеточный автомат <22>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.9, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.10.

Средние скорости распространения информации: 0.765; 0.777; 0.832.

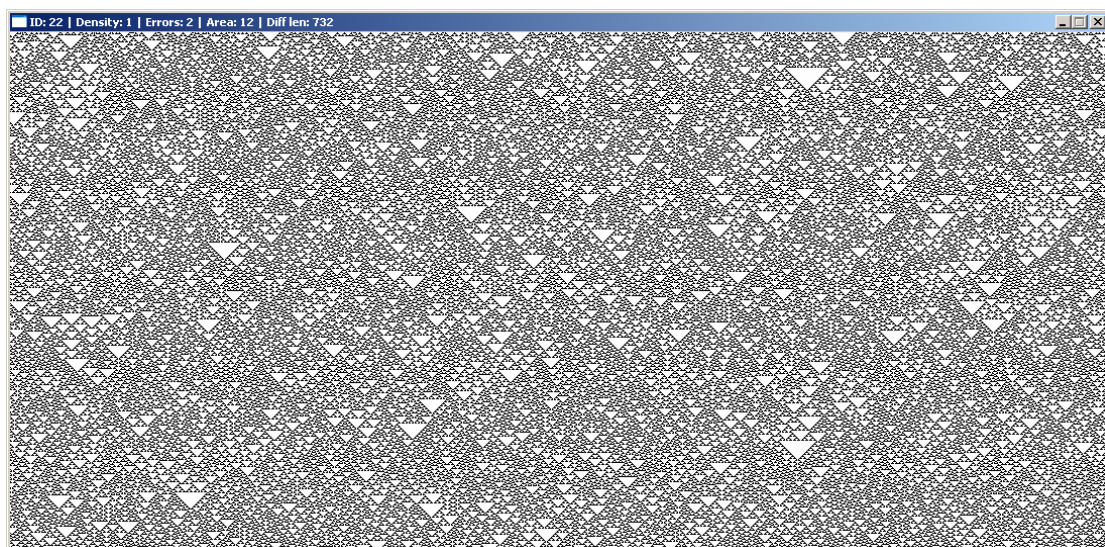


Рис.4.5.9. Клеточный автомат <22>

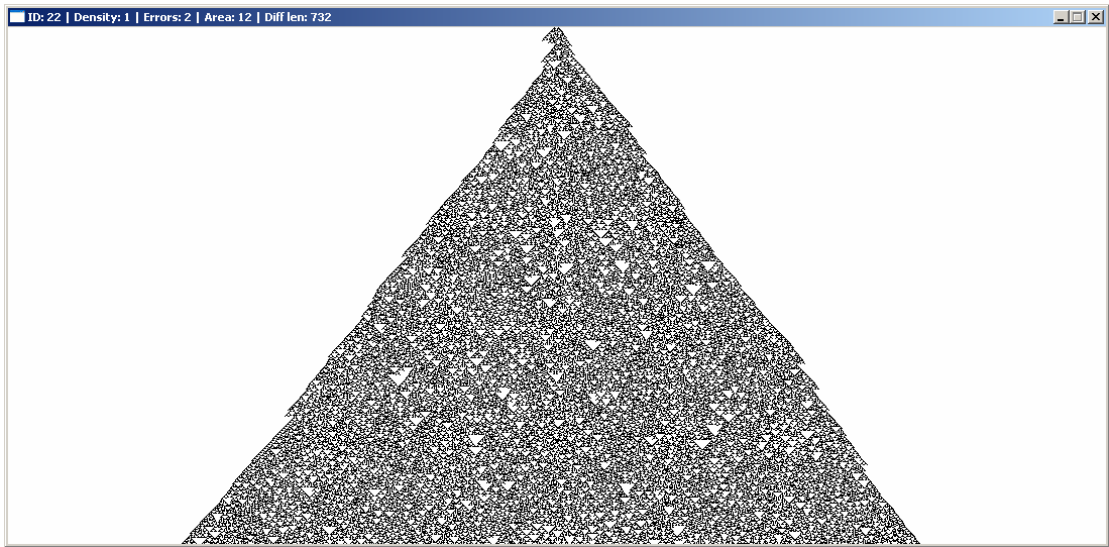


Рис.4.5.10. Разница состояний клеточного автомата <22>

Клеточный автомат <30>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.11, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.12.

Средние скорости распространения информации: 0.622; 0.628; 0.628.

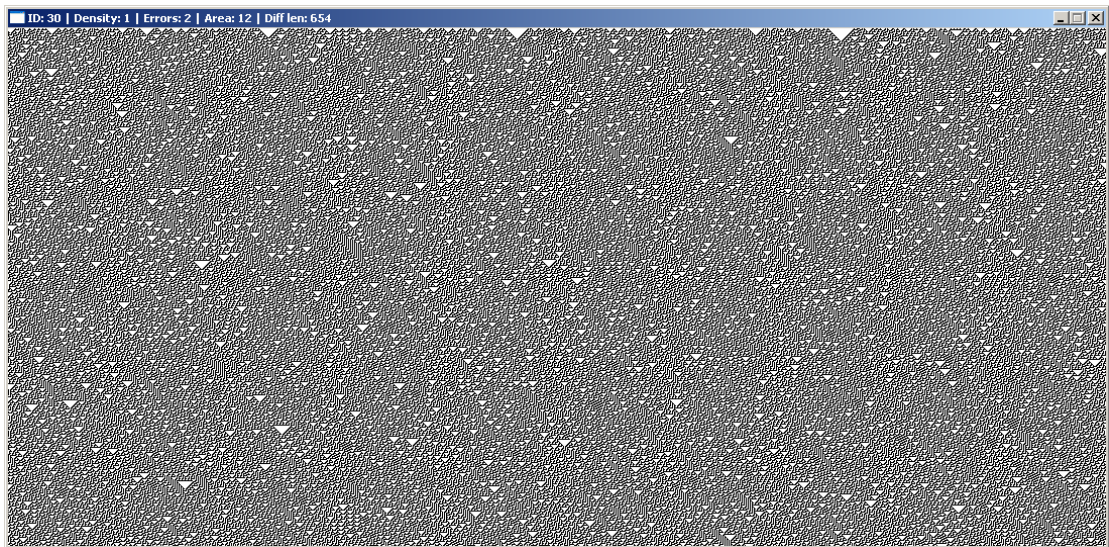


Рис.4.5.11. Клеточный автомат <30>

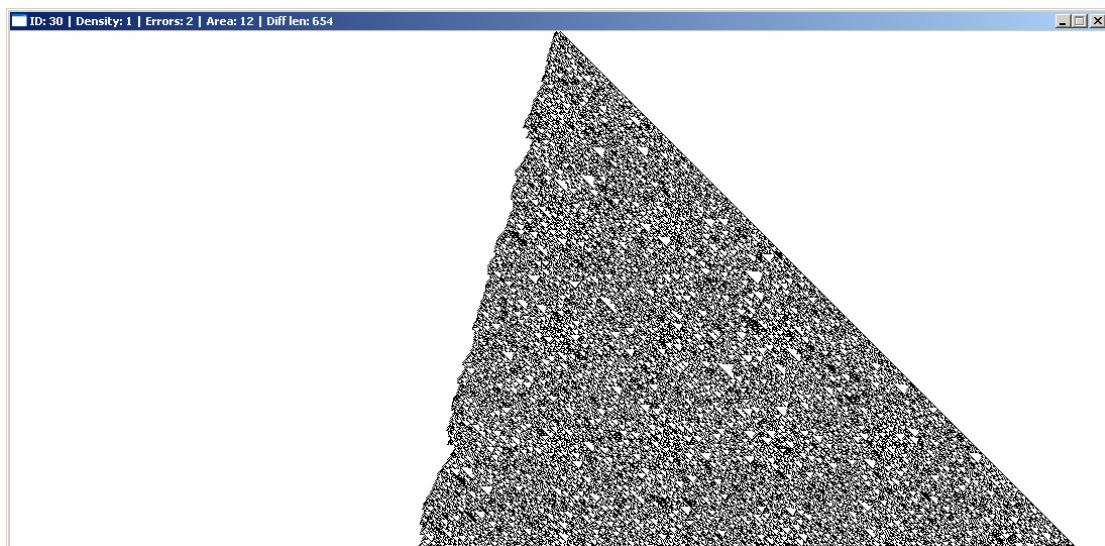


Рис.4.5.12. Разница состояний клеточного автомата <30>

Клеточный автомат <45>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.13, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.14.

