ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 1996, № 5, с. 133–146

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОРГАНИЗАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

УДК 681.3.06:62-507

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ ОДНОРОДНЫМИ МУЛЬТИПЛЕКСОРНЫМИ И МАЖОРИТАРНЫМИ КАСКАДАМИ

© 1996 г. **В. Л. Артюхов, А. А. Шалыто**

Санкт-Петербург, СПбГУ

Поступила в редакцию 26.02.96 г.

Излагаются методы реализации различных классов булевых формул в базисах {И, ИЛИ, НЕ} и {И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ} из h букв однородными каскадами из $h-1$ мультиплексоров "два в один" или мажоритарных элементов "два и более из трех" при равной доступности прямых и инверсных переменных. Впервые показано, что произвольные нормальные формулы в базисе И, ИЛИ, НЕ могут быть схемно реализованы в том порядке, в котором они записаны. Показана эффективность предлагаемых каскадов по сравнению с однородными каскадами Макхопадхая и Майтра.

Введение. Известно большое число работ, посвященных реализации булевых функций (БФУ) и булевых формул (БФ) в однородных структурах [1–9]. В [10] изложены методы реализации БФУ в двумерных однородных структурах (решетках) из настраиваемых модулей, обладающих нестандартной структурой. В [11] изложен метод реализации некоторых типов БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ в решетке из модулей, настраиваемых на функции ИЛИ и ИЛИ-НЕ двух переменных. Метод реализации БФУ в решетках из мультиплексоров (МС) "два в один" представлен в [12]. Методы реализации БФУ в решетках из мажоритарных элементов (МЭ) "два и более из трех" рассматривались в [13–17].

Одномерные однородные структуры могут содержать различное число каналов. В [4, 18] показано, что произвольные (с точностью до порядка их записи) БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ могут быть реализованы трехканальной однородной структурой из настраиваемых модулей с памятью. При этом число модулей в структуре определяется не числом букв в формуле, а числом символов (букв, скобок, операций) в ней. Переход от модулей с памятью к комбинационным в трехканальных однородных структурах ограничивает класс БФ формулами таких типов, как "произведение сумм произведений" и глубины один [4]. Двухканальные однородные структуры из комбинационных модулей [6, 9] позволяют реализовать БФ, заданные дизъюнктивными нормальными формами и полиномами Жегалкина.

В [3, 4] изучались функциональные возможности одноканальных структур (каскадов) из однотипных двухвходовых логических элементов при подаче безынверсных входных переменных. Показано, что каждый из 10 типов однородных каскадов реализует определенный тип каскадных БФ (КБФ), в том числе скобочных. Дальнейшие исследования проводились в предположении о равной доступности прямых и инверсных входных переменных.

В [3, 4, 6, 20–25] изучались каскады из $h-1$ двухвходовых элементов И и ИЛИ (неоднородные каскады Макхопадхая) и каскады из $h-1$ двухвходовых элементов И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ (неоднородные каскады Майтра), реализующие КБФ из h букв в базисах {И, ИЛИ, НЕ} и {И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ} соответственно.

В [3, 4] на основе разложения Шеннона булевой формулы по одной переменной предложены методы определения представимости заданной БФ каскадными бесповторными БФ (КББФ) в базисах {И, ИЛИ, НЕ} и {И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ} и методы их построения в случае существования такой возможности. При этом установлено, что для представимости БФ с помощью КББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ в каждом разложении Шеннона (заданной БФ и ее остаточных) одна из остаточных $f(x_i=0)$ или $f(x_i=1)$ должна быть константой. Если остаточная является нулем (единицей), то разложение может быть выполнено двухвходовым элементом И (ИЛИ), что обеспечивает построение неоднородного каскада Макхопадхая от выхода к входам. Установлено также, что для представимости БФ с помощью КББФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ в каждом разложении (заданной БФ и ее остаточных) либо одна из остаточных $f(x_i=0)$ или $f(x_i=1)$ должна быть константой, либо должно выполняться равенство $f(x_i=0)=\overline{f(x_i=1)}$. Если остаточная является нулем (единицей), то разложение может быть выполнено двухвходовым элементом И (ИЛИ); если выполняется указан-

