АВТОМАТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА, 1985, № 2, с. 58—64

УДК 681.32:519.713

В. Л. Артюхов, А. А. Шалыто, О. С. Кузнецова

ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОГРАММИРУЕМЫХ ЛОГИЧЕСКИХ МАТРИЦ

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных методам рационального использования программируемых логических матриц (ПЛМ) [1, 2].

Однако вопросы оценки функциональных возможностей ПЛМ при рассмотрении ее в качестве многофункционального логического модуля [3] до сих пор исследовались недостаточно. Настоящая работа призвана хотя бы частично восполнить этот пробел.

Предположим, что имеется ПЛМ только с прямыми входами и выходами.

Оценим характеристики этой ПЛМ при реализации в ней произвольной нормальной формулы в базисе И, ИЛИ из h букв и дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ), получающейся из этой формулы путем раскрытия скобок.

Реализация скобочной формулы. Реализация скобочной формулы в ПЛМ выполняется путем ее представления в виде системы из $(c/2)+1$ ДНФ, являющихся подформулами, где c — число скобок в формуле. После этого каждая ДНФ реализуется на соответствующем выходе, а каждый из них, кроме последнего, на котором реализуется вся формула в целом, соединяется с соответствующим входом.

Наихудшие параметры (s — число входов, q — число термов, t — число выходов) будет иметь ПЛМ, реализующая бесповторную нормальную формулу в базисе И, ИЛИ, содержащую максимальное число скобок, буквы которой объединены между собой только операцией ИЛИ.

Например, при $h=16$ соответствующая формула имеет арифметический полином [4] следующего вида:

$$f=((1+1)\cdot(1+1)+(1+1)\cdot(1+1))\cdot((1+1)\cdot(1+1)+(1+1)\cdot(1+1)).$$

Формулам этого класса соответствует дихотомическое дерево из $(h-1)$ элементов И и ИЛИ, в первом ярусе которого располагаются только элементы ИЛИ.

Для оценки параметров ПЛМ определим число скобок в формулах указанного вида из h букв.

На первом уровне рассмотрения формулы каждая пара скобок объединяет по две буквы, т. е. одна скобка на одну букву. Таким образом, число скобок первого уровня $c_1=h=h/4^0$.

На втором уровне каждая пара скобок объединяет восемь букв — скобка на четыре буквы. Следовательно, число скобок второго уровня $c_2=h/4=h/4^1$.

На третьем уровне каждая пара скобок объединяет 32 буквы — скобка на 16 букв. Следовательно, $c_3=h/16=h/4^2$.

Максимальное число уровней скобок для формулы из h букв определяется соотношением $y=\log_4 h$. При этом число скобок максимального уровня $c_y=h/4^{(\log_4 h)-1}$.

Общее число скобок определяется соотношением

$$C=\sum_{i=1}^{y} c_i=\frac{h}{4^0}+\frac{h}{4^1}+\frac{h}{4^2}+\ldots+\frac{h}{4^{(\log_4 h)-1}}$$

$$=\frac{h}{4^0}+\frac{h}{4^1}+\frac{h}{4^2}+\ldots+\frac{h}{4^{(\log_4 h)-1}}+\frac{h}{4^{\log_4 h}}-1=$$

$$=\underbrace{(1+4+16+\ldots+h)}_{1+\log_4 h}-1=\frac{4^{1+\log_4 h}-1}{4-1}-1=$$

$$=\frac{4h-1}{3}-1=\frac{4(h-1)}{3}.$$

Ввиду того, что число скобок четно,

$$C=\left\langle\frac{4(h-1)}{3}\right\rangle,$$

где $\langle\ \rangle$ — символ округления до ближайшего меньшего четного. Это соотношение определяет максимальное число скобок в формуле в базисе И, ИЛИ из h букв.

При этом

$$s=h+\frac{C}{2}\leqslant h+\frac{\left\langle\frac{4}{3}(h-1)\right\rangle}{2}<h+\frac{2(h-1)}{3}=\frac{5h-2}{3}<[1{,}67h];$$

$$t=1+\frac{C}{2}\leqslant 1+\frac{\left\langle\frac{4}{3}(h-1)\right\rangle}{2}<1+\frac{2(h-1)}{3}=\frac{2h+1}{3}<1+[0{,}67h],$$

где $[\ ]$ — символ округления до ближайшего меньшего целого.

