ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2003, № 4, с. 62–68

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 681.3.06:62-507

РАЗЛОЖЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ПО КРАЙНИМ ПРАВЫМ ВХОДНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ТАБЛИЦ ИСТИННОСТИ

© 2003 г. **А. А. Шалыто**

Санкт-Петербург, Федеральный научно-производственный центр – ФГУП "НПО "Аврора",
С.-Петербургский государственный ин-т точной механики и оптики (технический ун-т)

Поступила в редакцию 15.07.02 г., после доработки 23.12.02 г.

Предложен метод разложения произвольной булевой функции, заданной таблицей истинности, по крайним правым входным переменным. Показано, что все ее разложения на две остаточные функции по крайней правой входной переменной либо совпадают с разложениями Шеннона и Рида, либо PN-однотипны с ними, и других разложений на две остаточные функции не существует. Предложен распределительный метод разложения булевых функций.

Введение. Известен канонический метод синтеза [1, 2], основанный на разложении булевой функции, заданной таблицей истинности, по крайним левым входным переменным. Для нахождения другого решения (возможно, более оптимального) по исходной таблице истинности строится (например, с помощью метода, изложенного в [2]) новая таблица истинности с другим порядком входных переменных, к которой вновь применяется указанный метод.

Цель настоящей работы – разработка метода разложения произвольной булевой функции, заданной таблицей истинности, по крайним правым входным переменным, что позволяет, не перестраивая таблицу истинности и не строя карту декомпозиции [3], получать кроме известного и второе решение. В статье также показано, что все разложения произвольной булевой функции на две остаточные функции по крайней правой входной переменной либо совпадают с разложениями Шеннона и Рида, либо PN-однотипны [4] с ними, и других разложений на две остаточные функции не существует. При разложении произвольной булевой функции по двум и более крайним правым входным переменным существует такое назначение функций на входах мультиплексора MX, что предложенная в [5] стандартная схема, реализующая мультиплексорную декомпозицию [5], существенно упрощается за счет уменьшения размерности мультиплексора и исключения одного из двух постоянных запоминающих устройств (ПЗУ). Представлен распределительный метод разложения булевых функций.

1. Разложения булевых функций по одной переменной. Частный случай декомпозиций – разложения булевых функций по переменным. Наиболее известным является *разложение Шеннона* по переменной x [6], которое имеет следующий вид:

$$f = f(x_i = 0)!x_i \vee f(x_i = 1)x_i,$$

где ! – символ операции "инверсия".

Так как в этом соотношении конъюнкции ортогональны, то

$$f = f(x_i = 0)!x_i \oplus f(x_i = 1)x_i.$$

Ввиду того, что $!x_i = 1 \oplus x_i$, то

$$f = f(x_i = 0)(1 \oplus x_i) \oplus f(x_i = 1)x_i =$$
$$= f(x_i = 0) \oplus (f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1))x_i.$$

Ввиду того, что $x_i = 1 \oplus !x_i$, то

$$f = f(x_i = 0)!x_i \oplus f(x_i = 1)(1 \oplus !x_i) =$$
$$= f(x_i = 0) \oplus (f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1))!x_i.$$

Эти соотношения называются разложениями Рида [7].

2. Разложение Шеннона по левой входной переменной. Если в соотношении, определяющем мультиплексорную декомпозицию [5]

$$f(X) = \mathrm{MX}(Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1); \Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_m(X_0)), \quad (2.1)$$

выбрать $m = k - 1$, $Q_0 = f(x_1 = 0) = f(0)$, $Q_1 = f(x_1 = 1) = f(1)$, то $\Phi = x_1$. При этом

$$f = (\mathrm{MX} f(0), f(1); x_1).$$

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по крайней левой входной переменной. Стандартная схема, реализующая это соотношение, приведена на рис. 1.

3. Разложение Шеннона по k крайним левым входным переменным. Если в соотношении (2.1) выбрать

$$m = k, \quad Q_0 = (x_1 = 0, \ldots, x_k = 0) = f_0(X_1),$$

$$Q_1 = f(x_1 = 0, \ldots, x_k = 1) = f_1(X_1), \ldots, Q_{2^k-1} =$$
$$= f(x_1 = 1, \ldots, x_k = 1) = f_{2^k-1}(X_1),$$

то функции Φ_j могут быть определены следующим образом:

$$\Phi_1 = x_1, \quad \Phi_2 = x_2, \ldots, \Phi_k = x_k.$$

При этом

$$f = \mathrm{MX}(f_0(X_1), f_1(X_1), \ldots, f_{2^k-1}(X_1); x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по k крайним левым входным переменным. Стандартная схема, реализующая это соотношение, приведена на рис. 2.