Средние скорости распространения информации: 0.586; 0.592; 0.590.

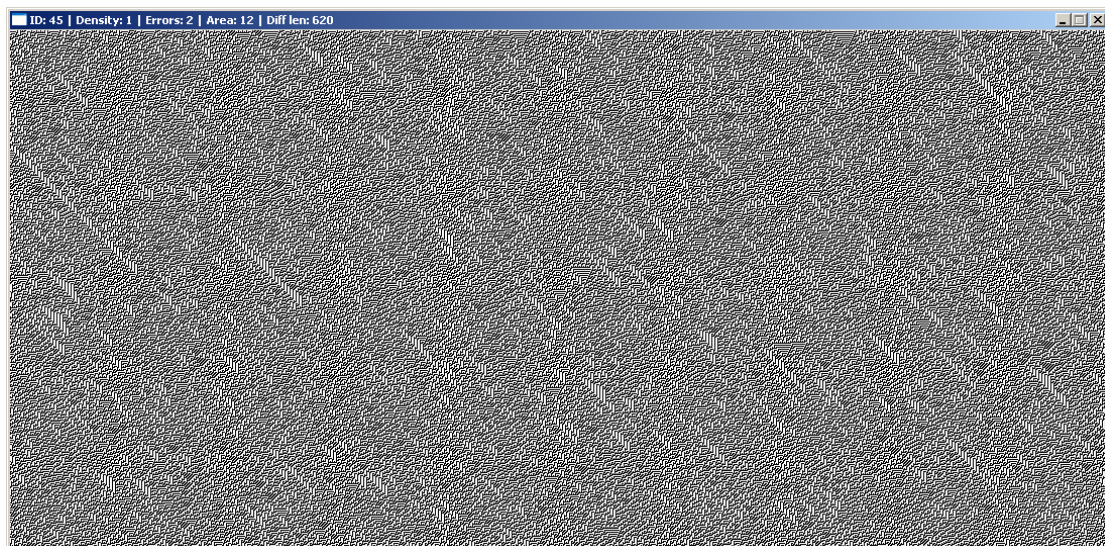


Рис.4.5.13. Клеточный автомат <45>

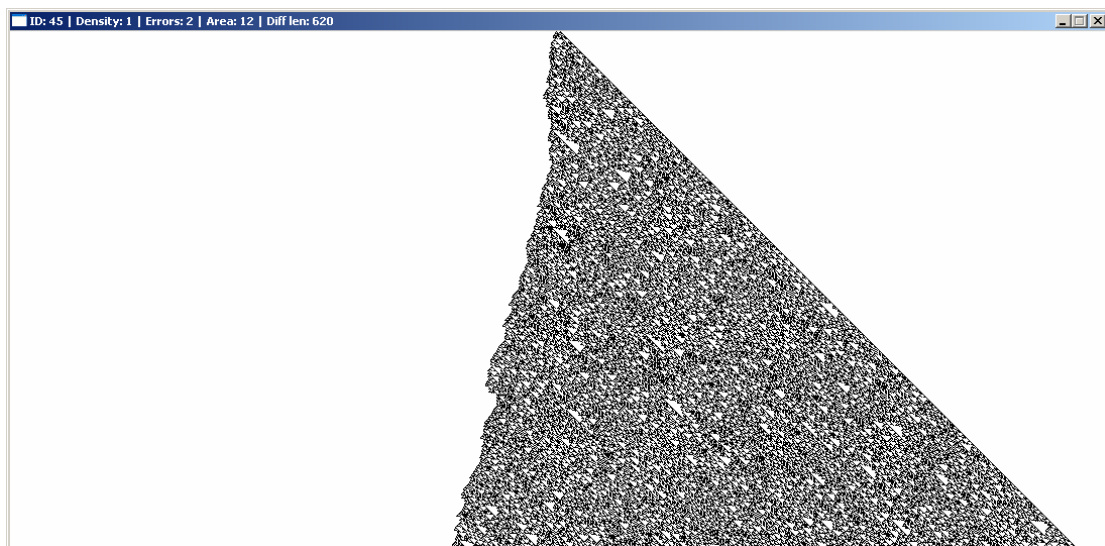


Рис.4.5.14. Разница состояний клеточного автомата <45>

Клеточный автомат <106>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.5.15, разница при изменении двух точек – на рис. 4.5.16.

Средние скорости распространения информации: 0.433; 0.077; 0.257.