Определим число термов в ПЛМ для формул рассматриваемого вида. Искомая величина определяется соотношением $q=h+u$, где u — число двухвходовых элементов И в дереве.

Число элементов И в дереве, последним элементом в котором является элемент И, определяется соотношением

$$u=\underbrace{\frac{h}{4}+\frac{h}{16}+\frac{h}{64}+\frac{h}{256}+\ldots+1}_{\log_4 h}=$$

$$=\frac{h}{4}\underbrace{\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)}_{\log_4 h}=\frac{h}{4}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 h}-1}{\frac{1}{4}-1}=$$

$$=\frac{h}{4}\,\frac{1-(1/4)^{\log_4 h}}{3/4}=\frac{h}{3}(1-4^{-\log_4 h})=\frac{h}{3}\left(1-\frac{1}{h}\right)=$$

$$=\frac{h-1}{3}.$$

Если последним элементом является элемент ИЛИ, то число элементов И в дереве

$$u=\frac{\frac{h}{2}-1}{3}\,2=\frac{h-2}{3}.$$

Таким образом,

$$u=\begin{cases}(h-1)/3 \text{ при } h=2^2, 2^4, 2^6, \ldots;\\ (h-2)/3 \text{ при } h=2^3, 2^5, 2^7, \ldots.\end{cases}$$

Следовательно,

$$u=\left[\frac{h-1}{3}\right],$$

поэтому $q=h+[(h-1)/3]=[1{,}33h]$.

Площадь ПЛМ, реализующей произвольную формулу в базисе И, ИЛИ из h букв:

$$T=(s+t)q=\left(\frac{5h-2}{3}+\frac{2h+1}{3}\right)\frac{4h}{3}<3{,}11\,h^2.$$

Оценим число точек программирования ПЛМ (число точек, остающихся в ПЛМ после программирования путем выжигания), реализующей произвольную формулу в базисе И, ИЛИ из h букв:

$$T_{\text{П}}\leqslant h+2(h-1)+1=3h-1,$$

так как каждой букве и каждому выходу соответствует одна точка, а каждому элементу — две.

В таблице приведены значения s, q, t, T, $T_{\text{П}}$ при $h=1$ 16.

Реализация ДНФ, соответствующей заданной формуле. Оценим число термов и число букв в ДНФ, получающейся после раскрытия скобок.

Авторы предполагают, что эти величины максимальны, если исходная формула имеет вид:

$$f=(x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_k)\,(x_{k+1}\vee x_{k+2}\vee\ldots\vee x_{2k})\ldots. \qquad (1)$$

Определим средние значения k, при которых указанные характеристики принимают максимальные значения.

Если исходная формула состоит из h букв, то число сомножителей в ней равно h/k. Тогда число термов в соответствующей ДНФ

$$q=k^{\frac{h}{k}},$$

а число букв

$$h_1=\frac{h}{k}q=\frac{h}{k}k^{\frac{h}{k}}=hk^{\frac{h}{k}-1}.$$

Значения показателей сложности ПЛМ

h	Скобочное представление					Представление скобочной формы в ДНФ				
	s	q	t	T	$T_{\text{П}}$	s	q	t	T	$T_{\text{П}}$
2	2	2	1	6	5(4)	2	2	1	6	4
3	4	3	2	18	8(7)	3	3	1	12	6
4	6	5	3	45	11	4	4	1	20	12
5	7	6	3	60	14(13)	5	6	1	36	18
6	9	7	4	91	17(16)	6	9	1	63	27
7	11	9	5	144	20(18)	7	12	1	96	36
	(10)	(8)	(4)	(122)						
8	12	10	5	170	23	8	18	1	162	72
9	14	11	6	220	26(25)	9	27	1	270	108
10	16	13	7	299	29	10	36	1	396	144
11	17	14	7	336	32(31)	11	54	1	648	270
12	19	15	8	405	35	12	81	1	1053	405
	(18)	(15)	(7)	(375)						
13	21	17	9	510	38	13	108	1	1512	540
14	22	18	9	558	41	14	162	1	2430	972
15	24	19	10	646	44(43)	15	243	1	3888	1458
16	26	21	11	777	47	16	324	1	5508	1944

Примечание. Без скобок приведены значения параметров, вычисленные по формулам, приведенным выше. В скобках указаны достигаемые значения в случаях, когда они ниже вычисленных.

