В. Л. АРТЮХОВ, Л. Я. РОЗЕНБЛЮМ, А. А. ШАЛЫТО

ЛОГИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ КАСКАДНЫХ СТРУКТУР

Одним из основных путей создания больших интегральных схем широкого назначения являются исследование и разработка однородных структур различного типа [1, 2].

К настоящему времени появилось много работ в области однородных каскадных структур, идеология которых восходит к исследованию [3]. В работах [4, 5] дан обзор результатов, полученных в последние годы.

Некоторые статьи этого цикла, например [6], посвящены исследованию логических возможностей однородных каскадов из двухвходовых элементов $\{\&, \vee, \oplus\}$ и $\{\&, \vee\}$.

В данной работе выполнено дальнейшее изучение функциональных свойств таких структур, при этом рассматриваются вопросы реализации бесповторных в базисах $\{\&, \vee, \oplus, {}^{-}\}$ и $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ формул в этих каскадах.

Интерес к реализации бесповторных формул вызван тем, что

— поведение некоторых классов управляющих устройств описывается бесповторными функциями или функциями с малой повторностью переменных [7];

— сохраняется компактность таблиц типов бесповторных функций от сравнительно большого числа переменных [8];

— произвольная булева формула (в том числе повторная и скобочная) из n букв всегда может рассматриваться как бесповторная функция от n переменных.

Исследование функциональных возможностей каскадных структур в данной работе выполнено в предположении, что прямые и инверсные значения входных переменных равнодоступны. Большинство полученных в работе результатов приводится без доказательства.

В статье Макхопадхая [9] были рассмотрены простейшие однородные каскады из двухвходовых элементов $\{\&, \vee\}$, которые будем в дальнейшем называть каскадами Макхопадхая.

Было доказано, что собственная функция такого каскада однородна. (Функция называется однородной, если для каждой переменной x_i эта функция монотонна x_i или $\bar{x}_i$).

Однако в работе [10] отмечалось, что доля каскадно реализуемых однородных функций мала по отношению к числу всех однородных функций. Например, для $n = 5$ существует 116 NPN-типов, которые содержат однородные функции из общего числа 616126NPN-типов произвольных функций этого числа переменных. Но из этих 116 типов только 17 каскадно реализуемы.

Определим класс функций, реализуемых в каскадах Макхопадхая, и изучим его свойства. Напомним некоторые известные определения и результаты.

1. Функция называется бесповторной в определенном базисе, если для нее в этом базисе существует форма записи (возможно, скобочная), в которой каждая переменная встречается один и только один раз.

2. Функция называется пороговой, если для нее существует представление в форме

$$f(x_1 \ldots x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant t \\ 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant t-1 \end{cases}$$

с целочисленными весами и порогом.

3. Если функция $\varphi(x_1 \ldots x_{n-1})$ бесповторна, то бесповторной является функция

$$f(x_1 \ldots x_n) = \varphi(x_1 \ldots x_{n-1}) * x_n,$$

где $* = \{\&, \vee\}$.

4. Если функция $\varphi(x_1 \ldots x_{n-1})$ пороговая, то пороговой является функция

$$f(x_1 \ldots x_n) = \varphi(x_1 \ldots x_{n-1}) * x_n,$$

где $* = \{\&, \vee\}$.

Из пунктов 1—4 следует:

5. Если функция $\varphi(x_1 \ldots x_{n-1})$ бесповторная пороговая, то бесповторной пороговой является функция

$$f(x_1 \ldots x_n) = \varphi(x_1 \ldots x_{n-1}) * x_n,$$

где $* = \{\&, \vee\}$.

Отсюда ясно, что произвольная (в том числе скобочная) бесповторная пороговая функция $f(x_1 \ldots x_n)$ может быть представлена в виде

$$f(x_1 \ldots x_n) = ((\ldots (x_1 * x_2) * x_3 \ldots * x_{n-2}) * x_{n-1}) * x_n. \qquad (1)$$

В работе [9] показано, что каскад Макхопадхая из $(n-1)$ элемента реализует функции n переменных, которые представлены в виде (1), что позволяет сформулировать следующие результаты:

6. Каскады Макхопадхая из $n-1$ элемента могут реализовать любые бесповторные пороговые функции n переменных и только их.

7. Каскад Макхопадхая является реализацией порогового элемента.

8. Существует 2^{n-1} различных типов каскадов Макхопадхая, инвариантных к перестановкам входных переменных.

