УДК 62-507

ОБ ОЦЕНКАХ СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ ДРЕВОВИДНЫМИ СХЕМАМИ ИЗ НАСТРАИВАЕМЫХ МОДУЛЕЙ

АРТЮХОВ В. Л., КОПЕЙКИН Г. А., ШАЛЫТО А. А.

(Ленинград)

Установлены нижняя и верхняя оценки сложности схемной реализации булевой формулы в базисе настраиваемых модулей, универсальных в классе формул.

В настоящее время имеется большое число работ по построению и использованию настраиваемых логических модулей (НЛМ) [1—4].

Однако в литературе практически отсутствуют результаты, относящиеся к оценке сложности схемных реализаций в базисе НЛМ.

Настоящая работа частично восполняет указанный пробел для случая, когда алгоритм работы устройства представлен в виде булевой формулы из h букв, заданной в базисе, двухместные операции которого подчиняются сочетательному закону, и реализуется древовидной схемой из НЛМ, универсальных в том же классе формул из k и менее букв [4].

1. Постановка задачи

Пусть имеется булева формула $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, заданная в базисе, двухместные операции которого подчиняются сочетательному закону (например, $\{\&, \vee, -\}$, $\{\&, \vee, -, \oplus\}$), причем длина формулы составляет h букв.

Задан также набор модулей M, реализующих все подформулы φ в этом базисе длиной не более k букв. В роли указанного набора может выступать НЛМ, универсальный в том же классе формул из k и менее букв, который в дальнейшем будем называть k-универсальным модулем.

Из множества схемных реализаций формулы $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в базисе набора M выделим древовидные.

Определение. Древовидной называется одновыходная структура без петель, в которой каждая входная переменная и выход каждого элемента связаны непосредственно не более чем с одним входом одного элемента структуры.

Среди древовидных реализаций имеется по крайней мере одна минимальная по числу модулей.

Оценим число модулей $L(h; k)$ из набора M, необходимых для построения данной реализации.

Обозначим входы древовидной структуры символами x_i, где $i=1, \ldots, h$, тогда исходная формула $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ преобразуется в бесповторную формулу вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_h)$.

С другой стороны, из работы [4] известно, что для того, чтобы модуль был универсален в некотором классе форму из k букв, требуется в его порождающую функцию объединить лишь бесповторные формулы из того же числа букв, заданные в том же базисе.

Таким образом задача, сформулированная выше, сводится к декомпозиции бесповторной формулы на бесповторные подформулы.

2. Результаты работы

Переходя к изложению результатов работы, необходимо отметить, что входы НЛМ могут выступать как в качестве информационных, так и настроечных. При этом связь НЛМ с источниками информации и предшествующими модулями в логической структуре осуществляется при помощи информационных входов. Логическая структура из НЛМ может быть изображена без указания настроечных входов с отметкой каждого модуля формулой, которую он реализует.

В дальнейшем исследовании поэтому нас будут интересовать только информационные входы, которые будем называть входами модуля. Входы модуля, на которые подаются входные переменные, называются задействованными, а остальные — свободными.

Утверждение 1. Число модулей в древовидной структуре определяется из соотношения

$$L=\frac{h-1}{k_{\text{ср}}-1}$$

где $k_{\text{ср}}$ — среднее число задействованных входов у одного модуля.

Утверждение 2. Минимальное число модулей в древовидной структуре определяется соотношением

$$L_{\text{мин}}=\left]\frac{h-1}{k-1}\right[,$$

где $]A[$ — знак округления до ближайшего целого, не меньшего A.

Утверждение 3. Минимальное значение среднего числа задействованных входов у одного модуля в оптимальной древовидной структуре определяется равенством

$$K_{\text{ср. мин}}=\begin{cases}\frac{k}{2}+1, & \text{если хотя бы одно из чисел } L \text{ либо } K \text{ четное;}\\ \frac{k}{2}+1-\frac{1}{2L}, & \text{если } L \text{ и } K \text{ нечетные,}\end{cases}$$

а максимальное число модулей в оптимальной древовидной структуре определяется равенством

$$L_{\text{макс}}=\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[.$$

Доказательства утверждений 1—3 даны в приложении.