4. Разложение Шеннона по $n - 1$ крайним левым входным переменным. Если в соотношении (2.1) выбрать

$$m = n - 1,$$
$$Q_0 = f(x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0, x_n) = f_0(x_n), \ldots, Q_{2^{n-1}-1} =$$
$$= f(x_1 = 1, \ldots, x_{n-1} = 1, x_n) = f_{2^{n-1}-1}(x_n),$$

то функции Φ_j могут быть определены следующим образом:

$$\Phi_1 = x_1, \quad \Phi_2 = x_2, \ldots, \Phi_{2^{n-1}-1} = x_{n-1}.$$

При этом

$$f = \mathrm{MX}(f_0(x_n), f_1(x_n), \ldots,$$
$$f_{2^{n-1}-1}(x_n); x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где $f_i(x_n) = \{0, 1, !x_n, x_n\}$.

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по $n - 1$ крайним левым входным переменным. Стандартная схема, реализующая это соотношение, приведена на рис. 3.

5. Разложение Шеннона по всем входным переменным. Если в соотношении (2.1) выбрать $m = n$, $Q_0 = f(x_1 = 0, \ldots, x_n = 0) = f_0, \ldots,$

$$Q_{2^n-1} = f(x_1 = 1, \ldots, x_n = 1) = f_{2^n-1},$$

то функции Φ_j могут быть определены следующим образом:

$$\Phi = x_1, \ldots, \Phi_{2^n-1} = x_n.$$

При этом

$$f = \mathrm{MX}(f_0, \ldots, f_{2^n-1}; x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $f_i = 0, 1$.

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по всем входным переменным. Стандартная схема, реализующая это соотношение, представлена на рис. 4.

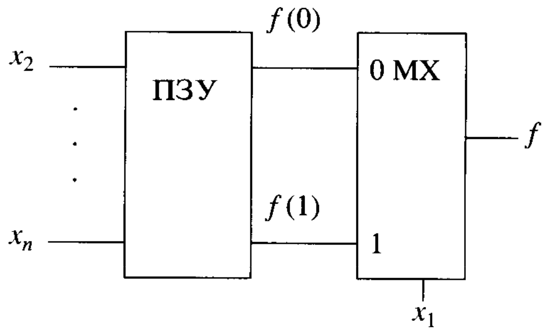

Рис. 1.

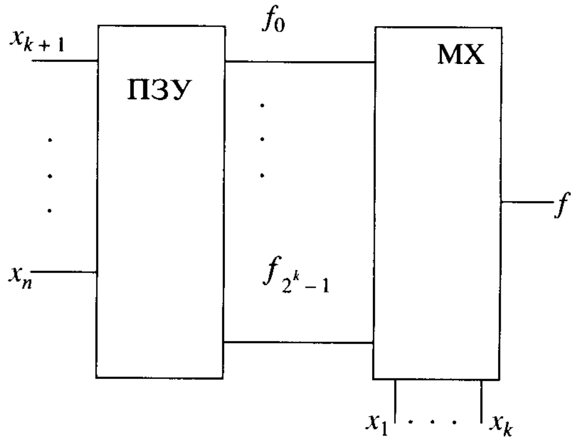

Рис. 2.

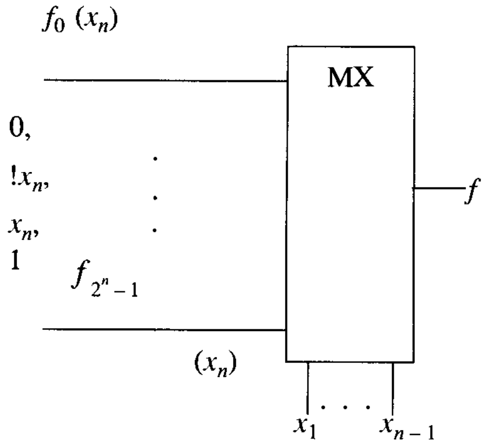

Рис. 3.

Методы реализации булевых функций схемами, приведенными в этом разделе, хорошо известны и рассмотрены, например, в [8].

