Построение логических схем из настраиваемых логических модулей

4-1. Реализация схем в базисе настраиваемых модулей

Совершенствование элементарной базы систем логического управления в настоящее время невозможно без использования системного подхода. В основе такого подхода лежит одновременная разработка собственно НЛМ и их математического (логического) обеспечения, которое позволяет использовать широкие функциональные возможности таких модулей. При этом наибольшие преимущества достигаются при разработке серии НЛМ, совместимых не только по электрическим, технологическим и конструктивным параметрам, но и по логическому обеспечению.

Необходимо отметить, что до последнего времени разработка элементной базы шла независимо от создания методов ее использования, так как число различных типов элементов было незначительным и существующие теоретические методы синтеза были в основном достаточны для применения элементов, выпускаемых промышленностью. С появлением большого числа разнотипных модулей с широкими функциональными возможностями, к которым неприменимы классические методы синтеза, не удается достичь эффективного их использования без разработки соответствующего логического обеспечения.

В ходе разработки такого обеспечения должен быть предложен подход к использованию НЛМ, который позволит применять разнотипные модули и серии из них с помощью единой процедуры. Это должно обеспечить наряду со схемной унификацией и повышением уровня интеграции элементной базы унификацию в области ее применения.

В настоящей главе эти вопросы рассматриваются применительно к разработке логического обеспечения НЛМ, универсальных в классе формул. В основу излагаемого подхода положены следующие предпосылки.

Любой модуль, имеющий хотя бы два входа, можно рассматривать как настраиваемый, потому что, приравнивая часть входов нулю, единице или друг другу, будем получать настройки на различные остаточные подфункции.

Рациональное применение логических модулей требует предварительного исследования всех их функциональных возможностей в том классе функций, для которого соответствующий метод реализации обеспечит использование этих возможностей.

Мы надеемся, что нам уже удалось показать особую роль бесповторных формул и соответствующих модулей. Напомним: модуль, реализующий бесповторные формулы из K букв, выполняет также и повторные формулы из K букв, имеющие ту же структуру.

Таким образом, результаты, относящиеся к модулям, реализующим путем настройки бесповторные формулы, обладают универсальностью. Поэтому при рассмотрении формул, подлежащих реализации, удобнее говорить просто о фрагментах (подформулах) длиной в K букв, а содержат ли эти фрагменты одинаковые аргументы или разные - для нас не имеет значения. Дальнейшее изложение ведется в предположении, что: а) дана некоторая нормальная формула длиной h букв, подлежащая реализации на предложенных модулях; б) структура модулей описывается бесповторными нормальными формулами или содержит их в качестве подформул, получаемых путем настройки; в) модули используются после настройки, а число их информационных входов равно K; г) базисные операции формул, на которые настраиваются модули, и формул, подлежащих реализации с помощью этих модулей, совпадают и подчиняются сочетательному закону; д) все модули имеют одинаковый «вес» (по сложности, габаритам, стоимости и т. д.); е) прямое x_i и инверсное $\bar{x}_i$ значения любой входной переменной равнодоступны, поэтому реализация формулы может выполняться с точностью до типа по PN-классификации; ж) таблица настроек для каждого типа формул содержит по одному представителю; з) ограничение на нагрузочную способность модулей не рассматривается, так как реализация в основном осуществляется в классе древовидных структур. В противном случае этот вопрос решается путем дублирования соответствующих модулей.

Отметим, что некоторые из указанных ограничений будут сняты в ходе дальнейшего изложения.

Все излагаемые ниже результаты для модулей, универсальных в классе формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$, справедливы также и для базиса $\{\&, \vee, \bar{\ }, \oplus\}$, а также для модулей, универсальных в классе всех булевых функций.

На процесс реализации булевых формул существенное влияние оказывают функциональные свойства модулей. При этом процедура реализации главным образом зависит от того, содержатся ли в записи формул, реализуемых модулями путем настройки, инверсии и универсальны или многофункциональны используемые модули в классе бесповторных формул.

Булева формула называется положительно монотонной, если в ее записи отсутствуют инверсии. В дальнейшем будем называть такую формулу монотонной.

Логические модули, структура которых описывается монотонными формулами, будем называть монотонными. Модуль, реализующий путем настройки представителей всех типов бесповторных монотонных формул из *К.* и менее букв, будем называть монотонным *К* -универсальным модулем. Модуль, реализующий путем настройки лишь некоторых" представителей типов бесповторных монотонных формул из *К* и менее букв, будем называть монотонным *К* -многофункциональным модулем. Модуль, реализующий путем настройки представителей всех типов бесповторных формул из *К* и менее букв, среди которых имеются и немонотонные, будем называть немонотонным *К* -универсальным модулем. Модуль, реализующий путем настройки лишь некоторых представителей типов бесповторных формул из *К* и менее букв, среди которых имеются и немонотонные, будем называть немонотонным *К*-многофункциональным модулем.

Ниже рассматриваются вопросы реализации булевых формул в базисе указанных разновидностей модулей.

Реализация монотонной бесповторной формулы на монотонных К-универсальных модулях. Будем представлять реализуемую формулу и бесповторные формулы, реализуемые модулем путем настройки, в виде арифметических полиномов. Такая символика позволяет отвлечься от обозначений переменных и наличия инверсий в формулах, так как она соответствует изображению формулы с точностью до типа по *К*-классификации. При этом предлагается сначала реализовать формулу с точностью до типа по указанной классификации, а затем — саму формулу.

Таким образом, процесс реализации следует начинать с представления исходной формулы и списка бесповторных формул из *К* и менее букв, реализуемых модулем путем настройки, в виде арифметических полиномов.

Выбор оптимальной стратегии реализации. Покажем, что оптимальной стратегией, обеспечивающей минимальную элементную сложность при построении схемы, является такая, при которой на каждом шаге независимо от других шагов у каждого модуля задействуется максимальное число информационных входов.

Докажем следующее утверждение: если бесповторная формула из h букв оптимально реализуется структурой, содержащей *PN*-универсальных модулей, то добавление одной буквы, соответствующей новой переменной, в любое место формулы не позволяет сократить число модулей в схеме.

Пусть формула из h букв реализуется оптимально схемой из L модулей. Добавим в формулу одну букву. Предположим, что оптимальная схема, реализующая формулу из $h+1$ букв, содержит $L-1$ модулей. Приравняем введенную букву нулю или единице. Тогда остаточная формула из h букв будет реализована схемой из $L-1$ модулей. Следовательно, исходная схема не была оптимальной, что противоречит высказанному предположению.

Так как добавление новой буквы в оптимально-реализованную формулу не приводит к упрощению схемы, то, следовательно, у каждого из модулей оптимальной схемы должно быть задействовано максимальное число информационных входов в соответствии со структурой реализуемой формулы. Поэтому стратегия реализации, при которой на некотором шаге реализуется меньшая часть формулы по сравнению с возможностями модуля, с тем чтобы на следующем шаге использовать все возможности модуля, не является оптимальной.

Таким образом, для того чтобы число модулей в схеме было минимальным, необходимо обеспечить максимальное значение числа задействованных входов у каждого из модулей в структуре на каждом шаге реализации. При этом под шагом реализации подразумевается установка очередного модуля в схему.

Высказанные соображения позволяют принять порядок реализации схемы «от входа к выходу».

При реализации бесповторных формул на модулях рассматриваемого вида отдельные шаги при движении от входа схемы к ее выходу независимы в том смысле, что, принимая оптимальное решение на каждом шаге, мы не ухудшаем окончательного результата.

Дальнейшая разработка метода реализации связана с введением понятия K -отделимого фрагмента. Произвольный отрезок формулы, включающий ее концы, являющиеся буквами, и 26 парных скобок, где $b = 0,1,2,...,$ назовем фрагментом.

В формуле из h букв заключим в скобки фрагмент из букв. Если при этом булева функция, соответствующая исходной формуле, не изменится, то назовем этот фрагмент /(-отделимым.

Пример. Фрагмент $\varphi_1 = (x_1x_2x_3 \vee x_4)x_5$ формулы $F = (x_1x_2x_3 \vee x_4)x_5x_6x_7 \vee x_8x_9$ является 5-отделимым, так как имеет место равенство $F - F',$ где $F' = [(x_1x_2x_3 \vee x_4)x_5]x_6x_7 \vee x_8x_9$, в то время как фрагмент $\varphi_2 = x_5x_6x_7 \vee x_8x_9$ не является отделимым, ввиду того что $F \neq F",$ где $F" = (x_1x_2x_3 \vee x_4)(x_5x_6x_7 \vee x_8x_9)$.

Справедливы следующие утверждения: а) произвольный фрагмент конъюнкции из K букв является K -отделимым; б) произвольный фрагмент из K букв, заключенный в парные скобки, К-отделим; в) произвольная ДНФ из K букв является K -отделимой; г) произвольная конъюнктивная нормальная форма (КНФ) из K букв является K -отделимой; д) произвольный фрагмент из K. букв, являющийся конъюнкцией скобочных выражений и булевых переменных, K -отделим; е) произвольный фрагмент из K букв, являющийся дизъюнкцией конъюнкций скобочных выражений и булевых переменных, K -отделим.