ное равенство – элементом НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ. Это обеспечивает построение неоднородного каскада Майтра с бесповторной подачей входных переменных от выхода к входам. Для определения представимости БФ с помощью КБФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ кроме разложения Шеннона в [3, 4] предлагается использовать разложение Рида по переменной x_i или ее инверсии $\bar{x}_i$

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =$$
$$= f(x_i = 0) \oplus x_i \,\&\, (f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1));$$

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) =$$
$$= f(x_i = 1) \oplus \bar{x}_i \,\&\, (f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1)).$$

Из этих соотношений следует, что необходимым условием каскадности f является представимость $f(x_i = 0)$ и $f(x_i = 1)$ в виде суммы по модулю двух одиночных переменных. Неоднородность структуры рассмотренных каскадов привела к необходимости исследования однородных каскадов Макхопадхая и Майтра, построенных из модулей, где каждый может быть настроен на реализацию функции соответствующего двухвходового элемента ненастраиваемого каскада [5, 6]. Недостаток однородных каскадов Майтра состоит в сложности и нестандартности модулей, из которых они строятся, а для однородных каскадов Макхопадхая наряду со сложностью модулей их неуниверсальность в классе произвольных нормальных БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ.

Цель настоящей работы – в разработке методов реализации различных классов нормальных БФ в указанных базисах (в том числе и произвольных нормальных БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ без изменения порядка их записи) из h букв однородными каскадами из $h - 1$ стандартных трехвходовых элементов – мультиплексоров (МС) "два в один" или мажоритарных элементов (МЭ) "два и более из трех".

Отметим, что если входы МЭ однотипны, так как его структура описывается симметрической БФ $f = a \,\&\, b \vee a \,\&\, c \vee b \,\&\, c$, то в МС, структура которого описывается БФ $f = a \,\&\, \bar{c} \vee b \,\&\, c$, разнотипны. При этом вход a будем называть нулевым, входы b – единичными, а вход c – управляющим.

При этом предполагается, что прямые и инверсные переменные для подключения ко входам каскада равнодоступны.

1. Основные определения. БФ называется нормальной, если инверсии в ней отсутствуют или располагаются только над одиночными символами входных переменных.

БФ называется монотонной (МБФ) по переменной x, если эта переменная входит в формулу только в прямой или только в инверсной форме.

МБФ по переменной x называется положительной (отрицательной) по этой переменной, если эта переменная входит в формулу только в прямой (инверсной) форме.

БФ называется положительно (отрицательно) монотонной, если она положительна (отрицательна) по всем входным переменным.

БФ называется линейной (ЛБФ), если все двуместные операции в ней являются операциями НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ.

БФ называется бесповторной (ББФ), если каждая входная переменная входит в нее только один раз.

ББФ f называется пороговой, если каждой ее входной переменной можно присвоить вес p_i, а всей формуле – порог T, таким образом, что, если

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq T, \text{ то } f = 1;$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i < T, \text{ то } f = 0.$$

БФ, являющаяся одновременно пороговой и бесповторной, называется пороговой ББФ (ПББФ). (При записи ПББФ используется базис И, ИЛИ, НЕ. Свойства ПББФ изложены в [6, 25].)

Последовательная одноканальная структура из логических элементов (модулей) называется каскадом.

Каскад из МС "два в один" называется мультиплексорным каскадом (МС-каскадом).

Однородный МС-каскад, в котором выход каждого предыдущего МС соединен с единичным входом следующего МС, называется МС-каскадом первого типа.

Однородная двухканальная структура, в которой инверсный (прямой) выход каждого предыдущего МС соединен с нулевым (единичным) входом следующего МС, называется мультиплексорной структурой (МС-структурой).

Однородный МС-каскад, в котором выход каждого предыдущего МС соединен с управляющим входом следующего МС, называется МС-каскадом второго типа.

Каскад из МЭ "два и более из трех" называется мажоритарным каскадом (МЭ-каскадом).

БФ называется каскадной, если в ее обратной польской записи две или более двуместные операции не встречаются подряд. Произвольная

каскадная БФ из h букв реализуется каскадом из $h-1$ двухвходовых элементов.