6. Разложение по крайней правой входной переменной. Завершив рассмотрение разложений Шеннона по крайним левым переменным, опишем универсальные разложения булевых функций по крайним правым входным переменным. При этом первоначально представим соотношение

$$f = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2),$$

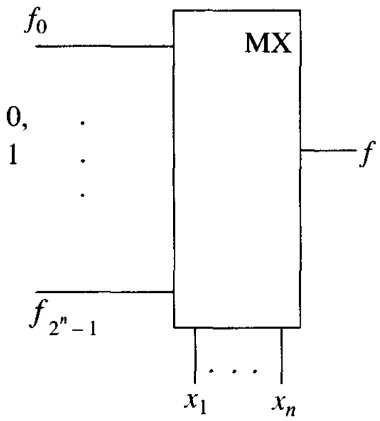

Рис. 4.

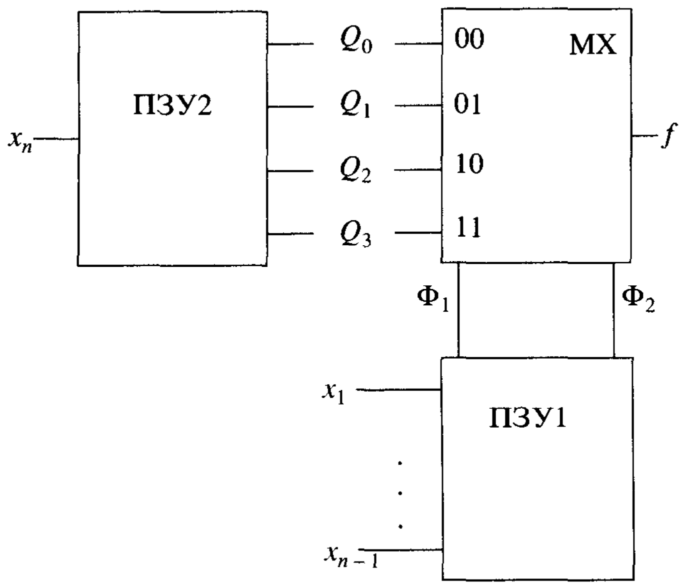

Рис. 5.

где $Q_i = \{0, 1, !x_n, x_n\}$, $Q_0 != Q_1 != Q_2 != Q_3$ (!= – символ операции "не равно"), а функции Φ_1 и Φ_2 не зависят от переменной x_n.

Покажем, что это соотношение порождает при различных назначениях функций Q_i все универсальные разложения произвольной булевой функции на две остаточные функции по переменной x_n, причем каждое из них является либо разложением Шеннона по этой переменной, либо одним из разложений Рида по той же переменной, либо PN-однотипно с ними. Тем самым доказывается, что не существует универсальных разложений по одной переменной, отличных от разложений Шеннона и Рида и PN-однотипных с ними.

Для этого случая существуют 24 варианта назначений функций Q_i в рассматриваемом соотношении, которому соответствует стандартная схема, приведенная на рис. 5. Эта схема может быть так же изображена, как показано на рис. 6.

Каждое из назначений приводит к определенной булевой функции и соответствующей булевой формуле, что отражено в таблице. Из рассмотрения этой таблицы следует, что восемь выражений в ней (4, 6, 10, 12, 13, 15, 19, 21) PN-однотипны с разложением Шеннона, восемь (2, 5, 7, 9, 16, 18, 20, 23) PN-однотипны с разложением Рида по переменной x_n, а последние восемь (1, 3, 8, 11, 14, 17, 22, 24) – PN-однотипны с разложением Рида по переменной $!x_n$. Из изложенного следует, что не существует универсальных разложений на две остаточные функции, отличных от разложений Шеннона и Рида и PN-однотипных с ними, что до сих пор *не было известно*.

Каждое из этих выражений является универсальным – может использоваться в качестве образа декомпозиции произвольной булевой функции n переменных. Обратим внимание на тот факт, что при применении каждого из этих выражений существует единственный набор функций Φ_1 и Φ_2.

Пример 1. Используя строку 6 таблицы, выполнить декомпозицию функции $f(x_1, x_2, x_4, x_3) = |0101\ 0100\ 0110\ 0111|^T$, где T – символ транспонирования столбца значений таблицы истинности.

Составим уравнение $f = \Phi_1 \, ! \, x_3 \vee \Phi_2 x_3$ и запишем его в мультиплексорной форме, применяя вместо функций Q_1 их выражения

$$MX = (x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_4) =$$
$$= MX(0, x_3, !x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет единственное решение

$$\Phi_1 = MX(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_4) = x_1x_4;$$
$$\Phi_2 = MX(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_4) =$$
$$= (!x_1 \oplus x_2) \vee !x_4.$$

Данная декомпозиция соответствует разложению Шеннона по переменной x_3, так как $f(x_3 = 0) = \Phi_1$, $f(x_3 = 1) = \Phi_2$. При этом $f = x_1x_4!x_3 \vee ((!x_1 \oplus x_2) \vee !x_4)x_3$.