Два фрагмента булевой формулы будем называть непересекающимися, если в этих фрагментах отсутствуют общие буквы. Процесс реализации булевой формулы состоит в выделении непересекающихся K -отделимых фрагментов и замене каждого из них одной новой буквой с целью уменьшения числа букв в исходной формуле.

Процедура реализации монотонной бесповторной булевой формулы на монотонных K - универсальных модулях, обеспечивающая построение минимальной по сложности схемы.

1. Исходная формула и бесповторные формулы, реализуемые модулем путем настройки из K и менее букв, представляются в виде арифметических полиномов.
2. Выделяются путем расстановки скобок все непересекающиеся K -отделимые фрагменты; при этом формулу рассматривают слева направо.
3. Если существует только один K –отделимый фрагмент, то он реализуется путем установки модуля, настроенного на формулу, соответствующую этому фрагменту. Реализованный фрагмент заменяется в арифметическом полиноме единицей, что приводит к формированию остаточной формулы меньшей длины.
4. Если существует несколько непересекающихся K -отделимых фрагментов, то возможны две стратегии: а) реализация образующегося после каждого шага крайнего слева K -отделимого фрагмента; б) последовательная реализация всех выделенных K -отделимых фрагментов. Выделение новых фрагментов в этом случае осуществляется лишь после реализации последнего из фрагментов, найденных на предыдущем шаге. Такая последовательность реализации позволяет уменьшить «глубину» схемы.
5. Если в исходной формуле или в рассматриваемой остаточной K -отделимые фрагменты отсутствуют, то выделяются путем расстановки скобок все непересекающиеся фрагменты, имеющие максимальный суммарный ранг $\mathrm{K'(K'<K)}$.
6. Если выделен только один K '-отделимый фрагмент, то он реализуется. После этого формируется новая остаточная формула путем замены реализованного фрагмента единицей.
7. Если существует несколько K '-отделимых фрагментов, то выделяются фрагменты, заключенные в самые глубокие скобки. При этом предполагается, что каждая «завершенная» конъюнкция произвольных фрагментов, суммарный ранг которой $r > K',$ должна быть заключена в скобки.
8. Если выделен только один K '-отделимый фрагмент, заключенный в самые глубокие скобки, то он реализуется. Этот фрагмент заменяется в арифметическом полиноме единицей, что приводит к формированию остаточной формулы.
9. Если выделено несколько K '-отделимых фрагментов, заключенных в самые глубокие скобки, то возможны две стратегии: а) реализация того из этих фрагментов, который является крайним слева; б) реализация того из фрагментов, который приводит к уменьшению «глубины» схемы. Для этого буквам,

образующим формулу, присваиваются веса: буквам исходной формулы - вес, равный 0, а каждой новой букве, соответствующей реализованному фрагменту, - вес, равный максимальному весу одной из букв, входящих в этот фрагмент, увеличенному на единицу. При этом реализуется тот фрагмент, у которого максимальный вес минимален. Реализация исходной формулы завершается, если число букв в остаточной равно единице. Пример. Реализовать формулу $y=[(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_4x_5x_6 \vee x_7]x_8x_9 \equiv [(1+1)1+3+1]2$ на 3-универсальных модулях, структура которых описывается функцией $F=(z_1 \vee z_2 \vee z_3)z_4 \vee z_1z_2z_3$.

Каждый из этих модулей путем настройки реализует следующих четырех представителей типов бесповторных формул из трех букв: при $z=0$ $F=z_1z_2z_3=3$; при $z_4=1$ $F=z_1 \vee z_2 \vee z_3 \equiv 1+1+1$; при $z_3=0$ $F=(z_1 \vee z_2)z_4 \equiv (1+1)1$; при $z_3=1$ $F=z_1z_2 \vee z_4 \equiv 2+1$.

Процедура реализации:

1. Выделяем фрагмент $(1+1)1$. Остаток - $y' \equiv (1+3+1)2$.
2. Выделяем фрагмент 3. Остаток - $y'' \equiv (1+1+1)2$.
3. Выделяем фрагмент $1+1+1$. Остаток - $y'' \equiv 3$.
4. Выделяем фрагмент 3. Остаток - $y^{IV} \equiv 1$.

Реализация формулы завершена. Использовано четыре 3-универсальных модуля.
Комментарий к процедуре:
1. В изложенной процедуре реализация каждой остаточной формулы начинается с попытки выделить все X-отделимые фрагменты, и лишь в том случае, когда это невозможно, осуществляется переход к выделению фрагментов, имеющих максимальный суммарный ранг $K'(K'<K)$. Такая процедура обеспечивает реализацию на каждом шаге фрагмента максимальном длины и позволяет реализовать исходную формулу схемой с минимальным числом модулей.
2. Рассмотрим примеры, демонстрирующие, что если несколько отделимых фрагментов имеют максимальный суммарный ранг. $K'(K'<K)$, то реализация должна начинаться с фрагмента, заключенного в самые глубокие скобки. Покажем, что, если выполнять реализацию, не пользуясь этим правилом, можно получить неоптимальную схему.
Пример. Реализовать формулу y - $y=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_4x_5x_6 \vee x_7x_8x_9)$ на монотонных 4-универсальных модулях.
Так как 4-отделимые фрагменты отсутствуют, то построение схемы начинается с выделения 3-отделимых фрагментов: $y=(x_1 \vee x_2 \vee x_3)[(x_4x_5x_6) \vee (x_7x_8x_9)]$.
Таким образом, исходная формула содержит три 3-отделимых фрагмента. Если начать реализацию с крайнего слева фрагмента $\varphi_1=x_1 \vee x_2 \vee x_3$, то схема будет содержать четыре модуля. Начиная реализацию с фрагмента $\varphi_2=x_4x_5x_6$, заключенного в самые глубокие скобки, получим схему, содержащую три модуля.
Приведем пример, демонстрирующий, что если в формуле несколько отделимых фрагментов, имеющих максимальный суммарный ранг $K'(K'<K)$ и заключенных в самые глубокие скобки, то реализация формулы должна начинаться с того из этих фрагментов, у которого максимальный вес минимален. Указанный порядок реализации позволяет уменьшить «глубину» схемы.
Пример. Реализовать формулу $y=(x_1 \vee x_2x_3x_4x_5)(x_6 \vee x_7 \vee x_8) \vee x_9(x_{10} \vee x_{11} \vee x_{12})$ на монотонных 5-универсальных модулях.
Присвоим всем буквам исходной формулы вес, равный нулю. На первом шаге осуществляется реализация 5-отделимых фрагментов $\varphi_1=x_1 \vee x_2x_3x_4x_5$. При этом остаточная формула имеет вид $y'=\varphi_1(x_6 \vee x_7 \vee x_8) \vee x_9(x_{10} \vee x_{11} \vee x_{12})$.
Присвоим букве φ_1 вес, равный 1. Так как формула содержит два 4-от-делимых фрагмента, заключенных в скобки одинаковой глубины, то выбор фрагмента осуществим на основе изложенного выше правила. Для первого фрагмента максимальный вес равен 1, а для второго - 0. Поэтому первоначально реализуем фрагмент $\varphi_2=x_9(x_{10} \vee x_{11} \vee x_{12})$. При этом остаточная формула имеет вид $y''=\varphi_1(x_6 \vee x_7 \vee x_8) \vee \varphi_2$ и реализуется на последнем шаге. Таким образом, оптимальная схема содержит три модуля и имеет два яруса. При реализации на втором шаге крайнего слева фрагмента $\varphi_3=\varphi_1(x_6 \vee x_7 \vee x_8)$ формула будет реализована трехъярусной схемой, также содержащей три модуля.

Реализация монотонной повторной формулы на монотонных *К*-универсальных модулях. Процедура реализации монотонной повторной формулы на монотонных *К* -универсальных модулях практически не отличается от рассмотренной выше. Реализуемая повторная формула заменяется бесповторной формулой, содержащей то же число букв *h* и имеющей тот же арифметический полином. Полученная бесповторная формула реализуется на основе процедуры, изложенной выше.

В построенной схеме отождествляются входы в соответствии с заданной повторной формулой. Так как число букв и структура повторной формулы не отличаются от аналогичных характеристик соответствующей бесповторной формулы, то число модулей, требующихся для их реализации, одинаково. Отметим, что при этом получается вариант реализации в виде древовидной структуры, который может отличаться от минимального.

Реализация немонотонной формулы в базисе монотонных *К*-универсальных модулей. Реализация немонотонной нормальной формулы на монотонных /(-универсальных модулях при равной доступности прямых и инверсных значений входных переменных практически не отличается от рассмотренной выше. Исходная формула записывается в виде арифметического полинома, к которому применяется изложенная выше процедура реализации. На входы построенной схемы, которым в формуле соответствуют переменные с инверсией, сигналы подаются с инверсных выходов *ИИ.*

Если исходная формула не является нормальной, т. е. в ней имеются инверсии над группами переменных, то первоначально формулу необходимо привести к нормальному виду, после чего к ней применяется изложенная процедура. При приведении формулы к нормальному виду обычно многократно применяется правило де Моргана, использование которого связано с громоздкими преобразованиями. С целью упрощения этой операции предлагается следующий алгоритм.

Преобразование булевой формулы к нормальному виду. Подсчитывается число инверсий над каждой буквой и каждым знаком операции в формуле. При четном числе инверсий соответствующее обозначение не изменяется. При нечетном - меняется на дополнительное.