Определим производную

$$(q)'_k=\left(k^{\frac{h}{k}}\right)'=\left(e^{\frac{h}{k}\ln k}\right)'=e^{\frac{h}{k}\ln k}\left(\frac{h}{k}\ln k\right)'=$$

$$=k^{\frac{h}{k}}\left(-\frac{h}{k^2}\ln k+\frac{h}{k}\,\frac{1}{k}\right)=\frac{h}{k^2}(1-\ln k)k^{\frac{h}{k}}=h(1-\ln k)k^{\frac{h}{k}-2}.$$

Найдем значение k, при котором

$$h(1-\ln k)k^{\frac{h}{k}-2}=0.$$

Следовательно, $k=e$.
Определим теперь

$$\left(k^{\frac{h}{k}-1}\right)'_k=\left(e^{\left(\frac{h}{k}-1\right)\ln k}\right)'=e^{\left(\frac{h}{k}-1\right)\ln k}\left(\frac{h}{k}\ln k-\ln k\right)'=$$

$$=k^{\frac{h}{k}-1}\left(-\frac{h}{k^2}\ln k+\frac{h}{k}\,\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\right)=$$

$$=k^{\frac{h}{k}-1}\left(\frac{h}{k^2}(1-\ln k)-\frac{1}{k}\right)=k^{\frac{h}{k}-2}\left(\frac{h}{k}(1-\ln k)-1\right).$$

Найдем соотношение, при выполнении которого

$$k^{\frac{h}{k}-2}\left(\frac{h}{k}(1-\ln k)-1\right)=0.$$

Отсюда

$$k+h\ln k=h. \qquad (2)$$

Таким образом, для любого h величина k, обеспечивающая максимум числа термов, постоянна и равна e, в то время как значение k, гарантирующее максимум числа букв в ДНФ, зависит от числа букв h в исходной формуле.

Проведем анализ соотношения (2).

Пусть $h\to\infty$, тогда (2) сводится к выражению вида $h\ln k=h$. При этом $k=e$.

Предположим, что $k=e$, тогда $e+h>h$, поэтому $k<e$.

При $h\to 0$ $k=0$. Следовательно, $0<k=f(h)<e$. Например, при $h=10$ $k=2{,}22$; при $h=20$ $k=2{,}45$.

Предположим, что $h=20$. Рассмотрим три формулы:

$$1)\ f=(x_1\vee x_2)(x_3\vee x_4)\ldots(x_{19}\vee x_{20}),$$

где $k=2$; $q=2^{20/2}=1024$; $h_1=20\cdot 2^{(20/2)-1}=10240$;

$$2)\ f=(x_1\vee x_2\vee x_3)\ldots(x_{16}\vee x_{17}\vee x_{18})(x_{19}\vee x_{20}),$$

где $q=3^6\cdot 2=1458$; $h_1=1458\cdot 7=10\,206$; $k=\frac{20}{7}=2{,}86$;

$$3)\ f=(x_1\vee x_2\vee x_3)\ldots(x_{10}\vee x_{11}\vee x_{12})(x_{13}\vee x_{14})\ldots(x_{19}\vee x_{20}),$$

где $q=3^4\cdot 2^4=1296$; $h_1=1296\cdot 8=10\,368$; $k=\frac{20}{8}=2{,}5$.

Из формулы 1) и того, что q достигает максимума при $k=e$, следует, что:

$$\text{если } \bmod_3 h=0, \text{ то } f=(1+1+1)(1+1+1)\ldots(1+1+1);$$

$$\text{если } \bmod_3 h=1, \text{ то } f=(1+1+1)(1+1+1)\ldots(1+1+1)(1+1)(1+1);$$

$$\text{если } \bmod_3 h=2, \text{ то } f=(1+1+1)(1+1+1)\ldots(1+1+1)(1+1).$$

Определим соотношения для подсчета максимального числа термов в ДНФ:

$$\text{если } \bmod_3 h=0, \text{ то } q=3^{h/3};$$

$$\text{если } \bmod_3 h=1, \text{ то } q=4\cdot 3^{(h-4)/3}<3^{h/3};$$

$$\text{если } \bmod_3 h=2, \text{ то } q=2\cdot 3^{(h-2)/3}<3^{h/3}.$$

Следовательно, $q\leqslant 3^{h/3}$.