9. Булева функция с нечетным рангом (числом единиц в таблице истинности) существенно зависит от всех своих переменных [11].

10. Ранг функции, несущественно зависящей от некоторых своих переменных, есть четное число.

11. Ранг бесповторной в базисе $\{\&, \vee\}$ (в том числе пороговой) функции, существенно зависящей от всех своих переменных, есть нечетное число.

12. Инвариантами PN-типов бесповторных пороговых функций, существенно зависящих от n переменных, является их ранг (нечетные числа): $1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1$.

13. Число PN-типов бесповторных пороговых функций, существенно зависящих от n переменных, $M_1(n)$ при $n \geqslant 1$ равно 2^{n-1}, $M_1(0) = 2$.

14. Число PN-типов бесповторных пороговых функций $M_2(n)$ от n и менее переменных равно $2^n + 1$, $M_2(0) = 2$.

15. Функция, двойственная бесповторной, бесповторна.

16. Каждому из $2^{n-1} PN$-типу бесповторной пороговой функции соответствует один и только один двойственный PN-тип.

17. Для самодвойственных функций n переменных не существует формул, бесповторных в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$.

Действительно, поскольку самодвойственная функция, существенно зависящая от n переменных, имеет ранг 2^{n-1}, т. е. определена на четном числе наборов, то в силу утверждения 11 следует этот результат.

18. Число NPN-типов бесповторных пороговых функций, существенно зависящих от n переменных, $M_3(n)$ при $n \geqslant 2$ равно 2^{n-2}, $M_3(0) = 1$.

19. Число NPN-типов бесповторных пороговых функций $M_4(n)$ от n и менее переменных при $n \geqslant 1$ равно $2^{n-1} + 1$, $M_4(0) = 1$.

20. Если данная функция от n переменных имеет ранг r, то двойственная ей функция имеет ранг $2^n - r$ [12].

21. Инвариантами NPN-типов бесповторных функций, существенно зависящих от n переменных, являются ранги минорных (мажорных) функций (нечетные числа): $1, 3, 5, \ldots, 2^{n-1} - 1$ ($2^{n-1} + 1, 2^{n-1} + 3, \ldots, 2^n - 1$).

Функция, для которой выполняется неравенство $f \leqslant f^d$, называется минорной. Запись $f \leqslant f^d$ имеет тот смысл, что значение функции f на любом наборе не больше соответствующего значения функции f^d.

Функция, для которой выполняется неравенство $f \geqslant f^d$, называется мажорной.

Рассмотрим проблему реализации каскадов Макхопадхая в перестраиваемых однородных структурах. В этом случае элементы каскада должны допускать настройку на функции & и $\vee$.

Проанализируем два варианта структур:
каскады из трехвходовых мажоритарных элементов;
каскады из двухвходовых элементов «И — НЕ» («ИЛИ — НЕ»).

Действительно, трехвходовой мажоритарный элемент $y = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ при $x_3 = 0$ реализует функцию $y' = x_1x_2$, а при $x_3 = 1$ — функцию $y'' = x_1 \vee x_2$, поэтому может быть сформулировано следующее утверждение:

22. Любая бесповторная пороговая функция n переменных может быть реализована в каскаде из трехвходовых мажоритарных элементов с одинаковой сложностью $L_1(n) = n - 1$. Число внешних выводов при этом равно $2n$.

Таким образом, каскад из $(n - 1)$ трехвходового мажоритарного элемента универсален в классе бесповторных пороговых функций от n переменных.

Перейдем к рассмотрению каскадов из двухвходовых элементов «И — НЕ» (аналогично могут быть исследованы каскады из двухвходовых элементов «ИЛИ — НЕ»).

Один элемент «И — НЕ» реализует функцию дизъюнкции над инверсными значениями входных переменных, а два элемента «И — НЕ», соединенные последовательно, описываются функцией $y = \overline{\overline{x_1x_2}x_3} = x_1x_2 \vee \bar{x}_3$, которая при $x_3 = 1$ равна $y' = x_1x_2$, поэтому в каскаде Макхопадхая каждый элемент $\vee$ может быть заменен одним элементом «И — НЕ», а элемент & — двумя.