Пример 2. Используя строку 21 таблицы, выполнить декомпозицию функции, рассмотренной в предыдущем примере.

В этом случае $f = \Phi_2!x_3 \vee !\Phi_1x_3$, и поэтому

$$MX = (x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_4) =$$
$$= MX(x_3, 1, 0, !x_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = MX(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0; x_1, x_2, x_4) = (x_1 \oplus x_2)x_4;$$
$$\Phi_2 = MX(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_4) = x_1x_4.$$

Настоящая декомпозиция однотипна с разложением Шеннона по переменной x_3, тогда $f = x_1x_4!x_3 \vee !((x_1 \oplus x_2)x_4)x_3$.

Пример 3. Применяя строку 1 таблицы, выполнить декомпозицию функции, рассмотренной в примере 1.

В этом случае $f = \Phi_2 \oplus \Phi_1!x_3$, и поэтому

$$MX = (x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_4) =$$

$$= \mathrm{MX}(0, 1, !x_3, x_3, \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_4) = !x_2 \vee !x_4;$$

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_4) =$$

$$= (!x_1 \oplus x_2) \vee !x_4.$$

Данная декомпозиция однотипна с разложением Рида по переменной $!x_3$, так как $f(x_3 = 1) = \Phi_2$, $f(x_3 = 0) \oplus f(x_3 = 1) = \Phi_1$. При этом $f = ((!x_1 \oplus x_2) \vee \vee !x_4) \oplus (!x_2 \vee !x_4)!x_3$.

Пример 4. Используя строку 5 таблицы, выполнить декомпозицию функции, рассмотренной в примере 1.

В этом случае $f = \Phi_1 \oplus \Phi_2 x_3$, и поэтому

$$\mathrm{MX} = (x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \mathrm{MX}(0, x_3, 1, !x_3, \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_4;$$

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_2 \vee !x_4.$$

Настоящая декомпозиция является разложением Рида по переменной x_3. В ней в отличие от предыдущих обе остаточные функции зависят от двух переменных. При этом $f = x_1 x_4 \oplus (!x_2 \vee !x_4)x_3$.

Пример 5. Применяя строку 20 таблицы, выполнить декомпозицию функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |0011\ 0010\ 0110\ 0111|^{\mathrm{T}}$.

В этом случае $f = \Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_4$, и поэтому

$$\mathrm{MX} = (0, 1, 0, !x_4, x_4, !x_4, x_4, 1, x_1, x_2, x_4) =$$

$$= \mathrm{MX}(x_4, 0, !x_4, 1, \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_4) = x_3;$$

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_4) = !x_2 \oplus x_2 x_3.$$

Таким образом, $f = x_3 \oplus (!x_1 \oplus x_2 x_3)x_4$.

Булевы формулы, полученные в двух последних примерах, либо минимальны по числу букв, либо отличаются от минимальной не более чем на одну букву. При этом отметим, что булевы функции для них существенно зависят от всех своих переменных, а их столбцы значений содержат четное число единиц, и поэтому они не могут быть реализованы булевыми формулами, бесповторными в базисе {&, ∨, !} [4].

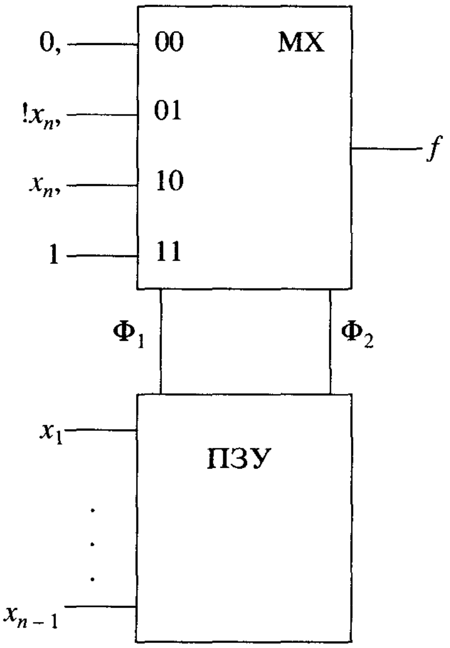

Рис. 6.