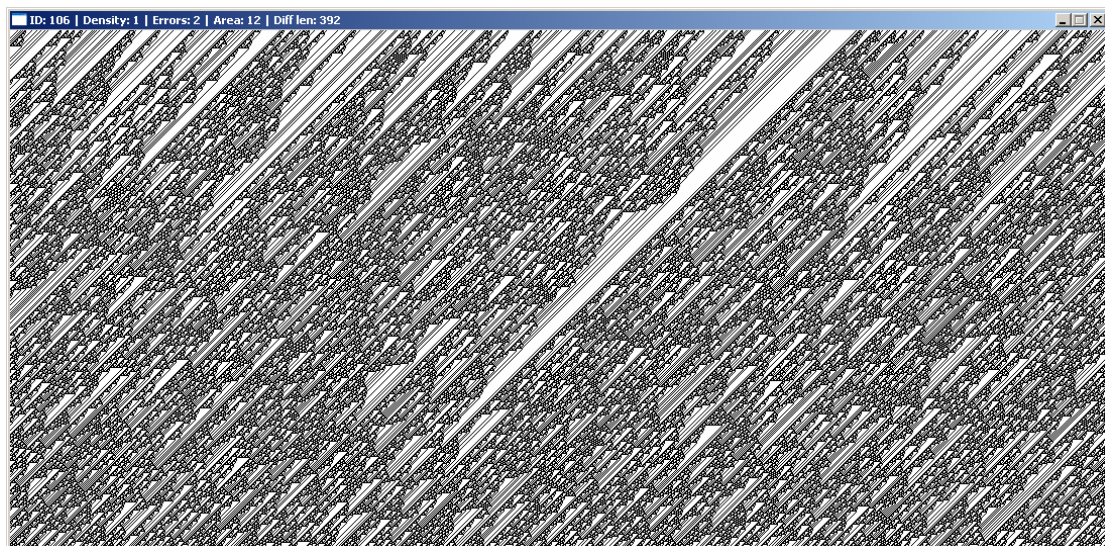


Рис.4.5.15. Клеточный автомат <106>

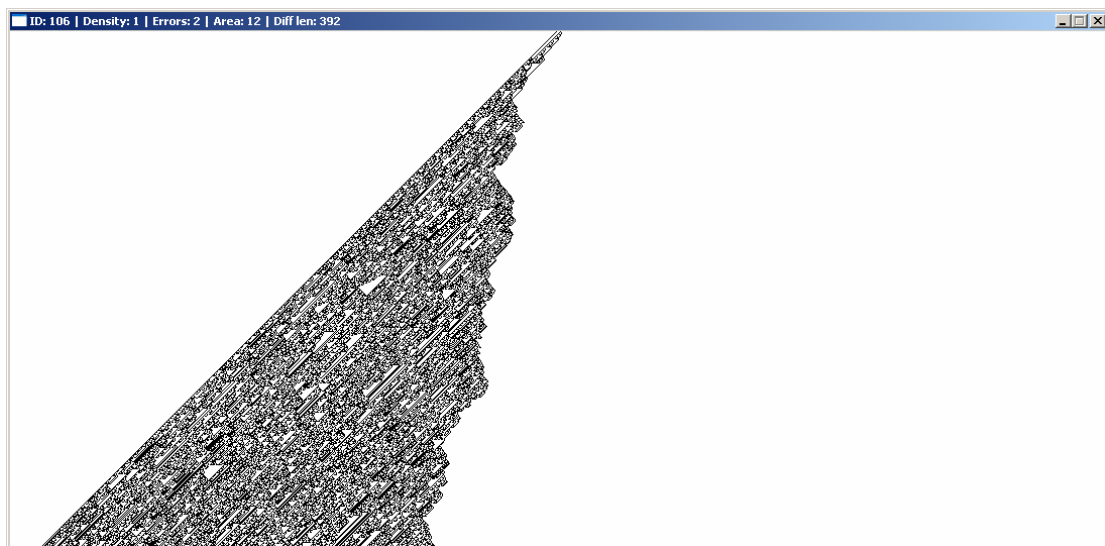


Рис.4.5.16. Разница состояний клеточного автомата <106>

4.6. Класс VI

Распространение информации на основе создания, движения и взаимодействия локальных структур.

Клеточный автомат <54>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.6.1, разница при изменении двух точек – на рис.

4.6.2.

Средние скорости распространения информации: 0.457; 0.434; 0.444.

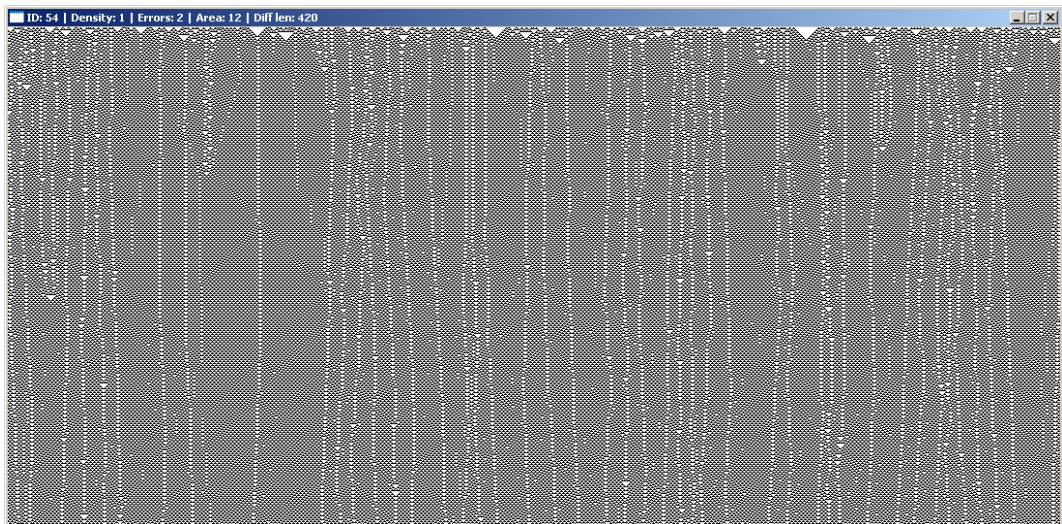


Рис.4.6.1. Клеточный автомат <54>

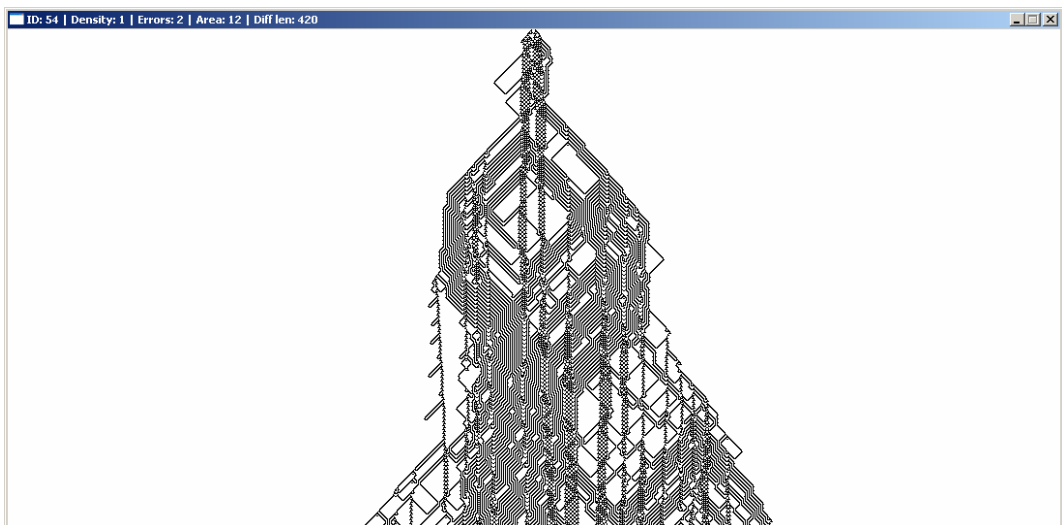


Рис.4.6.2. Разница состояний клеточного автомата <54>

Клеточный автомат <110>. Поведение при случайном начальном состоянии показано на рис. 4.6.3, разница при изменении двух точек – на рис.

4.6.4.

Средние скорости распространения информации: 0.237; 0.248; 0.249.