БФ называется каскадно реализуемой, если она не является каскадной, но может быть реализована каскадом без дополнительных внешних выводов.

БФ, записанная в порядке обратном относительно заданной БФ, называется обратной к заданной.

Древовидная схема, в которой могут быть выделены не менее двух каскадов из двухвходовых элементов, называется обобщенно-каскадной.

Формула, реализуемая обобщенно-каскадной схемой, называется обобщенно-каскадной.

2. Реализация каскадных пороговых бесповторных булевых формул МС-каскадом первого типа. Пусть задана ПББФ $f = (x_3 \vee x_2)\ \&\ \bar{x}_1 \vee x_4$, которая является каскадной, так как в обратной польской записи она имеет вид $f = x_3x_2 \vee \bar{x}_1\ \&\ x_4\vee$. Этой формуле соответствует таблица истинности (ТИ) (табл. 1) с двумя типами фрагментов длины 8 (0101 1101 и 1101 1101), двумя типами фрагментов длины 4 (0101 и 1101) и двумя типами фрагментов длины 2 (01 и 11) в столбце значений.

Метод построения МС-каскада первого типа состоит в следующем: построим для заданной БФ обратную: $f_1 = x_4 \vee \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3)$; для обратной БФ построим линейный бинарный граф (ЛБГ) [26] (рис. 1); изменим пометку условных вершин и дуг в ЛБГ таким образом, что все дуги в его остове были помечены единицами (рис. 2); в ЛБГ условная вершина (УВ) пометкой x_i осуществляет разложение Шеннона формулы или ее остаточных по переменной x_i

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_i = 0)\ \&\ \bar{x}_i \vee f(x_i = 1)\ \&\ x_i$$

или по ее инверсии $\bar{x}_i$

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_i = 1)\ \&\ \bar{\bar{x}}_i \vee f(x_i = 0)\ \&\ \bar{x}_i.$$

Так как первое из этих соотношений реализуется схемой (рис. 3), а второе – схемой (рис. 4), то рассматривая ЛБГ справа налево и заменяя каждую УВ в нем МС "два в один", построим МС-каскад первого типа из $h = 4$ элементов (рис. 5). Эта схема может быть также построена в направлении от последнего элемента схемы к первому (от выхода к входам), используя слева направо разложение Шеннона для обратной формулы f_1 и всех ее неконстантных остаточных

$$f_1 = \bar{x}_4\ \&\ \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3) \vee x_4\ \&\ 1 =$$

$$= \bar{\bar{x}}_4\ \&\ 1 \vee \bar{x}_4\ \&\ \varphi_1;$$

$$\varphi_1 = \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3) \vee x_1\ \&\ 0 = \bar{\bar{x}}_1\ \&\ 0 \vee \bar{x}_1\ \&\ \varphi_2;$$

$$\varphi_2 = \bar{x}_2\ \&\ x_3 \vee x_2\ \&\ 1 = \bar{\bar{x}}_2\ \&\ 1 \vee \bar{x}_2\ \&\ \varphi_3;$$

$$\varphi_3 = \bar{x}_3\ \&\ 0 \vee x_3\ \&\ 1 = \bar{x}_3\ \&\ 0 \vee x_3\ \&\ 1.$$

Таблица 1. Таблица истинности для $f = (x_3 \vee x_2)\ \&\ \bar{x}_1 \vee x_4$

x_3	x_2	x_1	x_4	f	x_3	x_2	x_1	x_4	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Обратной формуле f_1 соответствует ТИ (табл. 2) с константными фрагментами длины 8, 4, 2, 1 в столбце значений. Выполним верификацию построенного каскада, просматривая его в обратном направлении – от первого элемента к

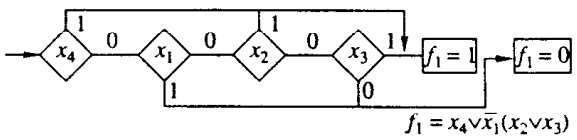

Рис. 1.

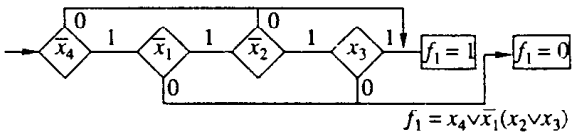

Рис. 2.