Таким образом, число модулей в минимальной древовидной структуре определяется неравенством:

$$\left]\frac{h-1}{k-1}\right[\leqslant L\leqslant\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[$$

Метод реализации формул в базисе рассмотренных НЛМ, обеспечивающий достижение приведенных выше оценок, изложен в работе [5].

В заключение отметим, что найденные оценки могут быть распространены и на более широкий класс модулей: модули, универсальные в классе всех булевых функций. В силу того что такие модули, в частности, универсальны в классе формул в базисе $\{\&, \vee, -, \oplus\}$, то для реализации произвольной функции n переменных, заданной формулой в том же базисе из h букв, справедливо соотношение

$$\left]\frac{n-1}{k-1}\right[\leqslant L\leqslant\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[$$

Доказательство утверждения 1

Без нарушения общности условимся рассматривать случай, когда формулы f и φ положительно монотонны.

Предположим, что каким-либо методом (например, путем перебора) для заданной формулы найдена минимальная по числу элементов древовидная схема, содержащая L $(h;\ k)$ k-универсальных модулей. Выполним анализ полученной схемы с целью определения оценки числа модулей в ней.

В древовидной структуре имеется по крайней мере один элемент, все задействованные входы которого присоединены только к источникам входных переменных. Присвоим ему номер 1, а число его задействованных входов обозначим k_1. При этом $k_1 \leqslant k$.

Элемент 1 реализует некоторую бесповторную формулу φ_1 от k_1 букв. Подставим φ_1 вместо соответствующей группы букв в исходную формулу $f(x_1, \ldots, x_h)$, при этом получается новая бесповторная формула $f_1(\varphi_1, x^{(1)})$ из $h-k_1+1$ букв.

В оставшейся части структуры присутствует элемент (которому присвоим номер 2), входные переменные которого принадлежат множеству, образованному $h-k_1$ входами, оставшимися свободными после установки первого элемента, и выходом первого элемента. Пусть элемент 2 реализует бесповторную формулу φ_2 из k_2 букв. Подставив φ_2 вместо соответствующей группы букв в формулу $f_1(\varphi_1, x^{(1)})$, получим либо формулу вида $f_2(\varphi_1, \varphi_2, x^{(2)})$, либо формулу $f_2(\varphi_2, x^{(3)})$, в запись которых входит $h-k_1-k_2+1+1=h-k_1-(k_2-1)+1=h-(k_1+k_2)+2$ букв.

Продолжив анализ структуры далее, в конце его приходим к единственному выходу, «пройдя» всю структуру, содержащую L элементов. При этом выполняется условие

$$h - \sum_{i=1}^{L} k_i + L = 1, \tag{П.1}$$

где k_i – число задействованных входов i-го элемента.

Если в равенстве (П.1) выразить число задействованных входов k_i через число входов модуля k и число свободных входов $j_i - k_i = k - j_i$, то это выражение примет вид

$$h - Lk + \sum_{i=1}^{L} j_i + L = 1. \tag{П.2}$$

Обозначив суммарное число свободных входов в схеме

$$j = \sum_{i=1}^{L} j_i, \tag{П.3}$$

получим соотношение для определения числа элементов

$$L = \frac{h-1+j}{k-1}. \tag{П.4}$$

С целью нахождения зависимости числа элементов от меньшего количества параметров введем понятие среднего числа задействованных входов.

Определение. Величину, определяемую соотношением

$$k_{\text{ср}} = \sum_{i=1}^{L} k_i \Big/ L, \tag{П.5}$$

назовем средним числом задействованных входов элементов структуры.

При этом соотношение (П.1) принимает вид

$$h - L(k_{\text{ср}} - 1) = 1. \tag{П.6}$$

Таким образом,

$$L = \frac{h-1}{k_{\text{ср}} - 1}. \tag{П.7}$$

Это выражение устанавливает зависимость количества элементов в структуре от числа букв h в формуле и среднего числа задействованных входов элементов структуры $k_{\text{ср}}$.

Доказательство утверждения 2

Пусть имеется структура, у всех элементов которой задействованы все входы. При этом $k_{\text{ср}}$ максимально и равно k.