Из изложенного следует, что ответ на вопрос о нахождении простейшей декомпозиции при разложении по последней переменной, как и обычно в логическом проектировании [2], остается открытым, так как этот ответ в общем случае связан с полным перебором по порядку расположения входных переменных в таблице истинности и назначением функций Q_i. Достоинство предлагаемого подхода состоит в том, что они позволяет весьма просто с единых позиций проводить как

Таблица

№ п.п.	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	f			№ п.п.	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	f		
1	0	1	$!x_n$	x_n	Φ_2	$\oplus$	$\Phi_1!x_n$	13	$!x_n$	0	1	x_n	$!\Phi_2!x_n$	v	$\Phi_1 x_n$
2	0	1	x_n	$!x_n$	Φ_2	$\oplus$	$\Phi_1 x_n$	14	$!x_n$	0	x_n	1	$!\Phi_2!x_n$	$\oplus$	Φ_1
3	0	$!x_n$	1	x_n	Φ_1	$\oplus$	$\Phi_2!x_n$	15	$!x_n$	1	0	x_n	$!\Phi_1!x_n$	v	$\Phi_2 x_n$
4	0	$!x_n$	x_n	1	$\Phi_2!x_n$	v	$\Phi_1 x_n$	16	$!x_n$	1	x_n	0	$!\Phi_1$	$\oplus$	$!\Phi_2 x_n$
5	0	x_n	1	$!x_n$	Φ_1	$\oplus$	$\Phi_2 x_n$	17	$!x_n$	x_n	0	1	$!\Phi_1!x_n$	$\oplus$	Φ_2
6	0	x_n	$!x_n$	1	$\Phi_1!x_n$	v	$\Phi_2 x_n$	18	$!x_n$	x_n	1	0	$!\Phi_2$	$\oplus$	$!\Phi_1 x_n$
7	1	0	$!x_n$	x_n	$!\Phi_2$	$\oplus$	$\Phi_1 x_n$	19	x_n	0	1	$!x_n$	$\Phi_1!x_n$	v	$!\Phi_2 x_n$
8	1	0	x_n	$!x_n$	$\Phi_1!x_n$	$\oplus$	$!\Phi_2$	20	x_n	0	$!x_n$	1	Φ_1	$\oplus$	$!\Phi_2 x_n$
9	1	$!x_n$	0	x_n	$!\Phi_1$	$\oplus$	$\Phi_2 x_n$	21	x_n	1	0	$!x_n$	$\Phi_2!x_n$	v	$!\Phi_1 x_n$
10	1	$!x_n$	x_n	0	$!\Phi_1!x_n$	v	$!\Phi_2 x_n$	22	x_n	1	$!x_n$	0	$!\Phi_2!x_n$	$\oplus$	$!\Phi_1$
11	1	x_n	0	$!x_n$	$\Phi_2!x_n$	$\oplus$	Φ_1	23	x_n	$!x_n$	0	1	Φ_2	$\oplus$	$!\Phi_1 x_n$
12	1	x_n	$!x_n$	0	$!\Phi_2!x_n$	v	$!\Phi_1 x_n$	24	x_n	$!x_n$	1	0	$!\Phi_1!x_n$	$\oplus$	$!\Phi_2$

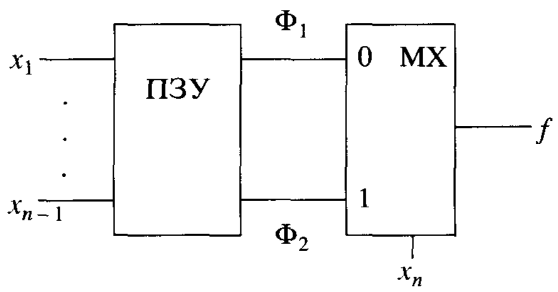

Рис. 7.

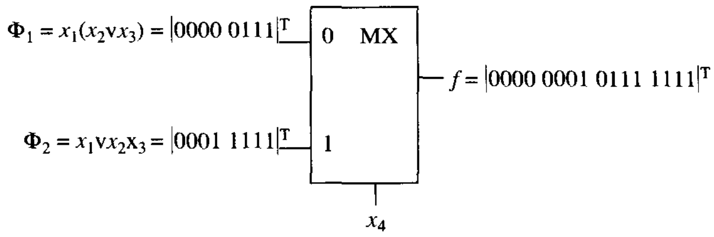

Рис. 8.

разложение Шеннона, так и разложение Рида, а также разложения, PN-однотипные с ними, что до сих пор не было известно.

Однако ответ на вопрос, при каком назначении функций Q_i разложение по крайней правой входной переменной наименее трудоемко, находится в строке 6 таблицы, так как при этом схема на рис. 6 трансформируется и резко упрощается, превращаясь в схему на рис. 7, структура которой аналогична структуре схемы на рис. 1, соответствующей разложению Шеннона по крайней левой входной переменной.

