

Применение деревьев для реализации массовых операций на многомерных массивах данных

Антон Банных
гр. 4539
2011

Задача и возможные применения

- Многомерный массив
- Операция $+$
- Запросы
 - Сумма на прямоугольнике
 - Прибавление к прямоугольнику
- Возможные применения
 - Обработка больших изображений и видео
 - Подсчет яркости
 - Применение фильтров
 - Базы данных

Требования к операции $+$

- Основные
 - Ассоциативность
 - Коммутативность
- Дополнительное
 - Наличие обратного
- Итог: абелева группа

Классический подход

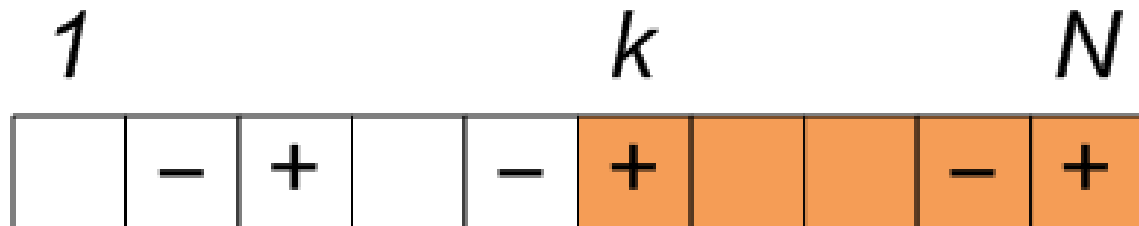
- Несогласованное дерево отрезков
 - Проблемы при обобщении на большие размерности
 - Место хранения несогласованности
 - Учет несогласованности
- Квадродерево и КД-дерево
 - Некоторые прямоугольники разбиваются $O(N)$ узлов

Одномерный случай

- Массив $A[1..N]$
- Запросы
 - Сумма на отрезке
 - Прибавление на отрезке
- Ослабленные запросы
 - Сумма на префиксе
 - Прибавление на суффиксе
- Исходные запросы выражаются через $O(1)$ ослабленных

Первый шаг сведения

- Массив $B[1..N]$
- $B_i = A_i - A_{i-1}$
- $\sum_{i=1}^k B_i = A_k$
- Прибавление к суффиксу $[k..N]$ меняет только элемент B_k



Второй шаг сведения

- Рассмотрим $\sum_{i=1}^x \sum_{j=1}^i B_j$
- Элемент i войдет в него $x - i + 1$ раз.
- Положим $C_i = -B_i(i - 1) + B_i x$
- $\sum_{i=1}^k C_i = a + bx$
- $a + bk = \sum_{i=1}^k A_i$

Выражение ослабленных запросов

- Сумма на префиксе в массиве A
 - сумма на префиксе в массиве C
- Прибавление на суффиксе в массиве A
 - изменение одного значения в C
- Построение многочлена
 - умножение на *целое* число за $O(\log n)$

Реализация

- Дерево отрезков
- Дерево Фенвика
- Асимптотика $O(\log n)$

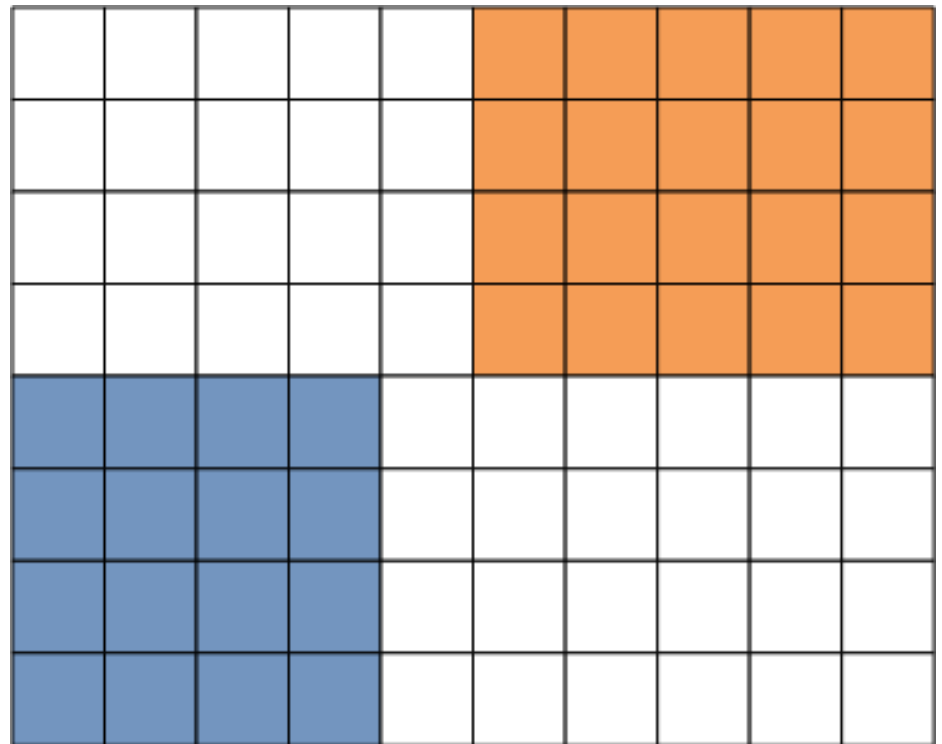
Многомерный случай

- Массив $A[1..N_1]..[1..N_d]$
- Запросы
 - Сумма на прямоугольнике
 - Прибавление на прямоугольнике
- Ослабленные запросы
 - Сумма на префиксе
 - Прибавление на суффиксе

Двумерный случай

•  – префикс

•  – суффикс



Выражение ослабленных запросов

- Каждому элементу сопоставим многочлен
- Сумма на префиксе в массиве A
– сумма на префиксе в массиве C

$$\left[\sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_d=1}^{k_d} C_{i_1 \dots i_d} \right] (k_1, \dots, k_d) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_d=1}^{k_d} A_{i_1 \dots i_d}$$

- Прибавление на суффиксе в массиве A
– изменение одного значения в C

ИТОГ

- Преобразование
 - Элементы \rightarrow многочлены
 - Один запрос $\rightarrow 2^d$ ослабленных
 - Сумма на префиксе \rightarrow сумма на префиксе
 - Прибавление на суффиксе \rightarrow изменение одного элемента
- Реализация
 - Многомерное дерево отрезков
 - Многомерное дерево Фенвика
 - Допускается разреженность
 - Асимптотика $O(\log^d n)$

Результат

- Разработан метод сведения задачи с массовыми обновлениями к хорошо изученной задаче с изменениями отдельных элементов.

Вопросы?