В однородном каскаде из элементов «И — НЕ» наиболее сложной является реализация функции $f(x_1 \ldots x_n) = x_1x_2 \ldots x_n$, длина каскада при этом равна $2(n - 1)$. Отметим, что в работе [13] доказано, что минимальная сложность этой функции в базисе двухвходовых элементов «И — НЕ» в классе произвольных схем также равна $2(n - 1)$.

Число внешних выводов каскада, реализующего конъюнкцию переменных, равно $2(n - 1) - 2 + 2\times 2 = 2n$.

Простейшей реализацией в классе бесповторных пороговых функций в каскадах из элементов «И — НЕ» обладают функции вида

$$\begin{aligned} y &= (((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\, x_3 \vee \bar{x}_4)\, x_5 \vee \bar{x}_6) \ldots \vee \bar{x}_n && \text{при } n = 2l, \\ y &= ((x_1x_2 \vee \bar{x}_3)\, x_4 \vee \bar{x}_5) \ldots \vee \bar{x}_n && \text{при } n = 2l + 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $l = 1, 2, \ldots$

Такой каскад содержит ($n - 1$) элемент, при числе внешних выводов, равном $n - 1 - 2 + 2 \times 2 = n + 1$.

Исходя из сказанного выше, можно сформулировать следующие утверждения.

23. Любой бесповторной пороговой функции n переменных может быть поставлен в соответствие реализующий ее каскад из двухвходовых элементов «И — НЕ», сложность которого удовлетворяет неравенству

$$n - 1 \leqslant L_2(n) \leqslant 2(n - 1),$$

при этом число внешних выводов

$$n + 1 \leqslant b(n) \leqslant 2n.$$

24. Каскад из $2(n - 1)$ двухвходовых элементов «И — НЕ» универсален в классе бесповторных пороговых функций от n переменных. Число внешних выводов каскада равно $2n$.

Таким образом, предложены два пути построения каскадов Макхопадхая, позволяющих реализовать любые бесповторные пороговые функции.

Дальнейшее расширение функциональных возможностей каскадов может быть осуществлено путем увеличения числа функций, реализуемых его элементами [3].

25. Каскад из двухвходовых элементов $\&$, $\vee$, $\oplus$ назовем каскадом Майтра. Такой каскад реализует функции вида

$$f(x_1 \ldots x_n) = ((\ldots(x_1 * x_2) \circledast x_3 \ldots \circledast x_{n-2}) \circledast x_{n-1}) \circledast x_n, \tag{3}$$

где $\circledast = \{\&, \vee, \oplus\}$.

Исследование функциональных возможностей этих каскадов в классе бесповторных в базисе $\{\&, \vee, \oplus\}$ функций было выполнено в работе [14]. Найдено соотношение для подсчета числа PN-типов таких функций, существенно зависящих от n переменных, реализуемых в каскаде Майтра ($M_5(n)$). Установлено, что

$$M_5(n) = \varphi_{2m} \quad \text{при } m \geqslant 1,$$

где φ_{2m} — четные числа Фибоначчи (табл. 3).

26. Числами Фибоначчи [15] называются числа φ_i, удовлетворяющие рекуррентному соотношению

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2} \quad \text{при } \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1.$$

Числа Фибоначчи для $i = 0 \div 10$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ_i	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

В случае, если реализуемая функция не может быть представлена в виде (1) или (3), требуется использование более сложных структур, которые, как будет показано ниже, могут быть построены путем объединения каскадов Макхопадхая либо каскадов Майтра.

27. Произвольную древовидную схему из двухвходовых элементов $\{\&, \vee\}$ назовем обобщенным каскадом Макхопадхая.

В классе обобщенных каскадов Макхопадхая реализуются любые функции, бесповторные в базисе $\{\&, \vee, ^-\}$.

28. Произвольную древовидную схему из двухвходовых элементов $\{\&, \vee, \oplus\}$ назовем обобщенным каскадом Майтра [16].

В классе обобщенных каскадов Майтра реализуются любые функции, бесповторные в базисе $\{\&, \vee, \oplus, ^-\}$.

В силу того что произвольная булева формула (в том числе повторная) из n букв всегда может быть реализована древовидной схемой из двухвходовых элементов $\{\&, \bigvee\}$ либо $\{\&, \bigvee, \oplus\}$, то можно утверждать, что такая формула всегда может быть реализована обобщенным каскадом Макхопадхая или Майтра.

29. Число двухвходовых элементов в обобщенном каскаде, реализующем произвольную функцию m переменных, асимптотически не превышает $2^m/\log m$ (справедливость этого утверждения следует из результатов работы [17]).