Для нахождения функций Φ_1 и Φ_2 (рис. 7) по заданной булевой функции предлагается простой метод, состоящий в распаковывании (распределении) ее столбца значений. При этом функция $\Phi_1(\Phi_2)$ образуется из значений функции f, расположенных на четных (нечетных) позициях.

Пример 6. Разложить по переменной x_4 булеву функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |0000\ 0001\ 0111\ 1111|^T.$$

Искомое разложение приведено на рис. 8. Традиционное разложение этой функции по переменной x_1 представлено на рис. 9.

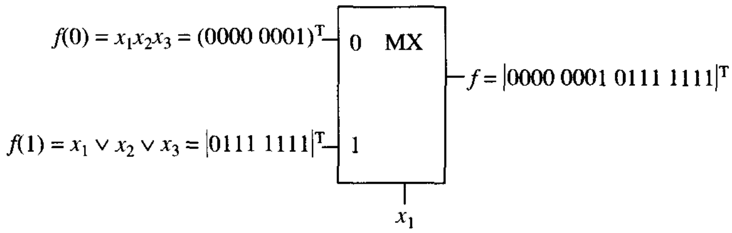

Рис. 9.

Отметим, что если функция f содержит только два типа фрагментов длиной два, то стандартная схема, рассмотренная на рис. 5, упрощается и превращается в схему, которая изображена на рис. 10.

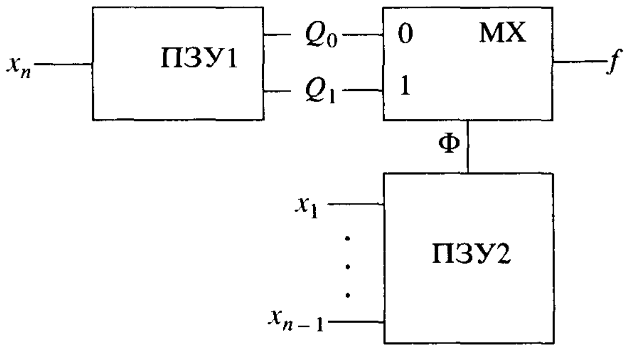

Рис. 10.

7. Разложение по двум и более крайним правым входным переменным. Для построения стандартной схемы, обеспечивающей декомпозицию произвольной булевой функции по функциям Q_i, зависящим от $n - k$ крайних правых переменных, множество этих функций должно состоять из всех функций $n - k$ переменных. При этом для $n - k = 2$ справедливо соотношение

$$f = \mathrm{MX}(Q_0(X_1), \ldots, Q_{15}(X_1);$$
$$\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0), \Phi_3(X_0), \Phi_4(X_0)),$$

где $X_0 = \{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$, $X_1 = \{x_{n-1}, x_n\}$, а для $n - k = 3$ справедливо соотношение

$$f = \mathrm{MX}(Q_0(X_1), \ldots, Q_{255}(X_1); \Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_8(X_0)),$$

где $X_0 = \{x_1, \ldots, x_{n-3}\}$, $X_1 = \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$.

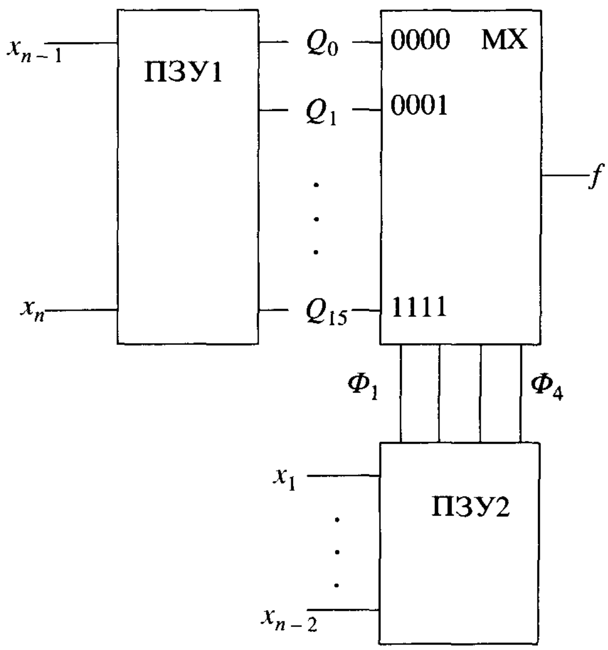

Рис. 11.