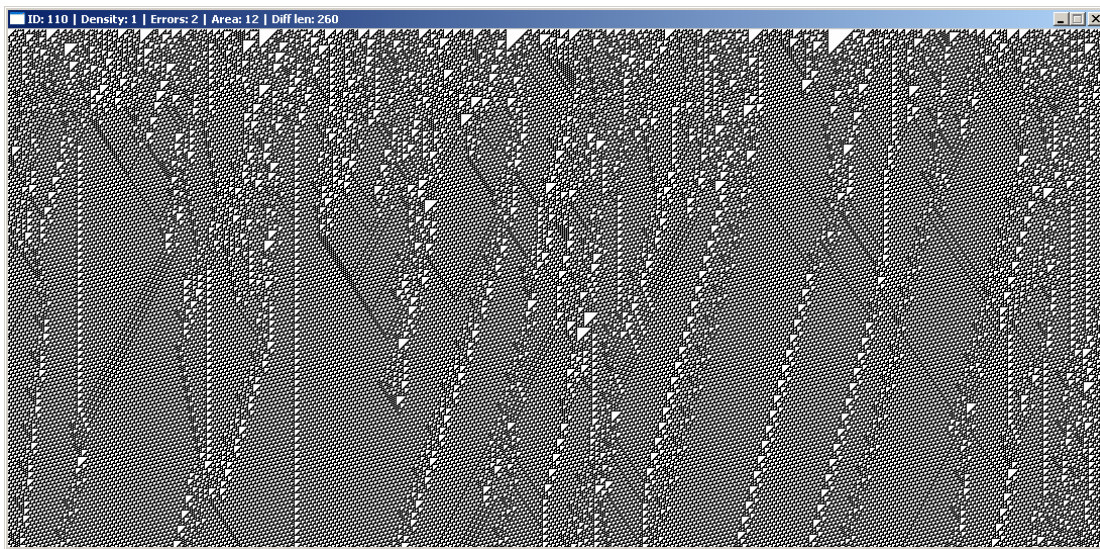


Рис.4.6.3. Клеточный автомат <110>

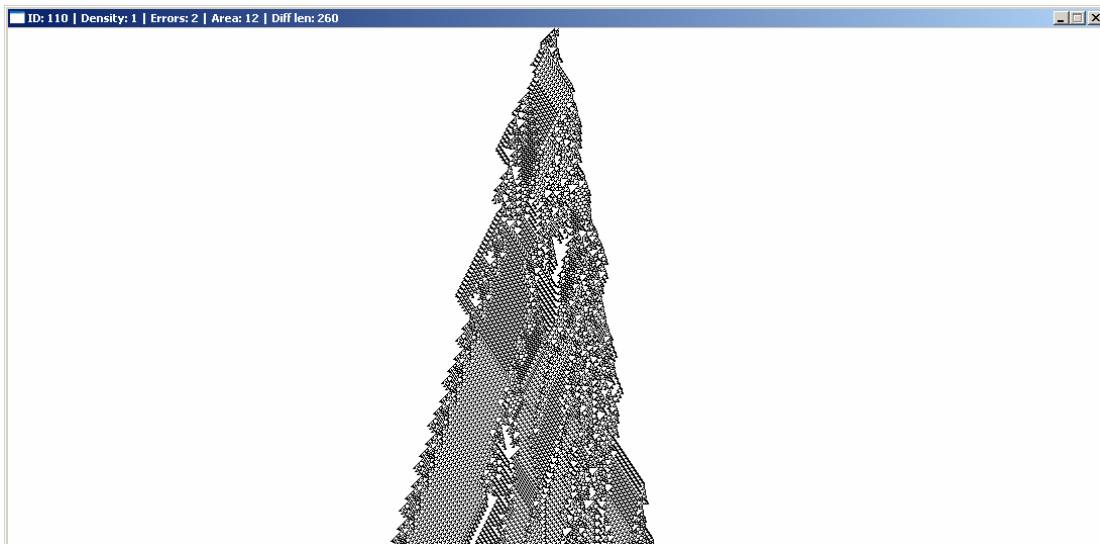


Рис.4.6.4. Разница состояний клеточного автомата <110>

4.7 Выводы

В данной главе построена классификация клеточных автоматов.

Классифицированы все группы различного поведения одномерных двоичных клеточных автоматов.

Полностью описано поведение групп, принадлежащих к классу I.

Для групп классов V и VI приведены средние скорости распространения информации.

5. Анализ поведения классов

5.1. Поведение класса I

Класс I соответствует системам, которым характерно самое простое возможное поведение: всё поле переходит в одно из небольшого конечного набора состояний. Количество информации, содержащееся в системе, быстро уменьшается на первых же шагах эволюции – всё поле разбивается на области, находящиеся в одном из возможных конечных состояний.

Каждое из возможных конечных состояний является стабильным состоянием системы, если всё поле находится в нём. Но при наличии небольших изменений (изменено несколько клеток внутри области или существует граница с областью, находящейся в другом состоянии) поведение системы различно для разных состояний: в одном случае отклонения подавляются, а в другом – вызывают переход области в другое состояние. Назовём свойство состояния области подавлять небольшие изменения и сохранять себя устойчивостью. Устойчивость может быть абсолютной – подавление любых изменений, и условной – подавление только изменений какого-то вида и неустойчивость при других изменениях. Пример абсолютно устойчивого состояния – состояние $\{0\}$ поля клеточного автомата $\langle 160 \rangle$, условно устойчивого – состояние $\{01\}$ поля того же клеточного автомата: подавляются только изменения $0 \rightarrow 1$.

После перехода всего поля в набор областей, находящихся в одном из возможных конечных состояниях системы, дальнейшая эволюция системы представляет собой распространение областей более устойчивого состояния, поглощающих соседние, находящиеся в менее устойчивом. Скорость распространения – не меньше одной клетки за шаг.

Таблицы переходов одномерных двоичных клеточных автоматов этого класса содержат значительно больше переходов в одно из состояний, чем в другое. Например, семь переходов в состояние 0 и только один в состояние 1. Ввиду простоты систем данного класса, для проверки принадлежности клеточного автомата к нему достаточно несложного анализа правил перехода. Для рассмотренного класса клеточных автоматов для этого строится ориентированный граф возможных переходов для всех состояний области поля из трёх соседних клеток. В построенном графе выделяются циклы. Клеточный автомат принадлежит к данному классу при выполнении всех следующих условий:

- 1) Между любыми двумя циклами отсутствуют переходы от одного к другому и обратно (наличие лишь одного из этих переходов допустимо).

- 2) Только один из циклов абсолютно устойчивый, то есть не зависит от состояний соседних с рассматриваемыми клеток.

- 3) Множество циклов частично упорядоченно относительно зависимости *элементы цикла необходимы слева (справа) для поддержания цикла у.*

5.2. Поведение класса II

Системы этого класса также имеют очень простое поведение – в них полностью отсутствует любое взаимодействие информации, содержащейся в состоянии различных клеток поля. Тем не менее, в данных системах информация может перемещаться по полю. Необходимым условием принадлежности к этому подклассу является равное число переходов в каждое из состояний в таблице перехода клеточного автомата.

Поведение данного класса достаточно просто для возможности определения принадлежности к нему клеточного автомата на основе анализа его таблицы переходов. В случае двоичных клеточных автоматов для этого по таблице переходов строится булева формула в виде сокращённой ДНФ, принадлежности к классу соответствует зависимость результата ровно от одной входной переменной.

5.3. Поведение класса III

К этому классу относятся системы, в которых возможно сохранение, перемещение и простое взаимодействие информации клеток поля. Возможно создание вложенных регулярных и локальных структур, но их взаимодействие между собой весьма простое. Изменения в начальных условиях равномерно заполненного случайными данными поля или не распространяются шире, чем некоторая конечная и, как правило, небольшая

область, или затрагивают неограниченную область, но изменение имеет простой вид, и взаимодействие информации внутри него отсутствует.

В данном классе можно нестрого выделить несколько подклассов на основе длительности возможного взаимодействия и вида характерных структур, порождаемых клеточными автоматами при случайных начальных условиях:

В первый подкласс выделяются системы, взаимодействие в которых возможно в течение лишь константного числа шагов и заканчивается неперiodическими структурами.

Второй подкласс отличается от первого тем, что здесь взаимодействие не ограничено некоторым константным числом для каждого клеточного автомата, а зависит от начального состояния поля.

В системах третьего подкласса, как и первого, взаимодействия могут происходить лишь в течение лишь константного числа шагов, но заканчиваются они простыми периодическими структурами.

Четвёртый подкласс похож на третий по типу структур, которыми заканчивается взаимодействие, но, подобно второму подклассу, число шагов взаимодействия не ограничено некоторой константой.

К пятому подклассу относятся все клеточные автоматы класса III, которые не вошли в предыдущие четыре подкласса из-за более сложного поведения. Здесь можно наблюдать более сложные периодические и локальные структуры.

Автоматически принадлежность к данному классу определяется, если при случайных начальных условиях небольшие изменения в начальном состоянии поля влияют только на небольшие области поля, которые перестают увеличиваться после некоторого числа шагов, или размер изменения пропорционален числу шагов, но в области отличий сложных взаимодействий не происходит.

5.4. Поведение класса IV

Определяющими чертами систем этого класса являются возможность распространения информации и полная линейность всех взаимодействий. Если обозначить начальное состояние маленькими латинскими буквами, а состояние системы через N шагов как $F(x, N)$, то для систем этого класса будет выполняться $F(x + y, N) = F(x, N) + F(y, N)$ для любых начальных состояний x и y и любого числа шагов N . (“+” в данном случае означает операцию “сумма по модулю два”, применённую поклеточно).