Площадь ПЛМ рассматриваемого вида при реализации ДНФ определяется соотношением $T=(h+1)q$.

Для формул, порождающих ДНФ с максимальным числом термов,

$$T=(h+1)3^{h/3}, \text{ если } \bmod_3 h=0;$$

$$T=4(h+1)3^{(h-4)/3}, \text{ если } \bmod_3 h=1;$$

$$T=2(h+1)3^{(h-2)/3}, \text{ если } \bmod_3 h=2.$$

Следовательно, $T\leqslant (h+1)3^{h/3}$.

Число букв при этом определяется следующим образом:

$$\text{если } \bmod_3 h=0, \text{ то } h_1=(h/3)3^{h/3};$$

$$\text{если } \bmod_3 h=1, \text{ то } h_1=4\left]\frac{h}{3}\right[3^{(h-4)/3};$$

$$\text{если } \bmod_3 h=2, \text{ то } h_1=2\left]\frac{h}{3}\right[3^{(h-2)/3},$$

где] [— символ округления до ближайшего большего целого.

Следовательно, $h_1\leqslant \left]\frac{h}{3}\right[\ 3^{h/3}$. Число точек программирования в этом случае определяется соотношением $T_\text{П}=h_1+q$.

Для формул, порождающих ДНФ с максимальным числом термов,

$$T_\text{П}=\left(\frac{h}{3}+1\right)3^{h/3}, \text{ если } \bmod_3 h=0;$$

$$T_\text{П}=4\left(\left]\frac{h}{3}\right[+1\right)3^{(h-4)/3}, \text{ если } \bmod_3 h=1;$$

$$T_\text{П}=2\left(\left]\frac{h}{3}\right[+1\right)3^{(h-2)/3}, \text{ если } \bmod_3 h=2.$$

Таким образом,

$$T_\text{П}\leqslant\left(\left]\frac{h}{3}\right[+1\right)3^{h/3}.$$

В таблице приведены значения s, q, t, T, $T_\text{П}$ для рассматриваемого случая при $h=1-16$.

Сравнение методов реализации. Из сопоставления результатов, представленных в таблице, и соотношений для одинаковых параметров, приведенных выше, следует, что для верхних оценок справедливы следующие соотношения:

$$\text{при } h\geqslant 3 \quad s^{\text{ДНФ}}<s^{\text{скоб}};$$
$$t^{\text{ДНФ}}<t^{\text{скоб}};$$

$$\text{при } h\geqslant 4 \quad T_{\text{П}}^{\text{ДНФ}}>T_{\text{П}}^{\text{скоб}};$$

$$\text{при } h\geqslant 6 \quad q^{\text{ДНФ}}>q^{\text{скоб}};$$

$$\text{при } h\geqslant 9 \quad T^{\text{ДНФ}}>T^{\text{скоб}};$$

$$\text{при } h\geqslant 11 \quad (T-T_{\text{П}})^{\text{ДНФ}}>(T-T_{\text{П}})^{\text{скоб}}.$$

Из этих соотношений следует, что большинство верхних оценок сложности при использовании первого метода лучше соответствующих оценок второго метода.

Если обеспечить связь части выходов ПЛМ с ее входами внутри корпуса, то первый подход (при указанных значениях h) обеспечит лучшие показатели по всем приведенным верхним оценкам.

Рассмотренная ПЛМ обладает упрощенной структурой по сравнению с выпускаемыми промышленностью, так как не содержит инверсных входов и выходов. Изложенная методика позволяет получить аналогичные результаты и для таких ПЛМ. Однако приведенные в настоящей работе оценки для s, q, t могут использоваться и для выпускаемых ПЛМ в качестве верхних оценок.