Сложность последнего выражения, а тем более выражений для $n - k >= 3$, привела к тому, что в [9] был рассмотрен только один пример для случая $n - k = 2$. В этой работе вместо мультиплексорной формы использовалось весьма громоздкое выражение вида

$$f = \bigvee_{i=0}^{15} Q_i(X_1)\tilde{\Phi}_1(X_0)\tilde{\Phi}_2(X_0)\tilde{\Phi}_3(X_0)\tilde{\Phi}_4(X_0),$$

где "~" – символ прямой или инверсной переменной (функции).

Для этого выражения в работе [9] было отмечено, что если функции $Q_i(X_1)$ зафиксировать, то нахождение декомпозиции сводится к определению функций $\Phi_j(X_0)$. Однако как выполнить фиксацию функций $Q_i(X_1)$, в этой работе не было предложено.

Решим этот вопрос сначала для $n - k = 2$, а затем и в общем случае. Стандартная схема для $n - k = 2$, являющаяся частным случаем стандартной схемы, реализующей мультиплексорную декомпозицию (рис. 1 в работе [5]), приведена на рис. 11. Автором был отмечен *удивительный* факт, состоящий в том, что среди вариантов назначений 16 функций двух переменных Q_i на 16 входов мультиплексора "16 в 1" имеется один вариант, который приводит к замене этой схемы на существенно более простую стандартную схему (рис. 12).

Упрощение схемы на рис. 11 достигается в том случае, если функции Q_i на входах мультиплексора расположить так, чтобы для каждой из них столбец значений совпадал с двоичным адресом входа мультиплексора, к которому эта функция подключена. При этом приведенное выше соотношение для $n - k = 2$ также резко упрощается и приобретает вид

$$f = \text{MX}(\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0), \Phi_3(X_0), \Phi_4(X_0); x_{n-1}, x_n).$$

Таким образом, рассмотренная выше декомпозиция функции f свелась к ее разложению по двум крайним правым переменным – x_{n-1} и x_n. Предложим простейший способ определения функций Φ_j для булевой функции, заданной таблицей истинности: столбец значений этой функции "распределяется" так, что столбцы значений функций Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 образуются из значений функции f с номерами 0, 4, 8, 12, ...; 1, 5, 9, 13, ...; 2, 6, 10, 14, ...; 3, 7, 11, 15, ... соответственно.

П р и м е р 7. Разложить по двум последним переменным булеву функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |0000\ 0001\ 0111\ 1111|^{\text{T}}.$$

Искомое разложение приведено на рис. 13, традиционное разложение Шеннона при табличном задании булевой функции – на рис. 14.

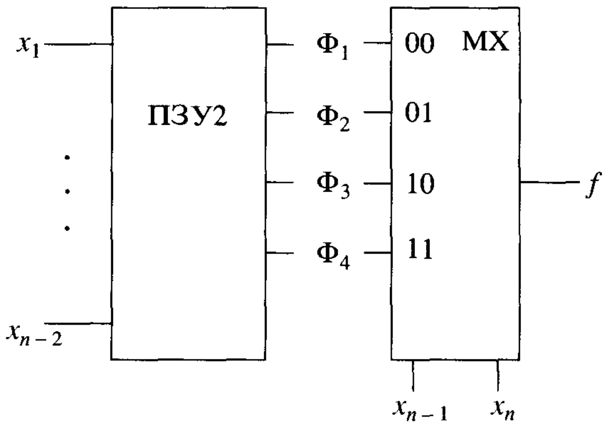

Рис. 12.

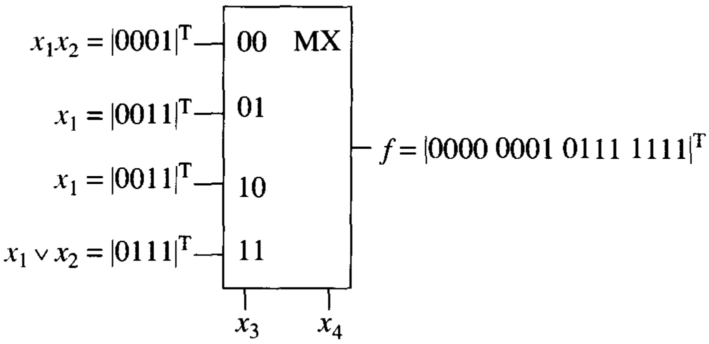

Рис. 13.