Из возможности распространения и полной линейности следует, что информация о любом изменении всегда будет распространяться, причём с постоянной скоростью, которая не зависит от состояния поля. Для одномерных двоичных клеточных автоматов эта скорость равна одной клетке за шаг. Необходимо отметить, что информация не обязательно должна распространяться во все стороны, как в клеточном автомате <90> – возможно, что она распространяется только в некоторые, как в <60>.

Системы данного класса порождают регулярные вложенные структуры. Кажущаяся же сложность состояния системы в некоторый момент времени является исключительно следствием сложности начального состояния.

Скорость распространения информации константна и не зависит от состояния поля.

Принадлежность клеточного автомата к данному классу можно определить аналитически. В случае двоичных клеточных автоматов для этого по таблице переходов строится булева формула $f(x_1, x_2, \dots)$ и проверяется, что её сокращённая ДНФ форма зависит не менее чем от двух входных переменных. После этого проверяется линейность по каждой из входных переменных $f(\dots, x_i + y_i, \dots) = f(\dots, x_i, \dots) + f(\dots, y_i, \dots)$ путём приведения выражений справа и слева от знака равенства в совершенную ДНФ и сравнения полученных результатов, принадлежности к классу соответствует совпадение полученных формул.

5.5. Поведение класса V

Данные системы имеют сложное поведение, кажущееся хаотическим. Некоторые клеточные автоматы этого класса демонстрируют сложное поведение даже при крайне простых начальных условиях – когда все клетки поля кроме одной находятся в одинаковом состоянии.

Для каждого клеточного автомата из этого класса приведены три средние скорости распространения информации об изменении случайного начального состояния:

1) При равной вероятности состояний 0 и 1 клеток поля в начальном состоянии поля.

2) При соотношении вероятности состояний 0 и 1 клеток поля 15:1 в начальном состоянии поля.

3) При соотношении вероятности состояний 0 и 1 клеток поля 1:15 в начальном состоянии поля.

В данном классе можно выделить два подкласса.

Поведение систем первого подкласса похоже на поведение систем класса IV. Здесь также можно наблюдать регулярные вложенные структуры, а средняя скорость распространения информации очень близка к одной клетке за шаг при случайных начальных условиях. (Для всех одномерных двоичных клеточных автоматов она находится в диапазоне от 0.97 до 1). На основе этого можно предположить, что данным системам преимущественно характерны линейные взаимодействия, подобные системам класса IV. Ключевым же отличием от класса IV является присутствие ещё и более сложных, нелинейных взаимодействий, которые проявляются в наблюдаемых сложных изменениях состояниях поля и том, что средняя скорость распространения информации меньше одной клетки за такт, но стремится к этому значению при уменьшении количества информации в случайном начальном состоянии поля.

Системы второго подкласса отличаются от систем первого значительно большей зависимостью средней скорости распространения информации от

характеристик начального состояния поля. Причём, при уменьшении количества информации в случайном начальном состоянии поля, она может как увеличиваться, так и уменьшаться. Из этого следует, что для данных систем преимущественно линейные взаимодействия не характерны.

Автоматически данный класс определяется на основе того, что изменения в начальном случайном состоянии поля в среднем распространяются на расстояния, пропорциональные числу шагов. Средняя скорость распространения информации зависит от состояния поля.

5.6. Поведение класса VI

Как и в системах класса V, здесь происходит сложное взаимодействие информации. Отличительной особенностью, выделяющей эти системы в отдельный класс, является то, что они порождают локальные структуры, которые могут существовать неограниченно долго, перемещаться на неограниченные расстояния и взаимодействовать более сложно, чем “одна локальная структура поглощает другую”. То есть, их поведение сложное, но не хаотическое.

Для каждого клеточного автомата этого класса приведены те же три средние скорости распространения информации, что и в классе V. Наблюдается примерное соответствие их значений второму подклассу класса V.

Данный класс определяется по тем же параметрам, что и класс V, но система относится к классу VI, а не классу V при наличии локальных структур и их взаимодействия.

5.7. Начальные условия специального вида

В данной работе проведена классификация поведения клеточных автоматов при случайных начальных условиях. Это хорошо соотносится с их поведение в большинстве наблюдаемых случаев. Тем не менее, необходимо отметить, что при начальных условиях специального вида поведение клеточных автоматов может существенно отличаться.

Для иллюстрации возможности упрощения поведения возьмём одномерный двоичный клеточный автомат <30>, который демонстрирует сложное поведение даже при начальном состоянии с равномерно заполненным полем и одной отличной точкой (рис. 5.7.1).

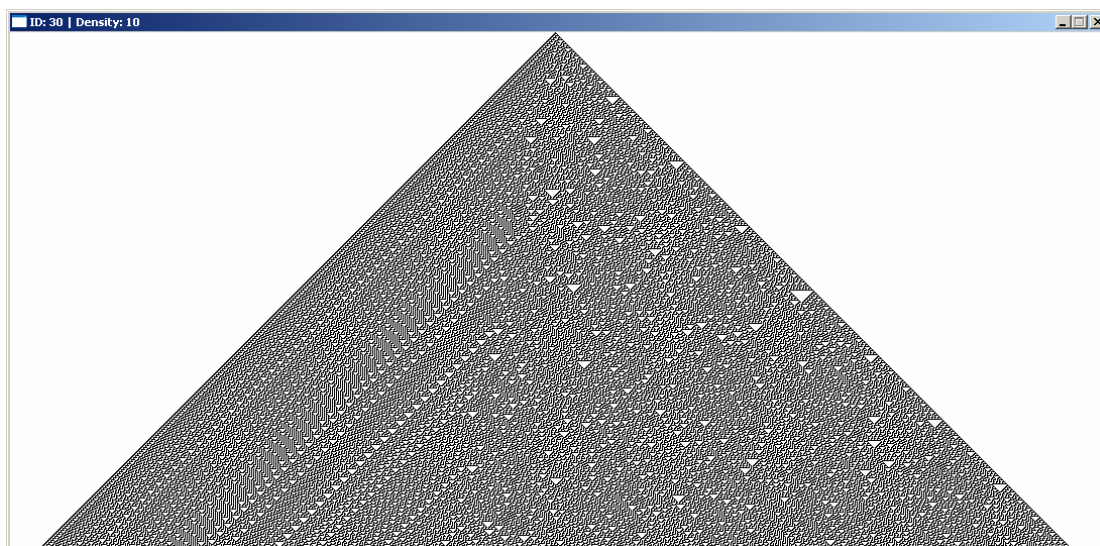


Рис.5.7.1. Клеточный автомат <30>, одиночное начальное состояние

Но если в качестве начального состояния поля задать $\{00000001\}$, то в результате получатся лишь простые повторяющиеся структуры (рис. 5.7.2).