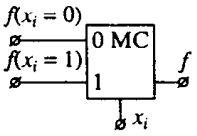

Рис. 3.

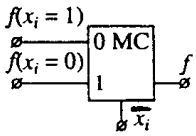

Рис. 4.

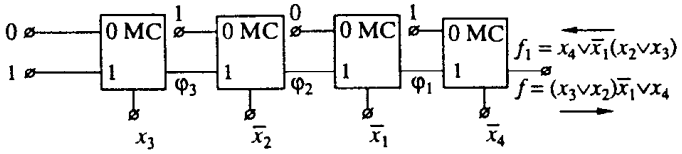

Рис. 5.

Таблица 2. Таблица истинности для $f_1 = x_4 \vee \bar{x}_1 \ \& \ (x_2 \vee x_3)$

x_4	x_1	x_2	x_3	f_1	x_4	x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

последнему (от входов к выходу):

$$\varphi_3 = 0 \ \& \ \bar{x}_3 \vee 1 \ \& \ x_3 = x_3;$$

$$\varphi_2 = 1 \ \& \ \bar{\bar{x}}_2 \vee \varphi_3 \ \& \ x_2 = x_3 \vee x_2;$$

$$\varphi_1 = 0 \ \& \ \bar{\bar{x}}_1 \vee \varphi_2 \ \& \ \bar{x}_1 = (x_3 \vee x_2) \ \& \ \bar{x}_1;$$

$$f = 1 \ \& \ \bar{\bar{x}}_4 \vee \varphi_1 \ \& \ \bar{x}_4 = (x_3 \vee x_2) \ \& \ \bar{x}_1 \vee x_4.$$

Из последних четырех соотношений следует, что при просмотре каскада от входов к выходу реализация заданной формулы осуществляется по фрагментам, совпадающим ввиду ее каскадности с подформулами: x_3; $x_3 \vee x_2$; $(x_3 \vee x_2) \ \& \ \bar{x}_1$; $(x_3 \vee x_2) \ \& \ \bar{x}_1 \vee x_4$.

Из изложенного следует чрезвычайно интересный факт, что одна и та же схема в зависимости от направления просмотра (от первого элемента к последнему или наоборот) реализует две формулы (заданную и обратную), каждой из которых соответствует своя ТИ, обладающая указанными выше свойствами.

Так как цель построения каскада состоит в реализации заданной формулы, то в дальнейшем для описания каскада будем использовать эту формулу, а не ее обратную. Из первого верификационного соотношения следует, что последний

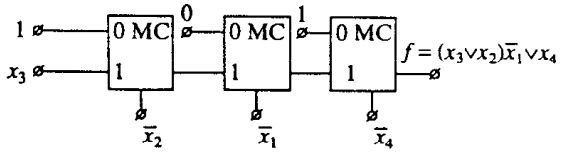

Рис. 6.

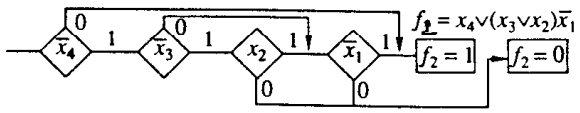

Рис. 7.

МС каскада может быть исключен, а переменная x_3 может быть подана непосредственно на единичный вход предпоследнего МС, что обеспечивает реализацию заданной формулы в базисе И, ИЛИ, НЕ из $h = 4$ букв МС-каскадом из $h - 1 = 3$ элементов (рис. 6).

В заключение раздела отметим, что при реализации каскадных ПББФ на нулевые входы МС-каскада первого типа подаются только константы 0 и 1.

Из изложенного следует, что МС-каскад первого типа обладает теми же функциональными возможностями, что и однородный каскад Махходадхая. При реализации последнего МЭ-каскадом [6] МС-каскад проще, так как МС "два в один" проще МЭ "два и более из трех".

3. Реализация каскадно реализуемых пороговых бесповторных булевых формул МС-каскадом первого типа. Если допустить возможность подачи на нулевые входы МС-каскада наряду с константами 0 и 1, переменных и их инверсий, то появляется возможность реализации некоторых типов некаскадных ПББФ из h букв МС-каскадами первого типа из $h - 1$ элементов.