Отметим, что в результате указанного преобразования число букв в формуле не изменяется и поэтому оценить сложность схемы можно непосредственно по заданной формуле, не приводя ее к нормальному виду.

Выше был рассмотрен случай реализации при условии, что прямые и инверсные выходы *ИИ* равнодоступны. В случае, когда доступны лишь прямые выходы *ИИ,* сначала реализуется соответствующая положительно монотонная формула, а после этого на «инверсных» входах устанавливаются инверторы.

Реализация булевой формулы на немонотонных *К*-универсальных модулях. Выше было показано, что не монотонность исходной формулы не приводит к существенному изменению процедуры, предложенной для реализации монотонной формулы. Покажем, что появление инверсий в списке формул, реализуемых модулем при соответствующей настройке, требует значительного дополнения этой процедуры.

Разработка этой процедуры основывается на свойстве универсальности используемых модулей, обеспечивающем в таблице настроек для каждой из формул наличие соответствующей ей дополнительной формулы, по крайней мере с точностью до типа по *PN*-классификации.

Сформулируем ряд определений, которые будут использованы в дальнейшем.

Формула $f^*(x_1,...,x_h)$ называется дополнительной для формулы $f(x_1,...,x_h)$, если для соответствующих им булевых функций справедливо равенство

$$f^*(x_1,...,x_h) = \overline{f(x_1,...,x_h)} \qquad (4\text{-}1)$$

Формула, дополнительная к бесповторной формуле, также является бесповторной и содержит то же число букв. Структурной будем называть схему, отражающую число модулей, связи между ними и формулы, реализуемые этими модулями при настройке их с точностью до типа по *NPN*-классификации. Вход модуля, для которого в реализуемой этим модулем формуле соответствующая буква инверсна, будем называть инверсным.

Процедура реализации булевой формулы на немонотонных *К*-универсальных модулях. Процесс реализации формулы в этом случае состоит из двух этапов. На первом этапе без учета инверсий в заданной формуле и формулах, реализуемых модулем при соответствующей настройке, с помощью процедуры, изложенной выше для монотонных *К* -универсальных модулей, от входа к выходу строится структурная схема.

На втором этапе структурная схема преобразуется от выхода к входу с учетом инверсий, входящих в описание формул базиса, с целью определения конкретных формул, реализуемых модулями в схеме. Окончательная настройка модулей определяется по правилу: если рассматриваемый модуль является выходным или от выхода рассматриваемого модуля до выхода схемы сигнал «проходит» четное число инверсий, то этот модуль должен быть настроен на реализацию формулы, принадлежащей одному *PN*-типу с положительно монотонной формулой, приписанной модулю на первом этапе; если от выхода рассматриваемого модуля до выхода схемы сигнал «проходит» нечетное число инверсий, то этот модуль должен быть настроен на реализацию формулы, принадлежащей к одному типу с формулой, дополнительной к положительно-монотонной формуле, приписанной модулю на первом этапе. Указанное правило распространяется и на входы схемы: если прямые и инверсные выходы *ИИ* равнодоступны, то тот вход схемы, от которого сигнал до ее выхода «проходит» четное число инверсий, получает его с выхода источника, соответствующего инверсности буквы в реализуемой формуле, а тот вход схемы, от которого сигнал до ее выхода «проходит» нечетное число инверсий, - с выхода источника, противоположного инверсности буквы в формуле.

В случае, когда доступны лишь прямые выходы *ИИ,* на тот вход схемы, от которого сигнал до ее выхода «проходит» четное (нечетное) число инверсий, размещают инверторы, если соответствующая буква в формуле инверсна (безынверсна).

Выбор выходов *ИИ* или входов, на которых должны быть установлены инверторы, может быть осуществлен также путем сравнения заданной формулы и формулы нормального вида, описывающей структуру схемы после выполнения второго этапа.

Все сказанное выше относилось к реализации бесповторном формулы. В случае, если реализуемая формула повторна, построение схемы выполняется аналогично, а после завершения синтеза осуществляется отождествление входов.

Комментарий к процедуре: 1) в случае, если модуль при соответствующей настройке может реализовать несколько различных формул, принадлежащих одному *PN*-типу, то выбор одной из них связан с перебором. Для устранения этого вида перебора может быть введено какое-либо правило, состоящее, например, в том, что выбирается первая из списка этих формул; 2) в случае, если в составе дизъюнкции или конъюнкции в формуле, реализуемой последующим модулем при его настройке, часть букв инверсна, то возможен перебор на втором этапе реализации, при подключении предыдущего модуля. Для устранения этого вида перебора также может быть введено соответствующее правило выбора.

При равнодоступности прямых и инверсных выходов *ИИ* и одинаковой сложности всех используемых модулей вне зависимости от объема перебора сложность получаемых схем не изменяется. Если доступны лишь прямые выходы *ИИ,* то в зависимости от объема перебора изменяется число инверторов на входе схемы.

Пример. Реализовать формулу

$$f = [\bar{z}_1\bar{z}_2 \vee z_3z_4z_5z_6 \vee (z_7z_8z_9 \vee \bar{z}_{10} \vee \bar{z}_{11})z_{12}z_{13}](\bar{z}_{14} \vee \bar{z}_{15})$$

на немонотонных 3-универсальных модулях, реализующих путем настройки следующие формулы:

$$\varphi_1 = \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_3; \varphi_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\bar{x}_3; \varphi_3 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3; \varphi_4 = x_1x_2x_3,$$

предполагая, что прямые и инверсные выходы *ИИ* равнодоступны. Запишем арифметические полиномы рассматриваемых формул:

$$f \equiv [2+4+(3+1+1)2](1+1);$$

$$\varphi_1 \equiv 2+1; \varphi_2 \equiv (1+1)1; \varphi_3 \equiv 1+1+1; \varphi_4 \equiv 3;$$

Первый этап (рис. 4-1,а):

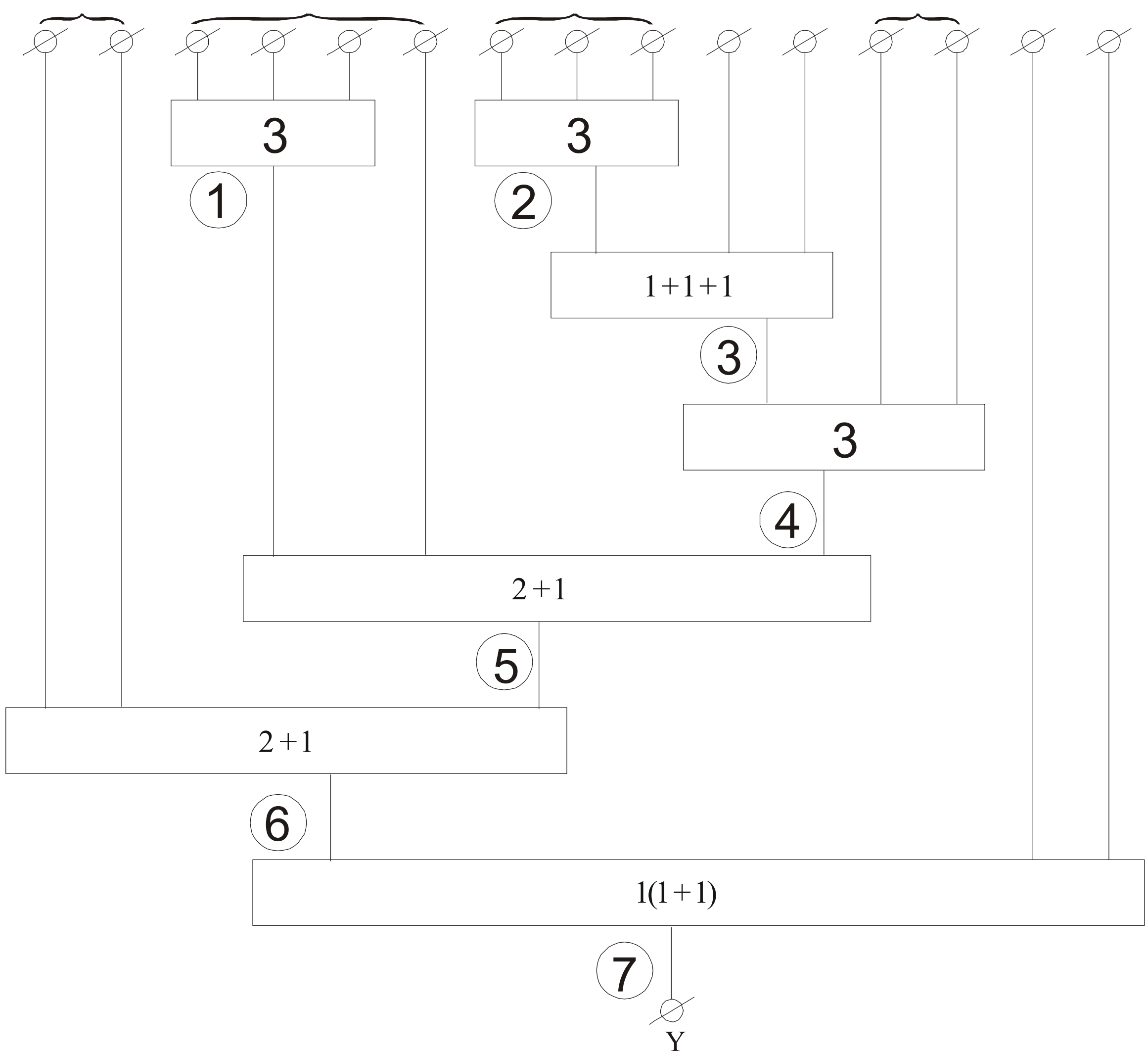
1. Выделяем фрагмент 3 и устанавливаем первый элемент. Остаток
$$f_1 \equiv [2+2+(3+1+1)2](1+1).$$
2. Выделяем фрагмент 3 и устанавливаем второй элемент. Остаток
$$f_2 \equiv [2+2+(1+1+1)2](1+1).$$
3. Выделяем фрагмент 1+1+1 и устанавливаем третий элемент. Остаток
$$f_3 \equiv (2+2+3)(1+1).$$