Число элементов L в такой структуре, реализующей формулу в h букв, минимально и определяется на основе соотношения (П.7) путем замены $k_{\text{ср}}$ на k:

$$L_{\text{мин}} = \frac{h-1}{k-1}. \tag{П.8}$$

Так как число элементов в структуре должно быть целым и достаточным для реализации формулы, то

$$L_{\text{мин}} = \left]\frac{h-1}{k-1}\right[. \tag{П.9}$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\left]\frac{h-1}{k-1}\right[< L. \tag{П.10}$$

Анализ нижней оценки. Вследствие округления результатов до ближайшего целого значение числа модулей будет минимальным также и в тех случаях, когда $k_{\text{ср}}$ несколько меньше, чем k. Этот факт иллюстрируется табл. 1, в которой приведены

Таблица 1

Значения $K_{\text{ср}}=f(h, k)$

h	k							
	3	4	5	6	7	8	9	10
10	2,8	4	4	5,5	5,5	5,5	5,5	10
20	2,9	3,71	4,8	5,75	5,75	7,35	7,35	7,35
30	2,93	9,3	4,62	5,8	6,8	6,8	8,25	8,25
40	2,95	4	4,9	5,87	6,57	7,5	8,8	8,8
50	2,96	3,9	4,76	5,9	6,45	8	8	9,15
60	2,965	3,95	4,94	5,92	6,9	7,55	8,37	9,4

значения $k_{\text{ср}}$, при которых еще выполняется соотношение

$$\frac{h-1}{k_{\text{ср}}-1} = \left]\frac{h-1}{k-1}\right[. \tag{П.11}$$

Из рассмотрения табл. 1 следует, что в большинстве случаев значение минимального числа элементов некритично к весьма значительным изменениям $k_{\text{ср}}$.

Доказательство утверждения 3

Рассмотрим произвольную булеву формулу в базисе, двухместные операции которого подчиняются сочетательному закону, $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Преобразуем ее в бесповторную формулу вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_h)$.

Определение. Подформула называется отделимой, если при заключении ее в скобки значение f не изменяется.

В преобразованной формуле выделим все максимальные отделимые непересекающиеся подформулы ψ_i, содержащие $1 \leqslant h_i \leqslant k$ букв, тогда формула f приобретает следующий вид:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_h) = \psi_1 * \psi_2 * \ldots * \psi_i * \psi_{i+1} * \ldots * \psi_r.$$

Здесь знаки $*$ принадлежат к упомянутому выше базису двухместных операций.

При любом порядке действий в формуле имеются по крайней мере две подформулы ψ_i и ψ_{i+1}, объединенные знаком $*$ и не разделенные скобками, определяющими порядок выполнения действий.

Лемма 1. Для того чтобы реализация подформулы $\psi_i * \psi_{i+1}$ потребовала двух k-универсальных модулей, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$(\text{П}.12)\qquad h_i+h_{i+1}\geqslant k+1.$$

Из леммы 1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. Для пары k-универсальных модулей $(j,\ j+1)$, реализующих подформулу $\psi_i*\psi_{i+1}$, для которой справедливо соотношение (П.12), выполняется неравенство

$$(\text{П}.13)\qquad k_j+k_{j+1}\geqslant k+2.$$

Следствие 2. Среднее число задействованных входов для рассмотренной пары модулей определяется соотношением:

$$(\text{П}.14)\qquad k_{\text{ср}}^{j;j+1}=\frac{k_j+k_{j+1}}{2}\geqslant\frac{k}{2}+1.$$

Следствие 3. Пара k-универсальных модулей, реализующих подформулу $\psi_i*\psi_{i+1}$, всегда может быть выбрана таким образом, чтобы модуль, все задействованные входы которого связаны с входами, имел число задействованных входов, отвечающее соотношению

$$(\text{П}.15)\qquad k_j\geqslant\begin{cases}\dfrac{k+1}{2} & \text{для нечетных } K;\\[2ex] \dfrac{k}{2}+1 & \text{для четных } k.\end{cases}$$

Справедливость этого следствия вытекает из того факта, что если сумма h_i+ $+h_{i+1}\geqslant k+1$, то по крайней мере одно из слагаемых h_i или h_{i+1} не меньше, чем $\left]\dfrac{k}{2}\right[=\dfrac{k+1}{2}$ для нечетных k, либо $\dfrac{k}{2}+1$ для четных k.