Для таких некаскадных ПББФ характерно, что в обратных им формулах в каждом разложении Шеннона одна из остаточных может быть не только константой 0 или 1, но и любой переменной или ее инверсией – БФУ, зависящей не более чем одной переменной.

Пусть задана ПББФ $f = \bar{x}_1 \ \& \ (x_2 \vee x_3) \vee x_4$. Она является некаскадной, так как в обратной польской записи имеет вид $f = \bar{x}_1 \quad x_2 x_3 \vee \& \ x_4 \vee$. Построим для заданной формулы обратную: $f_2 = x_4 \vee (x_3 \vee x_2) \ \& \ \bar{x}_1$. Покажем, что она обладает указанными выше свойствами

$$f = \bar{x}_4 \ \& \ (x_3 \vee x_2) \ \& \ \bar{x}_1 \vee x_4 \ \& \ 1 =$$

$$= \bar{\bar{x}}_4 \ \& \ 1 \vee \bar{x}_4 \ \& \ \varphi_1;$$

$$\varphi_1 = \bar{x}_3 \ \& \ x_2 \ \& \ \bar{x}_1 \vee x_3 \ \& \ \bar{x}_1 =$$

$$= \bar{\bar{x}}_3 \ \& \ \varphi_3 \vee \bar{x}_3 \ \& \ \varphi_2 = \bar{\bar{x}}_3 \ \& \ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \ \& \ \varphi_2;$$

$$\varphi_2 = \bar{x}_2 \ \& \ 0 \vee x_2 \ \& \ \bar{x}_1 = \bar{x}_2 \ \& \ 0 \vee x_2 \ \& \ \varphi_3;$$

$$\varphi_3 = \bar{x}_1 \ \& \ 1 \vee x_1 \ \& \ 0 = \bar{\bar{x}}_1 \ \& \ 0 \vee \bar{x}_1 \ \& \ 1.$$

Этими же свойствами обладает и столбец значений соответствующей ТИ (табл. 3).

Следовательно, заданная БФ может быть реализована каскадно. Для этого

по обратной формуле построим ЛБГ с единичными пометками в остове (рис. 7);

преобразуем ЛБГ в МС-каскад первого типа (рис. 8);

выполним верификацию построенного каскада

$$\varphi_3 = 0 \,\&\, \bar{\bar{x}}_1 \vee 1 \,\&\, \bar{x}_1 = \bar{x}_1;$$

$$\varphi_2 = 0 \,\&\, \bar{x}_2 \vee \varphi_3 \,\&\, x_2 = \bar{x}_1 \,\&\, x_2;$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 \,\&\, \bar{\bar{x}}_3 \vee \varphi_2 \,\&\, \bar{x}_3 = \bar{x}_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3);$$

$$f = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_4 \vee \varphi_1 \,\&\, \bar{x}_4 = \bar{x}_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) \vee x_4.$$

Из верификационных соотношений следует, что реализация в данном случае осуществляется не по подформулам, а по фрагментам заданной БФ из одной, двух, трех и четырех букв, читая формулу слева направо: $\bar{x}_1$; $\bar{x}_1 \,\&\, x_2$; $\bar{x}_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3)$; $\bar{x}_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) \vee x_4$. При этом отметим, что в заданной БФ существует двухбуквенный фрагмент $\bar{x}_1 \,\&\, x_2$, но такая подформула отсутствует;

исключая последний элемент в построенном каскаде, получим искомый каскад, содержащий $h-1$ элементов (рис. 9).

Из приведенного примера следует, что существуют некаскадные формулы в базисе И, ИЛИ, НЕ, реализуемые каскадно. Отметим, что в данном случае ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ реализуется каскадом с повторной подачей переменной $\bar{x}_1$, что невозможно в неоднородных каскадах Макхопадхая.