4. Выделяем фрагмент 3 и устанавливаем четвертый элемент. Остаток
$$f_4 \equiv (2+2+1)(1+1).$$
5. Выделяем фрагмент 2+1 и устанавливаем пятый элемент. Остаток
$$f_5 \equiv (2+1)(1+1).$$
6. Выделяем фрагмент 2+1 и устанавливаем шестой элемент. Остаток
$$f_6 \equiv 1(1+1).$$
7. Выделяем фрагмент 1(1+1) и устанавливаем седьмой элемент. Остаток
$$f_7 \equiv 1.$$

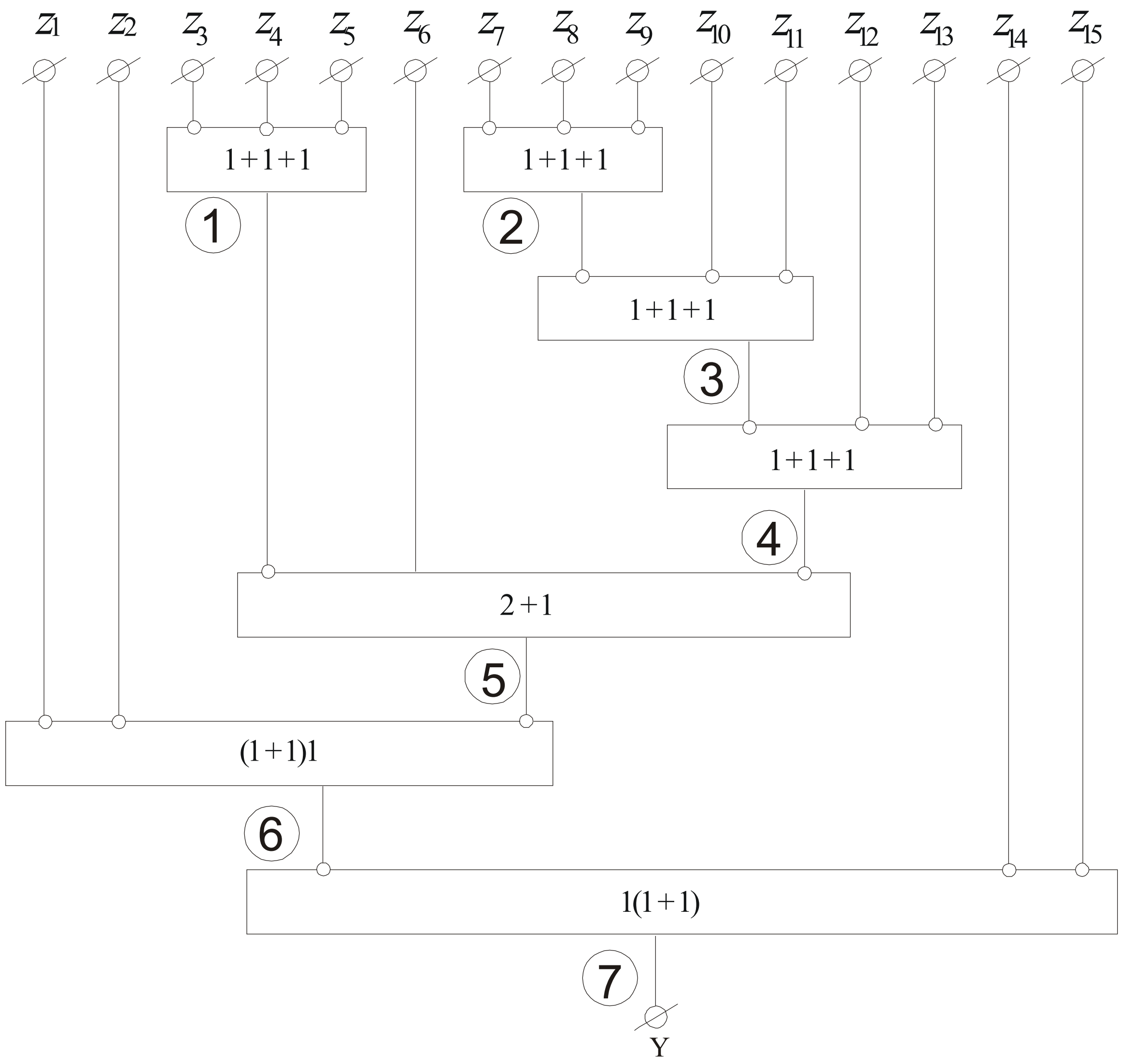
Второй этап:

7. Настройка седьмого модуля не изменяется:
$$\overline{x}_3(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1).$$
6. Число инверсий до выхода схемы нечетно. Настройка шестого модуля изменяется на дополнительную: $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3$.
5. Число инверсий до выхода схемы четно. Настройка пятого модуля не изменяется : $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$.
4. Число инверсий до выхода схемы нечетно. Настройка четвертого модуля не изменяется: $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$.
3. Число инверсий до выхода схемы нечетно. Настройка третьего модуля не изменяется: $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$.
2. Число инверсий до выхода схемы нечетно. Настройка четвертого модуля не изменяется: $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$.

А) [2 + 4 + (3 + 1 + 1) 2] (1+1)



Б)


z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 z_9 z_{10} z_{11} z_{12} z_{13} z_{14} z_{15}
1+1+1
1
1+1+1
2
1+1+1
3
1+1+1
4
2+1
5
(1+1)1
6
1(1+1)
7
Y

В)

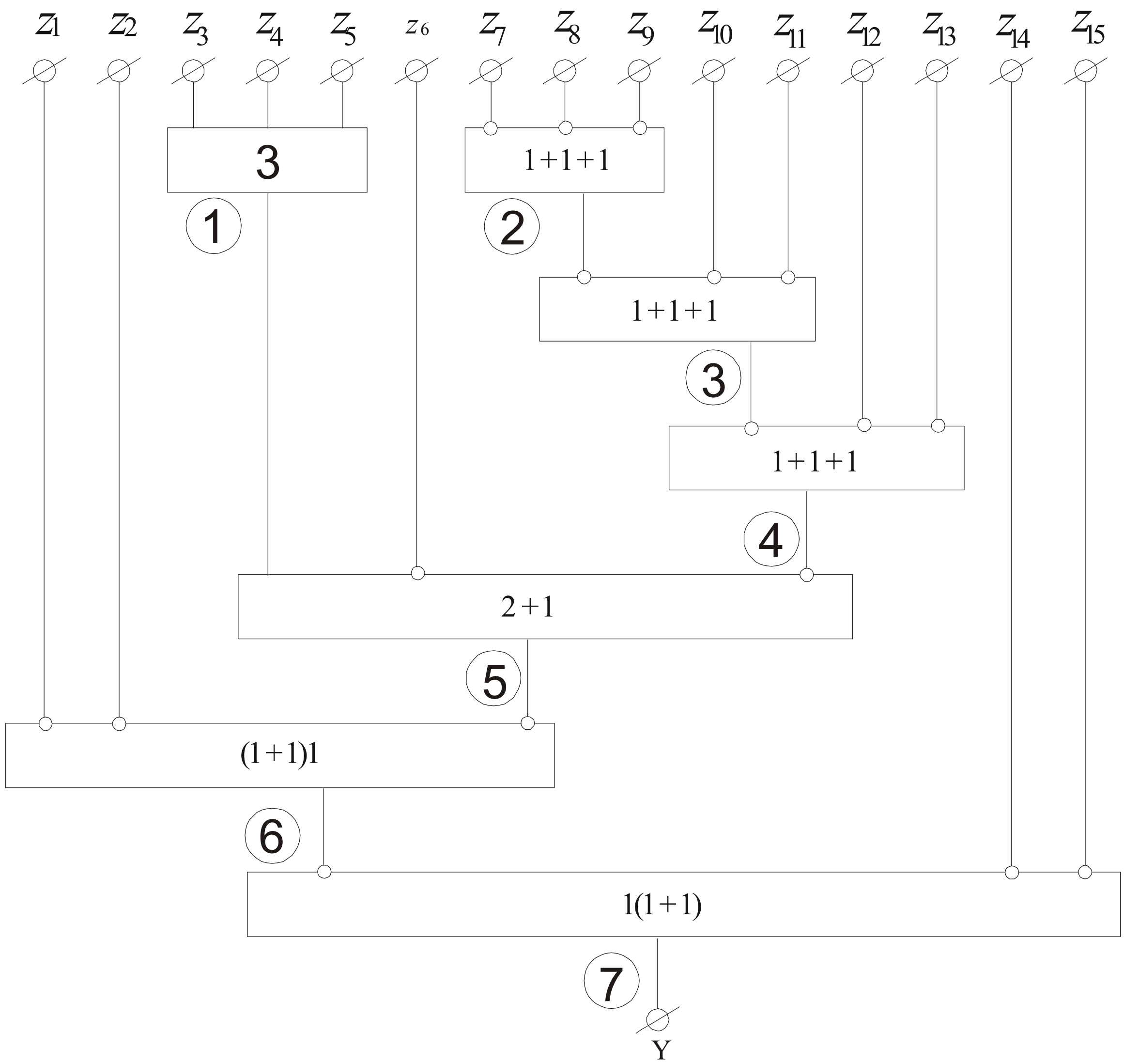


Рис. 4-1. Реализация булевой формулы на немонотонных универсальных модулях: *а* - построение структурной схемы; б - первый способ корректировки структурной *в* - второй способ корректировки структурной схемы