Продолжим доказательство утверждения 3.

Реализуем подформулу $\psi_i*\psi_{i+1}$ схемой, состоящей из пары k-универсальных модулей k_j, k_{j+1}, обозначив ее выход z_1.

Остаточная формула приобретает тогда следующий вид:

$$f=\psi_1*\psi_2*\ldots*z_1*\ldots*\psi_r.$$

Указанную формулу преобразуем так, чтобы все ее отделимые непересекающиеся подформулы обладали максимальной длиной, не превышающей k. Это определение состоит во включении z_1 (если это возможно) в одну из подформул ψ. Для преобразованной остаточной формулы справедливы лемма 1 и следствия из нее.

Таким образом, в остаточной формуле снова может быть выделена пара подформул, реализация которой потребует пары модулей $(j+2,\ j+3)$, число входов которых отвечает соотношениям (П.13), (П.14), установленным следствиями 1 и 2 леммы 1.

Следовательно, для структур, содержащих четное число k-универсальных модулей, может быть предложена конструктивная процедура реализации, такая, что для каждой пары модулей выполняется соотношение (П.14), а пары не пересекаются.

Поэтому для оптимальных древовидных структур, содержащих четное число k-универсальных модулей, следует справедливость неравенства

$$(\text{П}.16)\qquad k_{\text{ср}}\geqslant k/2+1.$$

Следовательно,

$$(\text{П}.17)\qquad L_{\text{чет}}\leqslant\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[.$$

Для того чтобы показать, что полученная оценка не может быть в общем случае улучшена, достаточно привести пример минимальной структуры, отвечающей этой оценке.

Пример. Реализовать формулу $f=(x_1x_2\vee x_3x_4)x_5\vee x_6x_7$ на 3-универсальных модулях.

Минимальная реализация приведенной формулы требует четырех модулей: $\varphi_1=x_1x_2$; $\varphi_2=\varphi_1\vee x_3x_4$; $\varphi_3=\varphi_2x_5$; $\varphi_4=\varphi_3\vee x_6x_7$.

При этом

$$k_{\text{ср}}=\frac{2+3+2+3}{4}=2{,}5=\left]\frac{3}{2}\right[+1;\qquad L=\left]\frac{2\cdot 6}{3}\right[=4.$$

Таким образом, для четных L доказано, что число модулей в минимальной древовидной реализации отвечает соотношению

$$\left]\frac{h-1}{k-1}\right[\leqslant L\leqslant\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[.$$

Предположим теперь, что число модулей L в минимальной древовидной структуре, реализующей некоторую булеву формулу, нечетно.

Согласно следствию 3 леммы 1, для любых k можно найти модуль, такой, что все его задействованные входы, число которых определяется соотношением (П.15), связаны с входными переменными.

Введем этот модуль в структуру, а затем условно исключим его. При этом оставшийся фрагмент структуры будет содержать четное число модулей, равное $L-1$. Согласно соотношению (П.16), для этого фрагмента выполняется неравенство

$$k_{\text{ср}}\geqslant k/2+1.$$

В случае, если k четно, то для всей структуры справедливо неравенство

$$k_{\text{ср}}\geqslant\frac{\frac{k}{2}+1+(L-1)\left(\frac{k}{2}+1\right)}{L}=\frac{k}{2}+1. \tag{П.18}$$

Таким образом

$$L_{\text{неч}}\leqslant\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[. \tag{П.19}$$

Если же k нечетно, то для всей структуры

$$k_{\text{ср}}\geqslant\frac{\frac{k+1}{2}+(L-1)\left(\frac{k}{2}+1\right)}{L}=\frac{k}{2}+1-\frac{1}{2L}. \tag{П.20}$$