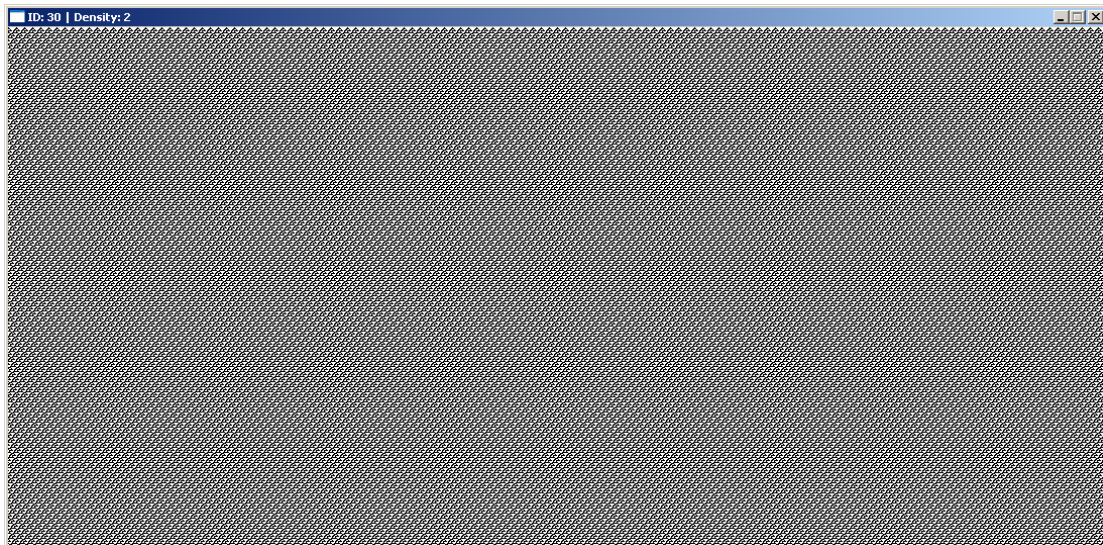


Рис.5.7.2. Клеточный автомат <30>, регулярное начальное состояние

В качестве примера более сложного поведения клеточного автомата на начальных условиях специального вида можно привести одномерный двоичный клеточный автомат <73>. При случайных начальных условиях он порождает лишь набор простых периодических структур (рис. 5.7.3).

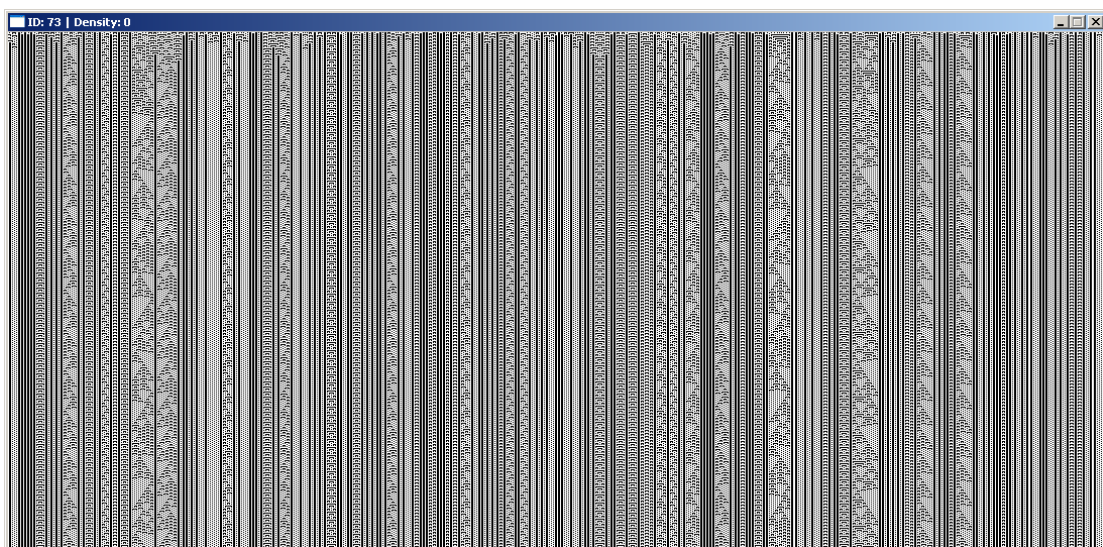


Рис.5.7.3. <73>, случайное начальное состояние без ограничений

Но если исключить в начальном состоянии поля все последовательности клеток в одинаковом состоянии чётной длины, то он демонстрирует поведение, типичное для второго подкласса класса V (рис. 5.7.4, на рис. 5.7.5 показана разница состояний поля при изменении трёх точек).

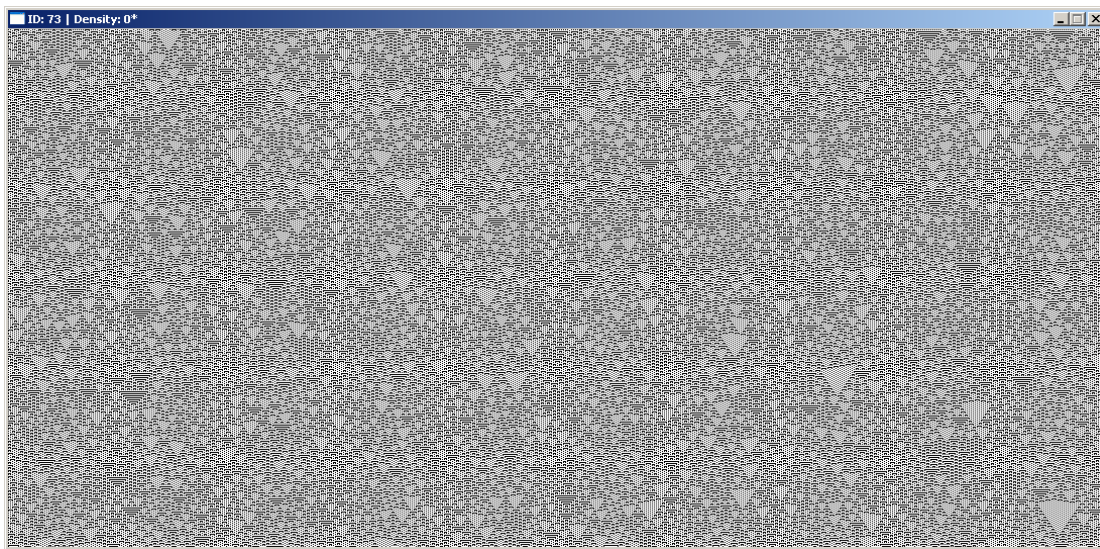


Рис.5.7.4. <73>, случайное начальное состояние специального вида

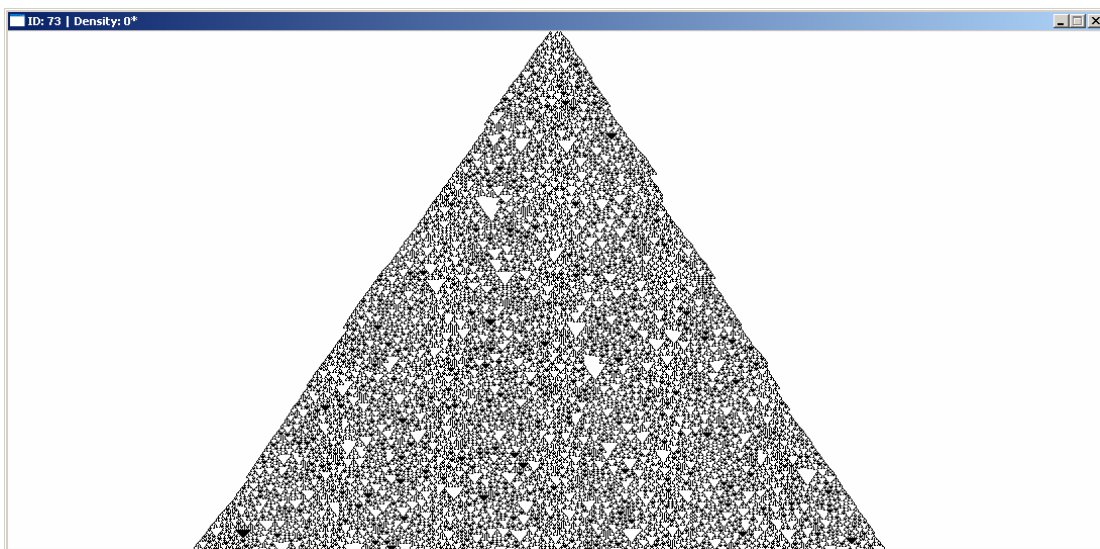


Рис.5.7.4. <73>, разница случайных начальных состояний специального вида

5.8. Выводы

В данной главе проведён анализ поведения для каждого из классов предложенной классификации.