Из таблицы следует, что в ПЛМ 556 РТ1 с параметрами $s=16$, $q=48$, $t=8$ может быть реализована любая формула в базисе И, ИЛИ, НЕ по крайней мере из 10 букв (причем реализация формул из $h\leqslant 10$ букв может выполняться любым из рассмотренных методов). Это позволяет оценить число ПЛМ, требующихся для реализации произвольной формулы в указанном базисе из h букв [3]:

$$L\leqslant \left]\frac{2(h-1)}{10}\right[= \left]\frac{h-1}{5}\right[.$$

Для системы N формул, в правых частях которых содержится H букв, число ПЛМ удовлетворяет соотношению [3]:

$$L\leqslant \left]\frac{2(H-N)}{10}\right[+N-1.$$

Использование ПЛМ для реализации настраиваемых логических модулей. Приведенные выше соотношения оценивают возможность реализации в ПЛМ самой сложной формулы в базисе И, ИЛИ из h букв. ПЛМ при этом рассматривается как универсальный логический модуль в указанном классе формул, настройка которого осуществляется путем внесения информации без использования настроечных входов. Это приводит к тому, что если используется однократно программируемая ПЛМ, то изменение ее настройки практически невозможно, за исключением, быть может, частичного редактирования.

Если же используется репрограммируемая ПЛМ, то возможны случаи, когда изменение настройки технологически затруднительно. Поэтому ниже обсуждается метод применения однократно запрограммированных ПЛМ в качестве модулей, настраиваемых на реализацию классов функций (формул) путем использования некоторых входов ПЛМ в качестве настроечных.

Суть этого метода состоит в том, что ПЛМ первоначально программируется не на реализуемую функцию, а на порождающую функцию (п. ф) некоторого настраиваемого модуля (НЛМ) [4]. После этого осуществляется настройка на реализацию заданной функции путем использования настроечных входов этого модуля. Реализация другой функции осуществляется не путем программирования новой ПЛМ (если редактирование первоначальной невозможно) или ее репрограммированием (если оно допускается), а путем изменения информации на настроечных входах модуля. (Назначение входов в качестве настроечных зависит от типа используемых НЛМ.)

В силу того, что ПЛМ имеет несколько выходов, на каждом из них может быть реализована п. ф., обладающая специфическими свойствами. При этом возможны два варианта: п. ф. зависят от разных переменных; п. ф. зависят от одних и тех же переменных.

В первом случае ПЛМ будет представлять собой композицию нескольких не связанных между собой НЛМ, которые могут использоваться параллельно и независимо. При этом п. ф. могут быть как различными, так и одинаковыми.

Во втором случае п. ф., программируемые в ПЛМ, рационально выбирать различными и в зависимости от специфики реализуемой функции использовать соответствующий выход. Это позволит уменьшить объем информации, вносимой с помощью настроечных входов.

Действительно, если на одном выходе ПЛМ реализуется п. ф. модуля, универсального в классе формул в базисе И, ИЛИ из h букв, а на другом — п. ф. модуля, универсального в классе функций h переменных, то для формулы, принадлежащей классу, реализуемому п. ф. первого модуля, рационально использовать первый выход, так как эта п. ф. зависит от меньшего числа переменных и поэтому необходимое число настроечных операций сокращается.

Предложенный метод многократного использования однократно программируемых устройств может быть использован также и для постоянных запоминающих устройств (ПЗУ).

Изложенный подход позволяет пользователям ПЛМ и программируемых ПЗУ создавать НЛМ с необходимыми свойствами. П. ф. ряда ПЛМ приведены в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баранов С. И., Синев В. Н.* Программируемые логические матрицы в цифровых системах. — Зарубежная радиоэлектроника, 1979, № 1, с 65–82.

2. *Баранов С. И., Баркалова А. А.* Применение программируемых логических матриц в цифровой технике. — Зарубежная радиоэлектроника, 1982, № 6, с. 67—79.

3. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Оценка логической эффективности интегральных микросхем. — АВТ, 1981, № 1, с. 38–40.

4. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981. 163 с.

5. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы (унифицированные логические схемы). Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности. 1981. 53 с.

Поступила в редакцию
25.05.84

ISSN 0132—4160

АВТ

АВТОМАТИКА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

1985 2