Таким образом, для минимальной древовидной структуры, содержащей нечетное число k-универсальных модулей и нечетном k, справедливо неравенство

$$k_{\text{ср. мин}}<k/2+1.$$

Определим верхнюю оценку для L в этом случае. При этом, подставив (П.20) в (П.7), получим

$$L_{\text{верх}}=\frac{2(h-1)}{k-1/L_{\text{верх}}}.$$

Решая полученное уравнение относительно $L_{\text{верх}}$, получим

$$L_{\text{верх}}=\frac{2h-1}{k}. \tag{П.21}$$

Учитывая, что $L_{\text{верх}}$ и k – нечетные, следует справедливость соотношения

$$L_{\text{верх}}=\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[. \tag{П.22}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$L_{\text{неч}}\leqslant\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[. \tag{П.23}$$

Объединяя неравенства (П.17), (П.19), (П.23), получим, что для любых L и k справедливо неравенство

$$L\leqslant\left]\frac{2(h-1)}{k}\right[. \tag{П.24}$$

Анализ верхней оценки. Определим, при каких значениях L, k и h верхняя оценка достигается, и приведем соответствующие примеры.

Выше было показано, что при четных L и произвольных k, а также при нечетных L и четных k справедливо соотношение

$$L_{\text{верх}}=2(h-1)/k.$$

Для этих L и k искомые значения h будем определять из соотношения

$$h=\frac{Lk}{2}+1, \tag{П.25}$$

полагая, что h, L, k – целые.

При нечетных L и k

$$L_{\text{верх}}=\frac{2h-1}{k}$$

и поэтому

$$h=\frac{Lk+1}{2}, \tag{П.26}$$

где h, L, k – целые.

Таблица 2

Значения числа букв h в формулах, реализуемых по верхней оценке

k	L										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17
4	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
5	3	6	8	11	13	16	18	21	23	26	28
6	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
7	4	8	11	15	18	22	25	29	32	36	39
8	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
9	5	10	14	19	23	28	32	37	41	46	50
10	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56
11	6	12	17	23	28	34	39	45	50	56	61

В табл. 2 приведены значения h, удовлетворяющие соотношениям (П.25) и (П.26) при $L\leqslant 11$; $k\leqslant 11$. Необходимо отметить, что только для этих значений числа букв h могут быть найдены формулы, требующие для своей реализации числа элементов, определяемого по верхней оценке.

Так, при $k=5$ и $h=13$ по верхней оценке, равной 5, реализуется, например, формула

$$y=[(x_1x_2x_3\vee x_4x_5x_6)(x_7\vee x_8)\vee x_9x_{10}x_{11}](x_{12}\vee x_{13}),$$

а при $k=7$ и $h=25$ по верхней оценке, равной 7, в частности, реализуется формула

$$y=[(x_1x_2x_3x_4\vee x_5x_6x_7x_8)(x_9\vee x_{10}\vee x_{11})\vee(x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}\vee$$
$$\vee x_{16}x_{17}x_{18}x_{19})(x_{20}\vee x_{21}\vee x_{22})](x_{23}\vee x_{24}\vee x_{25}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубайтис Э. А.* Логические автоматы и микромодули. Рига: Зинатне, 1975.
2. *Фридман А., Менон П.* Теория и проектирование переключательных схем. М.: Мир, 1978.
3. *Бабичева Е. В., Ирангишвили И. В., Ускач М. А., Шаипов Н.* Некоторые критерии оценки эффективности логических модулей, выполняемых на интегральных схемах.– Автоматика и телемеханика, 1968, № 3, с. 131–139.
4. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Вопросы выбора и применения многофункциональных логических модулей.– В кн.: Материалы международного симпозиума «Дискретные системы». Рига: Зинатне, 1974, т. 1, с. 57–67.
5. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* О многофункциональном использовании цифровых интегральных схем.– В кн.: Тезисы докладов на V Всес. научно-техн. конф. «Проблемы создания систем управления техническими средствами». Л.: Судостроение, 1973, с. 37–49.

Поступила в редакцию
12.IX.1980

ON ESTIMATING THE IMPLEMENTATION COMPLEXITY OF BOOLEAN FORMULAE IN TERMS OF TREE-LIKE STRUCTURES OF ADJUSTIBLE MODULES

ARTYUKHOV V. L., KOPEYKIN G. A., SHALYTO A. A.

The upper and lower estimates are obtained for complexity of hardware implementation of a Boolean formula by adjustible modules universal in the class of formulae.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА
И
ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

11

МОСКВА · 1981