Приведён метод определения принадлежности к каждому из классов на основе анализа поведения клеточного автомата при случайном начальном состоянии поля. Кроме того, для классов I, II, IV приведён метод определения на основе анализа таблиц переходов клеточного автомата.

Показана возможность существенного влияния строгой упорядоченности начального состояния на проявляемую сложность поведения клеточного автомата.

6. Достоинства и недостатки построенной классификации

Достоинства:

- 1) Полнота. Все 256 возможные одномерные двоичные клеточные автоматы получают конкретный класс.
- 2) Осмысленность. Классы характеризуют существенные свойства самих клеточных автоматов, а не, например, реакцию на конкретную конфигурацию начального состояния.
- 3) Относительная простота решения вопроса, к какому классу принадлежит конкретный клеточный автомат.
- 4) Возможность простого расширения на другие клеточные автоматы, например, двумерные двоичные или одномерные трёхцветные среднеарифметические.
- 5) Возможность автоматического определения класса.

Недостатки:

- 1) Нечёткое выделение подклассов в классе III.
- 2) Не отражена возможность проявления существенно более сложного поведения клеточными автоматами III класса на начальных условиях специального вида. В частности, в работе показано, что при наложении ограничений на начальные условия клеточный автомат <73> способен проявлять свойства V класса.

7. Сравнение построенной классификации с другими

7.1. Классификация С. Вольфрама

В книге С. Вольфрама [3] приведено обширное описание клеточных автоматов, проведён анализ их поведения на большом количестве примеров, предложены классы классификации.

Классы, предложенные С. Вольфрамом:

- 1) Эволюция системы заканчивается переходом всех клеток поля в одинаковое состояние.
- 2) Существует много конечных состояний, но все они состоят из набора простых структур, которые остаются неизменными или повторяются через некоторое небольшое число шагов.
- 3) Поведение сложное, во многих отношениях выглядит хаотическим.
- 4) Смесь хаоса и порядка: порождаются локальные структуры, которые перемещаются и взаимодействуют друг с другом очень сложным образом.

Отнесение конкретного клеточного автомата к какому-либо из классов затруднено, так как не указано, при каких начальных условиях ожидается указанное выше поведение. Предполагается, что класс следует выбирать по самому сложному поведению, которое удастся получить.

В книге приведены примеры типичных представителей каждого класса, но классификация не проведена полностью ни для какой из областей клеточных автоматов. Выполнить это за разумное время не представляется возможным даже для области одномерных двоичных клеточных автоматов в виду необходимости огромного объёма вычислений и сложного анализа.

Предложенная в данной работе классификация является уточнением и модификацией классификации С.Вольфрама, проведённой с целью уменьшения сложности определения класса.

Примерное соответствие классов С.Вольфрама классам, предложенным в данной работе:

- 1) Класс I.
- 2) Классы I, II, III.
- 3) Классы IV, V.
- 4) Класс IV.

Принципиальное отличие параметров классификации данной работы: вместо поведения на неопределённом начальном состоянии предложено использовать случайное начальное состояние. Это исключает необходимость перебирать все возможные состояния, пока мы не найдём то, которое позволит нам определить класс клеточного автомата.

Недостаток предложенной классификации относительно классификации С. Вольфрама: некоторые клеточные автоматы могут быть

отнесены к классу с более простым поведением чем то, которое они могут проявить на строго упорядоченных начальных условиях специального вида.

Достоинства:

- 1) Можно практически определить класс любого клеточного автомата.
- 2) Классы разбиения уточнены и расширены.

7.2. Классификация Д. Эпштейна

Д. Эпштейн в работе [4] резко критиковал классификацию С. Вольфрама, в частности, назвал её совершенно несостоятельной, так как почти невозможно за разумное время проверить принадлежность клеточного автомата к какому-либо классу для большого числа клеточных автоматов. Для решения проблемы он предложил свою классификацию двухмерных двоичных клеточных автоматов на основе возможностей порождаемых клеточным автоматом объектов к расширению и уменьшению.

Классы, предложенные Д. Эпштейном:

- 1) Все объекты расширяются: в наборе правил есть правило В1 (клетка переходит в состояние 1, если она имеет ровно одного соседа в состоянии 1).
- 2) Нет расширяющихся объектов: в наборе правил нет правил В2 или В3 (клетка переходит в состояние 1, если она имеет ровно двух / трёх соседей в состоянии 1).
- 3) Уменьшение невозможно: в наборе правил есть правила S01234 или В23/S0 (клетка сохраняет состояние 1, если у неё есть от нуля до

четырёх соседей в состоянии 1/клетка переходит в состояние 1 при наличии у неё ровно двух или трёх соседей в состоянии 1 и сохраняет это состояние, если у неё нет соседей в состоянии 1).

- 4) Возможны и расширение и уменьшение объектов: все остальные случаи.

Целью данной классификации является выделение кандидатов в универсальные клеточные автоматы. Эпштейн утверждал, что универсальные клеточные автоматы могут принадлежать только к классу 4.

Покажем, что существует универсальный клеточный автомат, относящийся к классу 3 по данной классификации. Рассмотрим двумерный двоичный клеточный автомат, представляющий собой последовательную запись состояний эволюции одномерного двоичного клеточного автомата $\langle 110 \rangle$. Такой клеточный автомат универсален, так как эквивалентен универсальному клеточному автомату $\langle 110 \rangle$. По классификации Эпштейна он относится к классу 3, так как, очевидно, расширяется и не может уменьшаться.

Также непонятно, из чего следует невозможность универсальных вычислений в клеточных автоматах классов 1 и 2, например, если почти всё поле находится в состоянии регулярной структуры, подобной порождаемой одномерным двоичным клеточным автоматом $\langle 54 \rangle$.

Таким образом, классификация Д. Эпштейна не удовлетворяет им же самим поставленным целям классификации, поэтому сравнение с ней затруднено.

Единственное, что можно сказать, это то, что достоинство такой классификации – относительная простота определения класса, а недостаток – высокая сложность расширения на другие области клеточных автоматов, кроме двумерных двоичных.

7.3. Вероятностный метод классификации клеточных автоматов

Лебедев А. в работе [5] предложил вероятностный метод классификации двумерных двоичных клеточных автоматов. Классы выделяются на основе вероятности перехода случайной клетки в состояние 1 на первом шаге эволюции при случайных начальных условиях. Для характеристики вероятности используется термин *благоприятность*, клеточные автоматы называются *играми*.

Выделяется пять классов *игр*:

- 1) Строго благоприятные.
- 2) Благоприятные в среднем.
- 3) Нейтральные в среднем.
- 4) Неблагоприятные в среднем.
- 5) Строго неблагоприятные.

Причём все системы, относящиеся к классу 1, также относятся и к классу 2, а принадлежащие к классу 5 – также входят и в класс 4.

В качестве единственного примера в работе приводится игра “Жизнь”, относящаяся по этой классификации только к классу 4.

В работе [7] разрабатывается аналогичный подход к классификации, но с использованием более сложного математического аппарата марковских процессов.

К достоинствам такой классификации, относительно предложенной в данной работе, можно отнести меньшую сложность и возможность полной автоматизации определения класса.

К недостаткам – классы характеризуют лишь первый шаг эволюции и плохо отражают сложность и особенности поведения клеточных автоматов.

7.4. Классификация А. Вюнше

В работах [8, 9] А. Вюнше предлагает для классификации клеточных автоматов использовать автоматизированное нахождение локальных структур (используется термин *глайдер* аналогично структурам, характерным для игры “Жизнь”). Для такого автоматизированного нахождения используются оценки энтропии на каждом шаге системы при случайном начальном состоянии и фильтрация локальных структур.