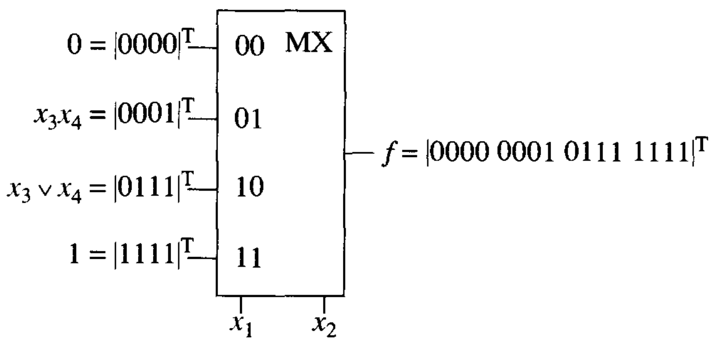

Рис. 14.

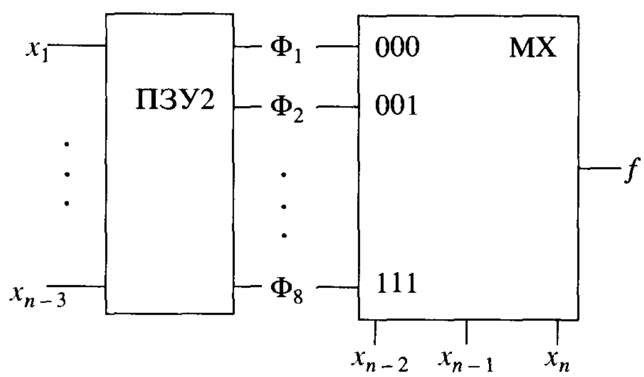

Рис. 15.

Таким образом, при применении предлагаемого и известного подходов появляется возможность по заданной таблице истинности без изменения порядка входных переменных в ней получить два решения и выбрать простейшее.

Представленный подход, осуществляющий замену декомпозиции на разложение по крайним правым переменным, справедлив также и для произвольных значений $n - k$

$$f = \mathrm{MX}(\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0), \ldots, \Phi_{2^{n-k}}(X_0);\ x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

При $n - k = 3$ предлагаемый подход позволяет в стандартной схеме, получаемой из схемы на рис. 1 в работе [5], исключить постоянное запоминающее устройство ПЗУ1 с тремя входами и 256 выходами и заменить мультиплексор “256 в 1” на мультиплексор “8 в 1” (рис. 15).

При разложении по $n - k$ последним переменным столбец значений заданной булевой функции “распределяется” на 2^{n-k} функций по аналогии с тем, как это было изложено для $n - k = 1, 2$.

Рассмотренный подход может быть назван “распределительным методом разложения булевых функций”.

Заключение. Предложен метод разложения произвольной булевой функции, заданной таблицей истинности, по крайним правым входным переменным, в то время как традиционно при таком задании булевая функция раскладывается по крайним левым переменным. Рассмотрены все возможные 24 разложения произвольной булевой функции на две остаточные функции по крайней правой входной переменной и показано, что все разложения по этой переменной либо совпадают с разложениями Шеннона и Рида, либо PN-однотипны с ними, и других универсальных разложений на две остаточные функции не существует. При разложении произвольной булевой функции по двум и более крайним правым входам переменным существует такое назначение функций на входах мультиплексора, что предложенная в работе [5] стандартная схема, реализующая мультиплексорную декомпозицию, существенно упрощается за счет уменьшения размерности мультиплексора и исключения одного из двух постоянных запоминающих устройств. Предложен распределительный метод, осуществляющий разложения булевых функций по крайним правым входным переменным их таблиц истинности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блох А.Ш.* Канонический метод синтеза контактных схем // АиТ. 1961. № 6.
2. *Блох А.Ш.* Граф-схемы и их применение. Минск: Вышэйш. шк., 1975.
3. *Фридман А., Менон П.* Теория и проектирование переключательных схем. М.: Мир, 1978.
4. *Артюхов В.Л., Копейкин Г.А., Шалыто А.А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.
5. *Шалыто А.А.* Мультиплексорный метод реализации булевых функций схемами из произвольных логических элементов // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 5.
6. *Shannon C.* A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. of Americal Inst. of Electrical engineirs. 1938. № 57.
7. *Reed I.S.* Class of multiple-error correcting codes and decoding scheme // IRE trans. Inform. Theory. 1954. IT-4.
8. *Артюхов В.Л., Копейкин Г.А., Шалыто А.А.* Судовые управляющие логические системы. Унифицированные логические схемы. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1981.
9. *Li H.F.* Variable selection in logic sythesis using multiplexers // Int. J. Electronics. 1980. № 3.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

2003, №4

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

МОСКВА