1. Здесь возможны два варианта: а) при подключении первого модуля к инверсному входу пятого модуля число инверсий от выхода первого модуля до выхода схемы нечетно, и поэтому его настройка не изменяется: $\bar x_1 \vee \bar x_2 \vee \bar x_3$ (рис. 4-1,6). Определим формулу, реализуемую построенной схемой:

$$f=\overline{(\bar z_1\vee\bar z_2)\overline{\overline{(\bar z_3\vee\bar z_4\vee\bar z_5)}z_6\vee\overline{\overline{\overline{\bar z_7\vee\bar z_8\vee\bar z_9}\vee\bar z_{10}\vee\bar z_{11}}\vee\bar z_{12}\vee\bar z_{13}}}}(\bar z_{14}\vee\bar z_{15})=$$
$$=[z_1z_2\vee z_3z_4z_5z_6\vee(z_7z_8z_9\vee\bar z_{10}\vee\bar z_{11})z_{12}z_{13}](\bar z_{14}\vee\bar z_{15})$$

Из сопоставления полученной формулы с заданной следует, что на первый и второй входы схемы сигналы должны поступать либо через инверторы, либо с инверсных выходов *ИИ;*

б) при подключении первого модуля к безынверсному входу пятого модуля число инверсий от выхода первого модуля до выхода схемы четно, и поэтому его настройка не изменяется: $x_1x_2x_3$ (рис. 4-1, в).

Определим формулу, реализуемую построенной схемой:

$$f=\overline{(\bar z_1\vee\bar z_2)z_3z_4z_5z_6\vee\overline{\overline{\overline{\overline{\bar z_7\vee\bar z_8\vee\bar z_9}\vee\bar z_{10}\vee\bar z_{11}}\vee\bar z_{12}\vee\bar z_{13}}}}(\bar z_{14}\vee\bar z_{15})=$$
$$=[z_1z_2\vee z_3z_4z_5\bar z_6\vee(z_7z_8z_9\vee\bar z_{10}\vee\bar z_{11})z_{12}z_{13}](\bar z_{14}\vee\bar z_{15})$$

Из сопоставления полученной формулы с заданной следует, что на первый, второй и шестой входы схемы сигналы должны поступать либо через инверторы, либо с инверсных выходов *ИИ*.

Реализация булевых формул на немонотонных *К*-универсальных модулях, реализующих при настройке всех представителей *Р*-типов бесповторных формул. Пусть заданная формула реализуется на модулях, универсальных в классе всех представителей *Р*-типов бесповторных формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$. При *К = 2* такой модуль реализует представителей шести *Р*-типов бесповторных формул из двух букв: $y_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2$; $y_2 = \bar{x}_1 x_2$; $y_3 = x_1 x_2$; $y_4 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$; $y_5 = \bar{x}_1 \vee x_2$; $y_6 = x_1 \vee x_2$, а при *К* = 3 модуль реализует представителей 20 *Р*-типов бесповторных формул из трех букв.

Для таких модулей характерно, что: а) при их использовании процесс реализации выполняется в один этап от «входа к выходу»; б) даже в случае неравной доступности выходов *ИИ* нет необходимости в установке инверторов на входе схемы.

Процесс реализации при использовании таких модулей сводится к последовательному выделению *К* -отделимых фрагментов, каждый из которых реализуется с точностью до требуемой подформулы.

Пример. Реализовать формулу $y = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)x_3 \vee x_4\bar{x}_5$ в базисе 3-универсальных модулей рассматриваемого типа.

1. Выделяем фрагмент $\varphi_1 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)x_3$ и реализуем его.

Остаток $y' = \varphi_1 \vee x_4\bar{x}_5$

2. Выделяем фрагмент $\varphi_2 = \varphi_1 \vee x_4\bar{x}_5$ и реализуем его. Построение схемы закончено (рис. 4-2).

Реализация булевых формул на монотонных *К₁*-многофункциональных модулях. Процедура реализации булевой формулы монотонных $К_1$-многофункциональных модулях во многом близка к процедуре реализации на монотонных $К_1$-универсальных модулях. Однако, если при использовании $К_1$-универсальных модулей любой $К_1$-отделимый фрагмент может быть реализован Виним модулем, то при применении $К_1$-многофункциональных модулей, универсальных в классе формул из *К* букв, одним модулем может быть реализован лишь любой *К*-отделимый фрагмент $(K \le K_1)$, а из всех K^*-отделимых фрагментов $(K < K^* \le K_1)$ одним модулем могут быть реализованы лишь те из них, представители типов которых входят в таблицу настроек.

Основная идея излагаемого подхода, как и в случае использования универсальных модулей, состоит в том, чтобы на каждом шаге выделялся и реализовался отделимый фрагмент наибольшей длины, совпадающий с формулами, приведенными в таблице настроек. Отличие излагаемого подхода от реализации в базисе универсальных модулей состоит в том, что при $K_1 > K$ перед реализацией выделенного фрагмента необходимо выполнить сравнение его с формулами, входящими в таблицу настроек. Если в таблице настроек формула, соответствующая выделенному фрагменту, отсутствует, то, следовательно, этот фрагмент не может быть реализован. Поэтому некоторые шаги процедуры в этом случае могут быть нерезультативными, в то время как при реализации на универсальных модулях каждый из шагов результативен.

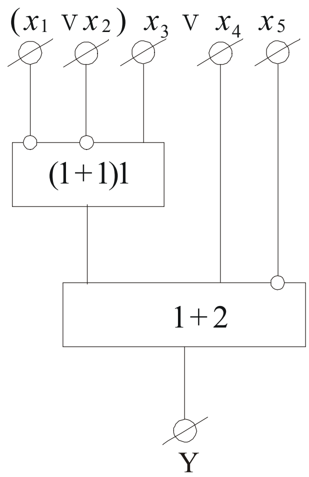


Рис. 4-2. Реализация булевой формулы на немонотонных универсальных модулях, реализующих всех представителей *Р*-типов бесповторных формул

Если некоторый шаг процедуры, связанный с выделением фрагмента длиной, большей *К,* заканчивается безрезультатно, то этот факт еще не свидетельствует о том, что фрагменты этой длины не могут быть выделены. В этом случае должно быть выполнено новое выделение фрагментов этой же длины, которое может закончиться реализацией выделенных фрагментов. Таким образом, при реализации формул на многофункциональных модулях возможна разновидность перебора, которая отсутствовала при использовании универсальных модулей.

Параметр K_1 для многофункционального модуля показывает, от какого максимального числа букв модуль при настройке реализует хотя бы одну бесповторную формулу.

Для того чтобы произвольная формула могла быть реализована на K_1-многофункциональных модулях при условии равнодоступности прямых и инверсных выходов *ИИ,* этот модуль должен быть по крайней мере 2-универсальным, т. е. он должен быть способен при настройке реализовать формулы 2 и 1 + 1.

Реализация булевой формулы в базисе немонотонных K_1-многофункциональных модулей. В силу того что рассматриваемые модули немонотонны, процесс реализации должен состоять из-за двух этапов, а ввиду того что модуль K_1-многофункционален, процедура выполнения первого этапа должна совпадать с рассмотренной выше.

Однако специфика этого случая состоит в том, что если некоторая формула, использованная на первом этапе синтеза, на втором этапе должна быть заменена на дополнительную, а дополнительная формула в таблице настроек отсутствует, то второй этап реализации не завершается и необходимо вновь переходить к первому этапу, строя новую структурную схему.

Таким образом, если для модулей, рассмотренных выше, удавалось добиться оптимальной реализации, пользуясь процедурой, в которой шаги независимы, то в данном случае нарушается принцип независимости отдельных шагов.

Устранить указанный недостаток можно в том случае, если выбрать такие модули, у которых в таблице настроек для каждой формулы имеется дополнительная, по крайней мере с точностью до *PN*-типа. Если в таблице настроек модуля не каждая из формул имеет дополнительную, то использовать все логические возможности модулей удается, если условно ввести в таблицу настроек для каждой из формул дополнительную и применять их на первом этапе реализации наравне с реально существующими.