30. Обобщенный каскад Майтра (Макхопадхая), реализующий произвольную формулу в базисе $\&, \bigvee, \oplus, ^-$ $(\&, \bigvee, ^-)$ из n букв, содержит не более $[n/2]$ каскадов Майтра (Макхопадхая).

31. Для реализации произвольной формулы в классическом базисе $\{\&, \bigvee, ^-\}$ из n букв требуется не более $[n/2]$ пороговых элементов (реализующих только бесповторные пороговые функции).

32. Бесповторная пороговая функция с наибольшей суммой весов входов и порога имеет вид

$$f_1(x_1 \ldots x_n) = (\ldots(x_1x_2 \bigvee x_3)\, x_4 \bigvee x_5)\, x_6 \bigvee \ldots \bigvee x_{n-1})\, x_n$$
при $n = 2l$,

$$f_2(x_1 \ldots x_n) = (\ldots(x_1 \bigvee x_2)\, x_3 \bigvee x_4)\, x_5 \bigvee \ldots \bigvee x_{n-1})\, x_n$$
при $n = 2l + 1$,

при $l = 1, 2, \ldots$, причем эта функция является минорной.

33. Пороговые элементы, реализующие функции f_1 и f_2, имеют структуру вида $(a_1, a_2 \ldots a_n, t)$

$$a_i = \varphi_i, \qquad t = \varphi_{n+1},$$

где a_i — вес i-го входа; t — порог; φ_i — i-е число Фибоначчи.

34. Для пороговых элементов, реализующих функции f_1 и f_2, справедливо соотношение

$$t + \sum_{i=1}^{n} a_i = \varphi_{n+3} - 1.$$

35. Верхние оценки параметров пороговых элементов, реализующих бесповторные пороговые функции, удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\max a_j \leqslant \varphi_n, \qquad \max t \leqslant \varphi_{n+1}, \qquad \max\left(|t| + \sum_{i=1}^{n} |a_i|\right) \leqslant \varphi_{n+3} - 1,$$

где максимум берется по всем бесповторным пороговым функциям.

36. Длина $H(n)$ одного линейного каскада в обобщенном каскаде, реализующем произвольную формулу из n букв, удовлетворяет неравенству

$$]\log_2 n[\; \leqslant H(n) \leqslant n - 1.$$

37. Число различных структур обобщенных каскадов, соответствующих формулам из n букв, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$R_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} R_i R_{n-i}, & \text{при } n = 2k+1,\ k \geqslant 1 \\ & \phantom{\text{при }} n = 2k,\ \ k = 1,\ 2,\ 3 \\ \sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}} R_i R_{n-i} - C^2_{R_{\frac{n}{2}}}, & \text{при } n = 2k,\ k \geqslant 4. \end{cases}$$

Значения R_n при $n = 1 \div 12$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R_n	1	1	1	2	3	6	11	23	46	98	207	451

В работе [18] было подсчитано число $M_6(n)$ функций, существенно зависящих от n переменных, реализуемых обобщенными каскадами Майтра, при $n = 1 \div 6$ (табл. 3). Однако соотношение для подсчета $M_6(n)$ либо оценки этого числа в [18] не были предложены.

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_5(n)$	1	3	8	21	55	144	377	987	2584	6765
$M_6(n)$	1	3	8	29	101	405	?	?	?	?
$M_5(n)R_n$	1	3	8	42	165	864	4147	22 701	118 864	662 970

38. Число PN-типов бесповторных в базисе $\{\&, \vee, \oplus, {}^{-}\}$ функций, существенно зависящих от n переменных, $M_6(n)$ удовлетворяет неравенству

$$M_5(n) \leqslant M_6(n) \leqslant M_5(n) R_n.$$

39. Число PN-типов бесповторных в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ функций, существенно зависящих от n переменных, реализуемых обобщенными каскадами Макхопадхая, $M_7(n)$ удовлетворяет неравенству

$$u_n \leqslant M_7(n) \leqslant S_n,$$

где

$$U_n = \frac{3}{2} U_{n-1} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} U_i U_{n-i}, \qquad n > 2, \quad U_1 = 1, \quad U_2 = 2;$$

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} S_i S_{n-i}, \qquad S_1 = 1, \quad S_2 = 2.$$

Значения U_n, $M_7(n)$, S_n при $n = 1 \div 10$ приведены в табл. 4.