В результате такой классификации получаются не чёткие классы, а некоторые вещественные величины, характеризующие происходящие в системе взаимодействия. Предлагается выделить три области:

- 1) Упорядоченные системы.
- 2) Хаотические системы.
- 3) Системы со сложным поведением.

Достоинствам этого метода относится возможность полностью автоматизировать процесс определения класса и простота, с которой такой подход находит интересные для рассмотрения системы с локальными структурами.

Недостатками являются:

- 1) Отсутствие отделения сложности начального состояния от сложности поведения системы. Например, системы класса IV данной работы будут отнесены к хаотическим, несмотря на простоту их поведения.

- 2) “Сложность” поведения системы характеризуется заранее заданной формулой, то есть реально происходит лишь поиск систем с некоторым конкретным поведением, а не сложных систем в общем смысле.

7.5. Классификация на основе порождаемых структур

В работе [14] проведена классификация структур, порождаемых одномерными двоичными клеточными автоматами из точечного зародыша. Клеточные автоматы можно классифицировать на основе структур, которые они порождают из некоторого заданного начального состояния.

Достоинством такой классификации, относительно предложенной в данной работе, является чрезвычайная простота и высокая скорость определения класса клеточного автомата.

Главный недостаток – полученная таким образом классификация будет иметь очень низкую практическую полезность, так как в отличие от предложенного в данной работе, такой подход лишь поверхностно затрагивает свойства самого клеточного автомата. Например, в этом случае игра “Жизнь” (широко известный двухмерный двоичный клеточный автомат, универсальность которого доказана) окажется эквивалентной клеточному автомату, переводящему клетки из любого состояния в нулевое (самому простейшему из возможных клеточных автоматов).

7.6. Выводы

В этой главе проведён обзор пяти существующих в настоящее время принципиально различных подходов к классификации клеточных автоматов.

Проведено сравнение этих подходов с предложенным в данной работе, выделены преимущества и недостатки каждого.

Выводы по работе

Предложен метод классификации клеточных автоматов, который позволяет совместить отражение классами существенных свойств поведения с возможностью определения класса для всех клеточных автоматов выбранной области. Определение класса имеет невысокую сложность и не требует проведения специальных доказательств или больших затрат вычислительных ресурсов.

Все возможные одномерные двоичные клеточные автоматы разбиты на группы различного поведения относительно эквивалентностей инверсии, зеркального отражения и их комбинации (соответствие приведено в приложении). Все группы поведения упорядочены по классам, в соответствии с предложенной классификацией (соответствие приведено в разд. 4).

Предложен способ оценки сложности взаимодействия информации поля клеточного автомата, позволивший автоматически выделить класс с исключительно линейными взаимодействиями и разделить класс сложного взаимодействия на два подкласса с существенно отличающимися наблюдаемыми свойствами поведения.

Проведён обзор существующих в настоящее время пяти принципиально различных подходов к классификации клеточных автоматов,

для каждого из которых выделены преимущества и недостатки относительно метода, предложенного в данной работе.

Приложение. Группы эквивалентных клеточных автоматов

<0>, <255>;

<1>, <127>;

<2>, <16>, <191>, <247>;

<3>, <17>, <63>, <119>;

<4>, <223>;

<5>, <95>;

<6>, <20>, <159>, <215>;

<7>, <21>, <31>, <87>;

<8>, <64>, <239>, <253>;

<9>, <65>, <111>, <125>;

<10>, <80>, <175>, <245>;

<11>, <47>, <81>, <117>;

<12>, <68>, <207>, <221>;

<13>, <69>, <79>, <93>;

<14>, <84>, <143>, <213>;

<15>, <85>;

<18>, <183>;

<19>, <55>;

<22>, <151>;

<23>;

<24>, <66>, <189>, <231>;

<25>, <61>, <67>, <103>;

<26>, <82>, <167>, <181>;
<27>, <39>, <53>, <83>;
<28>, <70>, <157>, <199>;
<29>, <71>;
<30>, <86>, <135>, <149>;
<32>, <251>;
<33>, <123>;
<34>, <48>, <187>, <243>;
<35>, <49>, <59>, <115>;
<36>, <219>;
<37>, <91>;
<38>, <52>, <155>, <211>;
<40>, <96>, <235>, <249>;
<41>, <97>, <107>, <121>;
<42>, <112>, <171>, <241>;
<43>, <113>;
<44>, <100>, <203>, <217>;
<45>, <75>, <89>, <101>;
<46>, <116>, <139>, <209>;
<50>, <179>;
<51>;
<54>, <147>;
<56>, <98>, <185>, <227>;
<57>, <99>;
<58>, <114>, <163>, <177>;
<60>, <102>, <153>, <195>;

<62>, <118>, <131>, <145>;
<72>, <237>;
<73>, <109>;
<74>, <88>, <173>, <229>;
<76>, <205>;
<77>;
<78>, <92>, <141>, <197>;
<90>, <165>;
<94>, <133>;
<104>, <233>;
<105>;
<106>, <120>, <169>, <225>;
<108>, <201>;
<110>, <124>, <137>, <193>;
<122>, <161>;
<126>, <129>;
<128>, <254>;
<130>, <144>, <190>, <246>;
<132>, <222>;
<134>, <148>, <158>, <214>;
<136>, <192>, <238>, <252>;
<138>, <174>, <208>, <244>;
<140>, <196>, <206>, <220>;
<142>, <212>;
<146>, <182>;
<150>;

<152>, <188>, <194>, <230>;

<154>, <166>, <180>, <210>;

<156>, <198>;

<160>, <250>;

<162>, <176>, <186>, <242>;

<164>, <218>;

<168>, <224>, <234>, <248>;

<170>, <240>;

<172>, <202>, <216>, <228>;

<178>;

<184>, <226>;

<200>, <236>;

<204>;

<232>.

Список литературы

1. фон Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов. М.: Мир, 1971.
2. Гоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
3. Wolfram S. A New Kind of Science. Wolfram Media, Inc., 2002.
4. Eppstein D. Classification of Cellular Automata.
<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/ca/wolfram.html>
5. Лебедев А.В. Вероятностные методы классификации клеточных автоматов // Фундаментальная и прикладная математика. Открытые системы 2002. Том 8. №2, с. 621–626.
6. Gutowitz, H.A., Victor, J.D, Knight, B.W. Local Structure Theory for Cellular Automata // Physica D. 1987. Vol. 28, pp.18–48.
7. Gutowitz H.A. A hierarchical classification of cellular automata // Physica D. 1990. Vol. 45, pp. 136–156.
8. Wuensche A. Classifying Cellular Automata Automatically // Santa Fe Institute working paper 98–02–018.
9. Wuensche A. Classifying Cellular Automata Automatically; Finding gliders, filtering, and relating space-time patterns, attractor basins, and Z parameter // COMPLEXITY. 1999. Vol.4. no.3, pp. 47–66.

10. *Crutchfield J.P., Hanson J.E.* Turbulent Pattern Bases for Cellular Automata // *Physica D*. 1993. Vol. 69, pp. 279–301.
11. *Hanson J.E., Crutchfield J.P.* Computational mechanics of cellular automata: an example // *Physica D*. 1997. Vol. 103, pp. 169–189.
12. *Langton C.G.* Studying artificial life with cellular automata // *Physica D*. 1986. Vol. 2, pp. 120–149.
13. *Langton C.G.* Computation at the edge of chaos: phase transitions and emergent computation // *Physica D*. 1990. Vol. 42, pp. 12–37.
14. *Наумов Л.А., Шалыто А.А.* Классификация структур, порождаемых одномерными двоичными клеточными автоматами из точечного зародыша // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2005. № 5, с.137–145. <http://is.ifmo.ru/works/classif/>