При этом, если в ходе первого этапа требуется использовать условно введенную формулу, то в случае, когда на втором этапе она должна быть изменена на дополнительную, процесс реализации сходится, а в случае, когда изменение настройки не требуется, процесс не сходится.

Процесс реализации упрощается и обязательно сходится при ограничении таблицы настроек и использовании только тех формул, которые имеют дополнительные, что, естественно, приводит к некоторому снижению логической эффективности модулей.

Второй этап может быть завершен, если на выходе модуля, который не позволяет закончить реализацию, установить инвертор; однако этот путь не является рекомендуемым, так как добавляется еще один тип элементов, вес которых отличен от веса модулей.

4-2. ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ

Пусть задана монотонная бесповторная формула из *h* букв и монотонные *К*-универсальные модули. Требуется определить, нижнюю и верхнюю оценки числа модулей $L(h;K)$, необходимых для реализации заданной формулы.

В работе [5] показано, что искомые оценки имеют следующий вид:

$$\left]\frac{h-1}{K-1}\right[\le L(h;K) \le \left]\frac{2(h-1)}{K}\right[. \qquad (4\text{-}2)$$

Анализ оценок сложности. Приведенные оценки отражают не свойства того или иного метода реализации (при «хорошем» методе - нижняя, а при «плохом» - верхняя), а объективные свойства реализуемых формул и используемых модулей.

Наличие интервала, задаваемого верхней и нижней оценками, при фиксированных *h и К* определяется видом реализуемой формулы, так как при *h* = const существует *S(h)* различных *PN*-типов формул, некоторые из которых имеют структуру, «изоморфную» структуре используемого модуля, что позволяет выполнять реализацию с числом элементов, близким или равным нижней оценке, а для других формул этот «изоморфизм» отсутствует и реализация выполняется с числом элементов, равным или близким верхней оценке.

Рассмотрим отношение

$$\frac{L_B}{L_H} \approx 2 \cdot \frac{K-1}{K} < 2. \qquad (4\text{-}3)$$

Из этого отношения следует, что при K = const сложность наиболее «сложной» формулы из h букв, определяемая числом модулей, требующихся для ее реализации, не превосходит более чем в два раза сложности наиболее «простой» формулы из того же числа букв.

Продемонстрируем высказанное утверждение на примерах. Число модулей, необходимое для реализации формул из пяти букв на 3-универсальных модулях, удовлетворяет неравенству

$$2 = \left]\frac{5-1}{3-1}\right[\le L(5;3) \le \left]\frac{2(5-1)}{3}\right[= 3.$$

При этом из представителей 24 РЛ/-типов бесповторных формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ 22 требуют двух модулей, а два «неизоморфных» представителя $y_1 = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \vee x_5$ и $y_2 = (x_1 x_2 \vee x_3 x_4) x_5$ - трех модулей.

Все представители 66 *PN*-типов таких формул из шести букв реализуются по нижней оценке, несмотря на то что верхняя оценка равна четырем:

$$3 = \left]\frac{6-1}{3-1}\right[\le L(6;3) \le \left]\frac{2(6-1)}{3}\right[= 4.$$

Из представителей 180 *PN*-типов таких формул из семи букв 24 реализуются по верхней оценке, а остальные - по нижней:

$$3 = \left]\frac{7-1}{3-1}\right[\le L(7;3) \le \left]\frac{2(8-1)}{3}\right[= 5.$$

Из представителей 522 *PN* -типов формул из восьми букв только четыре реализуются по верхней оценке:

$$4 = \left]\frac{8-1}{3-1}\right[\le L(8;3) \le \left]\frac{2(8-1)}{3}\right[= 5.$$

Необходимо отметить, что одна и та же формула может быть «сложной» при использовании одних модулей (требовать для своей реализации числа модулей, совпадающего с верхней оценкой) и «простой» при ее реализации на других модулях (требовать числа модулей, совпадающего с нижней оценкой). Например, формула, которой соответствует полином

$$F \equiv [(4+4)(1+1+1)+(4+4)(1+1+1)](1+1+1),$$

является «сложной» при $K = 7$ и «простой» при K = 8.
В табл. 4-1 приведены значения числа букв Л, для которых могут быть найдены формулы, требующие для своей реализации числа модулей, определяемого по верхней оценке.

Таблица 4-1

Значения числа букв h в формулах, реализуемых по верхней оценке

Универсальность модуля K	Число модулей L										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17
4	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
5	3	6	8	11	13	16	18	21	23	26	28
6	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
7	4	8	11	15	18	22	25	29	32	36	39
8	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
9	5	10	14	19	23	28	32	37	41	46	50

10	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56
11	6	12	17	23	28	34	39	25	50	56	61

Приведем пример формулы, реализуемой по верхней оценке. Такая формула для *К = 5,* h=13, L= 5 (табл. 4-1) имеет следующий вид:

$$y = [(x_1x_2x_3 \vee x_4x_5x_6)(x_7 \vee x_8) \vee x_9x_{10}x_{11}](x_{12} \vee x_{13}).$$

Оценки сложности реализации в базисе K_1-многофункциона-льных модулей. Определим оценки сложности предстоящей реализации булевой формулы из h букв на K_1-многофункцио-нальных модулях, универсальных в классе формул из *К.* букв $(K \geq 2)$.

Нижняя оценка. Минимальное число модулей для реализации заданной формулы из h букв требуется в том случае, когда у каждого модуля используются все K_1 информационных входов; при этом

$$L_{\min}(h; K; K_1) = \left]\frac{h-1}{K_1-1}\right[. \qquad (4\text{-}4)$$

Верхняя оценка. Если K_1-многофункциональный модуль универсален в классе бесповторных формул из *К* букв, то этот модуль допускает использование не худшее, чем соответствующий *К*-универсальный модуль, поэтому. Таким образом, для K_1-многофункциональных модулей справедливо неравенство

$$\left]\frac{h-1}{K_1-1}\right[\leq L(h; K; K_1) \leq \left]\frac{2(h-1)}{K}\right[. \qquad (4\text{-}6)$$

Очевидно, что чем ближе значения *К* и K_1 у многофункционального модуля, тем меньше различие между верхней и нижней [оценками сложности предстоящей реализации. При $K_1 = K$ разность между верхней и нижней оценками минимальна. Следовательно, чем ближе многофункциональный модуль к универсальному, тем больше точность предсказания результатов реализации.

Оценки сложности реализации булевых формул в базисе настраиваемых модулей, универсальных в классе ДНФ. В § 2-2 отмечалось, что для многих классов управляющих логических устройств характерно, что их алгоритмы описываются формулами, заданными в ДНФ. С другой стороны, модули, универсальные в классе ДНФ из *К* букв, обладают более простой внутренней структурой и меньшим числом внешних выводов по сравнению с модулями, универсальными в классе произвольных формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ из *К* букв. Кроме того, такие модули могут быть использованы также и для реализации булевых функций, заданных в виде произвольных скобочных формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$, причем процедура реализации в этом базисе более проста по сравнению с соответствующей процедурой использования *К*-универсальных модулей.

Приведем без доказательства оценки сложности реализации формул в базисе рассматриваемых модулей.

1. *Оценки сложности реализации произвольной ДНФ* из А' букв на модулях, универсальных в классе ДНФ из *К'* букв:

$$\left]\frac{h'-1}{K'-1}\right[\leq L \leq \left]\frac{h'-1}{\left[\frac{K'}{2}+1\right]}\right[, (4\text{-}7)$$

где []-символ округления до ближайшего меньшего целого числа.

2. *Оценки сложности реализации системы формул,* представленных в ДНФ, на модулях, универсальных в классе ДНФ из *К'* букв.

Пусть задана система из *N* формул $y_1, y_2, ..., y_N$, представленных в ДНФ, число букв в правых частях которых соответственно равно $h_1', h_2', ..., h_N'$. Введем обозначение $\sum_{i=1}^{N} h_i' = H'$. Число модулей, требующихся для реализации этой системы формул, удовлетворяет неравенству

$$\left]\frac{H'-N}{K'-1}\right[\le L \le \left]\frac{H'-N}{\left[\frac{K'}{2}+1\right]}\right[+ N-1. \qquad (4\text{-}8)$$

3. Оценки сложности реализации произвольной формулы в базисе $\{\&,\vee,\bar{\ }\}$ из h букв на модулях, универсальных в классе ДНФ из K' букв.

Произвольная скобочная формула в базисе $\{\&,\vee,\bar{\ }\}$ из h букв, число скобок в которой равно *c,* может быть реализована с помощью рассматриваемых модулей только при представлении ее в виде системы из

$$N=\frac{c}{2}+1 \qquad (4\text{-}9)$$

ДНФ, суммарное число букв в правых частях которых

$$H'=h+\frac{c}{2}. \quad (4\text{-}10)$$

Подставляя найденные значения N и H' в неравенство (4-8), получим соотношение

$$\left]\frac{h-1}{K'-1}\right[\le L \le \left]\frac{h-1}{\left[\frac{K'}{2}+1\right]}\right[+ \frac{c}{2}. \qquad (4\text{-}11)$$

4. *Оценки сложности реализации системы произвольных формул в базисе* $\{\&,\vee,\bar{\ }\}$ из h букв на модулях, универсальных в классе ДНФ из K' букв.