Таблица 4

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$[U_n]$	1	2	4	9	22	57	154	429	1225	3565
$M_7(n)$	1	2	4	10	24	66	180	522	1532	4624
S_n	1	2	4	10	28	84	264	858	2860	9724

Результаты, приведенные в пункте 39, были получены в работе [19] при подсчете числа двухполюсных параллельно-последовательных сетей. Дальнейшее исследование класса бесповторных в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ функций было выполнено в работе [8].

В итоге отметим, что обобщенные одноканальные каскадные структуры обладают широкими функциональными возможностями в классе бесповторных функций и позволяют реализовать произвольные (в том числе повторные и скобочные) формулы. Представляет интерес обобщение полученных результатов на многоканальные структуры.

Литература

1. *В. Г. Лазарев.* Принципы построения и функционирования систем управления, реализованных в базисе однородных сред.— Тезисы докладов на V Всесоюзной научно-технической конференции «Проблемы создания систем управления судовыми техническими средствами». Л., 1973.
2. *В. Г. Лазарев.* Особенности синтеза автоматов в однородных средах.— «Теория автоматов и ее приложения. Однородные среды» (Материалы советско-болгарского семинара). М., Изд. ИППИ АН СССР, 1973.
3. *K. K. Maitra.* Cascaded switching networks of two-input flexible cells.— IRE Trans. Electron Computers, 1962, N 2.
4. *Е. А. Кондратьева, Е. П. Сопруненко.* Синтез каскадных сред.— В сб. «Автоматы и управление сетями связи». М., «Наука», 1971.
5. *В. И. Варшавский, В. Б. Мараховский, В. А. Песчанский, Л. Я. Розенблюм.* Однородные структуры (Анализ. Синтез. Поведение). М., «Энергия», 1973.
6. *Е. А. Кондратьева, Е. П. Сопруненко.* О классе функций, реализуемых на однодорожечном каскаде.— В сб. «Дискретные автоматы и сети связи». М., «Наука», 1970.
7. *В. Л. Артюхов, Г. А. Копейкин, А. А. Шалыто.* Синтез схем из логических модулей.— В сб. «Построение управляющих устройств и систем». М., «Наука», 1974.
8. *В. Л. Артюхов, Г. А. Копейкин, А. А. Шалыто.* О классификации бесповторных булевых функций.— «Теория автоматов и ее приложения. Однородные среды» (Материалы советско-болгарского семинара). М., изд. ИППИ АН СССР, 1973.
9. *A. Makhopadhyay.* Unate cellular logic.— IEEE Trans. on computers, 1969, N 2.
10. *W. S. Matheson.* Recognition of monotonic and unate cascase realizable functions using an informational model of switching circuits.— IEEE Trans. on computers, 1971, N 10.
11. *В. П. Битюцкий, В. П. Чистов.* Функциональная полнота в ленточных однородных структурах.— Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1971, № 3.
12. *Л. Я. Розенблюм.* Самодвойственная классификация и некоторые классы булевых функций.— Автоматика и вычислительная техника, 1971, № 2.
13. *Е. П. Сопруненко.* О минимальной реализации некоторых функций схемами из функциональных элементов.— В сб. «Проблемы кибернетики», вып. 15. М., «Наука», 1965.
14. *I. Sklanky, A. I. Korenjak, H. S. Stone.* Ganonical tributary networks.— IEEE Trans. on Computers, 1965, N 6.
15. *Н. Н. Воробьев.* Числа Фибоначчи. М., «Наука», 1964.
16. *S. Y. Levy, R. O. Winder, T. H. Mott.* A note on tributary switching networks.— IEEE Trans. on Computers, 1964, N 2.
17. *О. Б. Лупанов.* О синтезе некоторых классов управляющих систем.— В сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10. М., «Наука», 1963.
18. *D. C. Plish, A. K. Sctdmore.* The number of equivalence classes of functions realizable by tributary networks.— IEEE Trans. on Computers, 1966, N 2.
19. *Д. Риордан, К. Шеннон.* Число двухполюсных параллельно-последовательных сетей.— В кн. «Работы по теории информации и кибернетике». М., «Иностранная литература», 1963.

Академия наук СССР Институт проблем передачи информации

АВТОМАТЫ И УПРАВЛЕНИЕ

Сети связи и дискретные устройства управления

Издательство «Наука» Москва 1976