Пусть задана система из N формул $y_1, y_2, ..., y_N,$ число букв и скобок в правых частях которых соответственно равно $h_1, h_2 ..., h_N$ и $c_1, c_2, ..., c_N$. Введем обозначения $\sum_{i=1}^{N} h_i = H; \sum_{i=1}^{N} c_i = C$.

В этом случае справедливо соотношение

$$\left]\frac{H-N}{K'-1}\right[\le L \le \left]\frac{H-N}{\left[\frac{K'}{2}+1\right]}\right[+ \frac{c}{2}+N-1. \qquad (4\text{-}12)$$

Оценки сложности реализации булевых формул в базисе микросборок. Пусть имеется микросборка, содержащая набор из N не связанных между собой модулей, универсальных в классе формул из $K_N, K_{N-1}, ..., K_1$ букв. Требуется определить оценки сложности реализации булевой формулы из h букв, выраженные в числе этих микросборок.

Нижняя оценка. Максимальное число букв, для которого может быть реализована формула в базисе рассматриваемой микросборки, определяется из соотношения

$$K=\left(\sum_{i=1}^{N} K_i\right)-(N-1). \qquad (4\text{-}13)$$

При этом

$$L^{ниж} = \left]\frac{h-1}{K-1}\right[= \left]\frac{h-1}{\left(\sum_{i=1}^{N} K_i\right)-N}\right[. \qquad (4\text{-}14)$$

Верхняя оценка. Простейшая верхняя оценка имеет следующий вид:

$$L^{верх} = \left]\frac{\left]\frac{2(h-1)}{K^{\min}}\right[}{N}\right[= \left]\frac{2(h-1)}{NK^{\min}}\right[, \qquad (4\text{-}15)$$

где $K^{\min} = \min(K_N, ..., K_1)$.

В работе [4] найдены условия, при выполнении которых эта оценка может быть снижена:

1. Если выполняется неравенство

$$K^{\min} \geq \frac{K^{\max}}{2} + 1, \qquad (4\text{-}16)$$

то справедливо соотношение

$$L^{верх} \geq \left]\frac{2(h-1)}{NK^{\max}}\right[, \qquad (4\text{-}17)$$

где $K^{\max} = \max(K_N, ..., K_1)$.

Пример. Для набора модулей $K_1 = 4; K_2 = 3; K_3 = 3$ выполняется неравенство (4-16) и поэтому справедливо соотношение

$$L^{верх} = \left]\frac{2(h-1)}{3 \cdot 4}\right[.$$

Для набора модулей $K_1 = 4; K_2 = 3; K_3 = 2$ неравенство (4-16) не выполняется, и поэтому соотношением (4-17) в данном случае воспользоваться нельзя.

2. Если выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned} &K^{\min} \geq \left]\frac{K^{\max}}{2}\right[; \\ &\frac{\sum_{i=1}^{N} K_i}{N} \geq \frac{K^{\max}}{2} + 1, \end{aligned}\right\} (4-18)$$

то справедливо соотношение

$$L^{верх} = \left]\frac{2(h-1)}{NK^{\max}}\right[. \qquad (4\text{-}19)$$

Пример. Для микросборки, содержащей модули $K_1 = 4; K_2 = 3; K_3 = 2$, выполняются неравенства (4-18), и поэтому

$$L^{верх} = \left]\frac{2(h-1)}{3 \cdot 4}\right[= \left]\frac{h-1}{6}\right[.$$

Интересно отметить, что для этой микросборки

$$K = \left(\sum_{i=1}^{N} K_i\right) - (N-1) = 7$$

и поэтому

$$L^{нижж} = \left]\frac{h-1}{7-1}\right[= \left]\frac{h-1}{6}\right[.$$

Таким образом,

$$L = \left]\frac{h-1}{6}\right[.$$

3. Если неравенства по пп. 1 и 2 не выполняются, то верхняя оценка может быть получена следующим образом: для некоторого подмножества N' модулей микросборки, включающего в себя модуль с $K^{\min}$, доказывается универсальность этого подмножества в классе формул, после чего оно рассматривается как новый модуль. Таким образом, формируется новый набор модулей, содержащий $N — N'$ исходных модулей и условно сформированный модуль. Выбор указанного подмножества производится так, чтобы условия, сформулированные в пп. 1 и 2, выполнялись при максимально,

возможном значении произведения $(N - N'-1)(K^{\max})'$, где $(K^{\max})'$ - максимальное значение K для модулей нового набора.

Если после первого шага формирования набора условия, указанные в пп. 1 и 2, не выполняются, то процедура по пункту 3 может быть повторена многократно, до тех пор пока эти условия не будут выполнены. При этом полученные значения верхней оценки не должны быть выше значения, вычисленного на основе соотношения (4-15).

Пример. Пусть задана микросборка, содержащая модули $K_1 = 4; K_2 = 2; K_3 = 2$. Определить верхнюю оценку сложности реализации схемы в базисе этой микросборки.

Для этого набора модулей условия, указанные в пп. 1 и 2, не выполняются. Поэтому воспользуемся процедурой, изложенной в п. 3.

Известно, что модули $K_2 = 2$ и $K_3 = 2$ реализуют любую формулу из трех букв, и поэтому можно считать, что имеется модуль, универсальный в классе формул из трех букв, $K_4 = 3$. Для нового набора $K_1 = 4; K_4 = 3$. Так как для этого набора выполняются условия п. 1, то поэтому

$$L^{верх} = \left]\frac{2(h-1)}{2\cdot 4}\right[.$$

Необходимо отметить, что модули $K_1 = 4$ и $K_2 = 2$ позволяют реализовать любую формулу из пяти букв. Поэтому новый набор может быть сформирован также из модулей $K_5 = 5$ и $K_3 = 2$. Однако при этом условия пп. 1 и 2 все еще не выполняются и поэтому повторим процедуру по п. 3. Так как модули с $K_5 = 5$ и $K_3 = 2$ реализуют любую формулу из шести букв, то $K_6 = 6$ и

$$L^{верх} = \left]\frac{2(h-1)}{6}\right[.$$

Таким образом, для заданной микросборки должно использоваться предыдущее выражение, имеющее большее значение знаменателя.

Оценки сложности реализации булевой функции, заданной в табличной форме. Пусть задана булева функция *n* переменных в виде неполностью определенной таблицы состояний, число единиц в столбце значений которой равно q_1, а число нулей q_0. При этом $q = q_1 + q_0 \le 2^n$. Определим верхнюю оценку сложности реализации такой функции, выраженную в числе *K*-универсальных модулей.

В работе [26] предложен метод построения по неполностью определенной таблице состояний скобочной формулы, число букв в которой удовлетворяет неравенству

$$h \le 2q_1 + q_0 - 2. \qquad (4\text{-}20)$$

Таблица 4-2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0

На основании этого результата может быть предложен простой признак для определения факта несущественной зависимости таблично заданной функции от некоторых своих переменных. Так как число букв в формуле не может быть меньше числа переменных, от которых она зависит, то, если для заданной таблицы выполняется неравенство $n > 2q_1 + q_0 - 2$, по крайней мере от $n - 2q_1 - q_0 + 2$ переменных функция зависит несущественно.

Искомая оценка сложности может быть получена в результате подстановки выражения, представленного в правой части неравенства (4-20), в правую часть соотношения

$$L \le \left]\frac{2(2q_1+q_0-3)}{K}\right[. \quad (4\text{-}21)$$

Пример. Реализовать функцию, заданную табл. 4-2 на 3-универсальных модулях.

Так как в данном случае $q_1 = q_0 = 4$, а $k = 3$, то $L \le \left]\frac{2(2\cdot 4+4-3)}{3}\right[= 6.$

На основании алгоритма, предложенного в работе [26], для заданной таблицы может быть построена скобочная формула вида $F = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4$.

Эта формула может быть реализована схемой из двух 3-универсальных модулей, что соответствует приведенной выше оценке сложности. В работе [48] был получен результат, близкий к изложенному выше. При этом было показано, что

$$h \le \frac{3}{2}q - 2 \text{ при } q \ge 2. \qquad (4\text{-}22)$$

Подставляя выражение, приведенное в правой части неравенства, в правую часть соотношения (4-2), получим следующую оценку:

$$L \le \left]\frac{3(q-2)}{K}\right[. \qquad (4\text{-}23)$$

Объединив неравенства (4-21) и (4-23), получим верхнюю оценку сложности реализации функции, заданной в виде таблицы состояний:

$$L \le \min\left\{\left]\frac{2(2q_1+q_0-3)}{K}\right[; \left]\frac{3(q-2)}{K}\right[\right\}.$$

Оценки сложности реализации систем булевых формул.

Выше были рассмотрены оценки сложности реализаций одной булевой формулы в базисе K-универсальных модулей. Приведем аналогичные оценки для системы N булевых формул $y_1, y_2, ..., y_N$, число букв в правых частях которых соответственно равно $h_1, h_2, ..., h_N$:

$$\left]\frac{H-N}{K-1}\right[\le L \le \left]2(\frac{H-N}{K})\right[+ N - 1, \qquad (4\text{-}25)$$

где $H = \sum_{i=1}^{N} h_i$.

Выражение в правой части является искомой верхней оценкой в классе произвольных схем, в то время как выражение в левой части является нижней оценкой лишь в классе схем, в которых сумма числа выходов и внутренних разветвлений, не относящихся к входным переменным, равно N.

Отметим, что при $H = h_i, N = 1$ найденное выражение сводится к выражению (4-2), полученному для случая реализации одной формулы.

Пример. Реализовать формулу

$$y = (x_1 \vee x_2)x_3x_4 \vee [(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_5 \vee x_6]x_7x_8x_9x_{10}x_{11}x_{12}x_{13}$$

на модулях, универсальных в классе формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ из трех букв.

В этом случае $H = 16, N = 1$, поэтому

$$8 = \left]\frac{16-1}{3-1}\right[\le L \le \left]\frac{2(16-1)}{3}\right[+ 1 - 1 = 10.$$

Число модулей в схеме при ее реализации совпадает с нижней оценкой Пример. Реализовать формулу, рассмотренную в предыдущем примере в виде системы формул

$$z = (x_1 \vee x_2)x_3;$$

При этом $H = 15, N = 2$, поэтому

$$7 = \left]\frac{15-2}{3-1}\right[\le L \le \left]\frac{2(15-1)}{3}\right[+ 2 - 1 = 11.$$

Число модулей в схеме, реализующей заданную систему формул, совпадает с нижней оценкой, т. е. равно 7.

Пример. Реализовать систему формул

$$y_1 = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_4 \vee x_5;$$
$$y_2 = (x_1 \vee x_2)x_3x_4$$

на модулях, универсальных в классе формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ из трех букв. Для этой системы $N = 2, H = 9$, поэтому

$$4 = \left]\frac{9-2}{3-1}\right[\le L \le \left]\frac{2(9-2)}{3}\right[+ 2 - 1 = 6.$$

Число модулей в схеме, реализующей заданную систему формул, совпадает с нижней оценкой.

Пример. Реализовать систему функций, рассмотренную в предыдущем примере при ее представлении в виде:

$$z = (x_1 \vee x_2)x_3;$$
$$y = z \vee x_4 \vee x_5;$$
$$y_2 = zx_4$$

в базисе тех же модулей.
В этом случае $N = 3, H = 8,$ поэтому

$$3 = \left]\frac{8-3}{3-1}\right[\le L \le \left]\frac{2(8-3)}{3}\right[+ 3 - 1 = 6.$$

Число модулей в схеме в этом случае равно трем.

Минимизация числа *К*-универсальных модулей. В настоящее время имеется большое число работ, посвященных проблеме минимизации числа элементов в схемах [43]. Однако во многих из них вместо решения задачи минимизации числа элементов решается задача минимизации булевых формул, подлежащих реализации. При этом в большинстве работ рассматриваемая задача [сводится к нахождению для заданной функции минимальной ДНФ или минимальной скобочной формулы, т. е. формул с минимальным числом букв. Указанная подмена в постановке задачи обосновывается тем, что уменьшение числа букв в булевой формуле обычно приводит к соответствующему уменьшению числа элементов. Однако взаимно-однозначное соответствие между сложностью булевой формулы в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$, выраженной в числе букв, и сложностью схемы, выраженной в числе элементов имеет место лишь при построении параллельно-последовательных схем в базисе одноконтактных реле.

С усложнением элементного базиса указанное соответствие становится все менее очевидным, и можно привести примеры, когда при уменьшении числа букв в реализуемой формуле число элементов в соответствующей схеме увеличивается.

Соотношение (4-2) устанавливает связь между числом букв в реализуемой формуле, функциональными свойствами используемых модулей и необходимым числом этих модулей. Из рассмотрения этого соотношения следует, что при фиксированном значении *К* число модулей в схеме зависит от числа букв в реализуемой формуле. Поэтому, уменьшая число букв в формуле, обычно удается уменьшить число столь сложных элементов, какими являются настраиваемые логические модули. Таким образом, и в данном случае задача минимизации числа модулей может быть сведена к минимизации числа букв в реализуемой формуле.

Следовательно, важным достоинством предложенных модулей является то, что для их рационального использования не требуется разрабатывать специальный аппарат минимизации, как это имело место, например, при появлении мажоритарных элементов. При этом для модулей, универсальных в классе формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$, может использоваться аппарат классической минимизации (например, метод Квайна - Мак-Класки с последующим вынесением переменных за скобки), а для модулей, универсальных в классе формул в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }, \oplus\}$, или модулей, универсальных в классе всех булевых функций, - аппарат минимизации, разработанный в теории однородных структур [69].

Рассмотрим соотношение (4-2) более подробно. При этом можно отметить, что число модулей в схеме зависит не только от числа букв h в формуле, но и от структуры реализуемой формулы. Действительно, наличие интервала, задаваемого верхней и нижней оценками, определяется тем, что при $h = const$ существует $S(h)$ различных *PN*-типов формул. Поэтому, выполняя минимизацию только по критерию числа букв, можно для одном и той же булевой функции получить формулы различной структуры с одинаковым числом букв, требующих для своей реализации различного числа модулей. Более того, можно добиться сокращения числа модулей в схеме путем увеличения числа букв в формуле.

Пример. Реализовать функцию, заданную формулой из восьми букв,

$$y = x_1[x_2(x_3x_4 \vee x_5x_6) \vee x_7x_8]$$

на 3-универсальных модулях. В этом случае

$$4 \le L(8;3) \le 5,$$

а число модулей, требующихся для ее реализации, совпадает с верхней оценкой. Попытаемся уменьшить сложность реализации путем увеличения числа букв в формуле. Для этого раскроем внутренние скобки в формуле, увеличив суммарное число букв до девяти:

$$y = x_1(x_2x_3x_4 \vee x_2x_5x_6 \vee x_7x_8).$$

При этом

$$4 \le L(9;3) \le 6,$$

а число модулей, требующихся для ее реализации, равно четырем.

Таким образом, можно утверждать, что если некоторая функция имеет представление в виде формулы, бесповторной в некотором базисе, то реализация ее в бесповторной форме необязательно приводит к минимальному числу модулей.

У читателя может сложиться представление, что в общем случае совсем неясно, как проводить минимизацию и стоит ли это делать. Это неправильно. Отметим прежде всего, что продемонстрированный «фокус» получается только при изменении структуры выражения, например при переходе к скобочным формам. Сокращение числа букв в ДНФ всегда будет способствовать уменьшению числа модулей. Осторожность следует проявлять только при вынесении за скобки: в итоге фрагменты могут стать такими мелкими, что возможности модуля будут использоваться неполностью.

При некотором опыте разработчик не станет «портить» фрагменты, однако для безопасности приведем условия, при которых сокращение числа букв в формуле с гарантией не приведет к возрастанию числа модулей в схеме.

Пусть булева функция, заданная формулой из h_1 букв, реализуется схемой из L_1 модулей. Выполним минимизацию этой формулы, и пусть число букв в формуле после минимизации равно h_2, а необходимое число модулей, требующееся для ее реализации, L_2.

Реализуем эти формулы в классе структур, в которых разветвления допустимы лишь на уровне входных переменных; тогда, если справедливо соотношение

$$h_2 \le \left[1 + \frac{h_1 - 1}{2} \cdot \frac{K}{K-1}\right], \qquad (4\text{-}26)$$

число модулей в схеме не увеличивается.

Предположим, что $h_1 = 55, K = 7$. Тогда, если в результате минимизации число букв в формуле удается сократить до

$$h_2 \le \left[1 + \frac{55-1}{2} \cdot \frac{7}{7-1}\right] = 32,$$

число модулей в схеме, реализующей минимизированную формулу, не возрастет.

Если выполняется соотношение

$$h_2 \le \left[1 + \frac{h_1 - 1}{2} \cdot \frac{K}{K-1}\right] - \left]\frac{K}{2}\right[, \qquad (4\text{-}27)$$

то число модулей в схеме уменьшается.

Пусть $h_1 = 73, K = 5$. Тогда, если в результате минимизации число букв в формуле удается уменьшить до

$$h_2 \le \left[1 + \frac{73 - 1}{2} \cdot \frac{5}{5-1}\right] - \left]\frac{5}{2}\right[= 43,$$

число модулей в схеме, реализующей минимизированную формулу, точно уменьшится.

Соотношения для системы булевых формул, аналогичные неравенствам (4-26) и (4-27), имеют вид

$$H_2 \le \left[N_2 + \left(1 + \frac{H_1 - N_1}{K-1} - N_2\right) \cdot \frac{K}{2}\right]; \qquad (4\text{-}29)$$

$$H_2 \le \left[N_2 + \left(1 + \frac{H_1 - N_1}{K-1} - N_2\right) \cdot \frac{K}{2}\right] - \left]\frac{K}{2}\right[. \qquad (4\text{-}29)$$

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЦИФРОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МИКРОСХЕМЫ ШИРОКОГО ПРИМЕНЕНИЯ КАК НАСТРАИВАЕМЫЕ МОДУЛИ

5-1. ОЦЕНКА ЛОГИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ МИКРОСХЕМ

Обоснованный выбор интегральных микросхем (ИМС) из числа существующих, а также теоретические основания для построения новых невозможны без разработки и использования критериев их логической эффективности.

Таблица 2-1