Установленное свойство пофрагментной реализации формулы обеспечивается предлагаемым методом синтеза, а не только свойством каскада, так как существуют МС-каскады первого типа, построенные другими методами (возможно, эвристическими), в которых это свойство не выполняется. На рис. 10 приведен МС-каскад первого типа, реализующий ПББФ $f = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4 \,\&\, x_1 \vee x_5$, в котором на выходе третьего МС реализуется формула $\varphi_3 = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4 \vee x_5$, не являющаяся ни фрагментом, ни подформулой заданной формулы

$$\varphi_1 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_3 \vee x_2 \,\&\, \bar{x}_3 = x_2 \vee x_3;$$

$$\varphi_2 = 0 \,\&\, \bar{x}_4 \vee \varphi_1 \,\&\, x_4 = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4;$$

$$\varphi_3 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_5 \vee \varphi_2 \,\&\, \bar{x}_5 = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4 \vee x_5;$$

$$f = x_5 \,\&\, \bar{x}_1 \vee \varphi_3 \,\&\, x_1 = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4 \,\&\, x_1 \vee x_5.$$

На рис. 11 приведен МС-каскад первого типа, реализующий рассмотренную каскадную формулу предлагаемым методом, который обеспечивает пофрагментное ее построение при бесповторной подаче входных переменных

$$\psi_1 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_3 \vee x_2 \,\&\, \bar{x}_3 = x_2 \vee x_3;$$

$$\psi_2 = 0 \,\&\, \bar{x}_4 \vee \psi_1 \,\&\, x_4 = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4;$$

Таблица 3. Таблица истинности для $f_2 = x_4 \vee (x_3 \vee x_2) \,\&\, \bar{x}_1$

x_4	x_3	x_2	x_1	f_2	x_4	x_3	x_2	x_1	f_2
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

$$\psi_3 = 0 \,\&\, \bar{x}_1 \vee \psi_2 \,\&\, x_1 = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4 \,\&\, x_1;$$

$$f = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_5 \vee \psi_3 \,\&\, \bar{x}_5 = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_4 \,\&\, x_1 \vee x_5.$$

4. Реализация произвольных нормальных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕ МС-каскадом первого типа с дополнительными внешними выводами. Используем и в данном случае метод, который применялся в разд. 2 и 3. Рассмотрим примеры реализации различных классов нормальных БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ каскадами указанного типа.

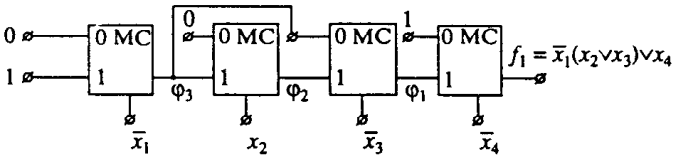

Рис. 8.

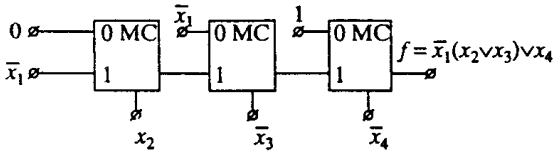

Рис. 9.

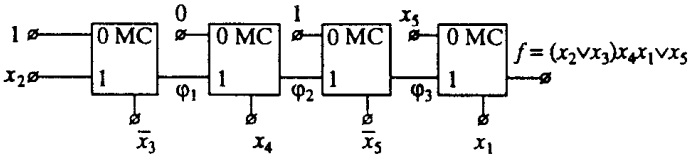

Рис. 10.

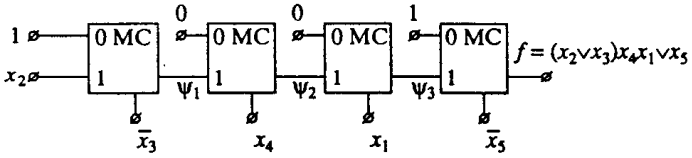

Рис. 11.

На рис. 12, 13 приведены МС-каскады первого типа из четырех и трех МС, реализующие некаскадную ПББФ $f = x_4 \vee \bar{x}_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3)$, для которой в обратной формуле обе ее остаточные зависят более чем от одной переменной.

Для первого каскада справедливы следующие верификационные соотношения:

$$\varphi_1 = 0 \,\&\, \bar{x}_4 \vee 1 \,\&\, x_4 = x_4;$$

$$\varphi_2 = 1 \,\&\, \bar{x}_1 \vee \varphi_1 \,\&\, x_1 = x_4 \vee \bar{x}_1;$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 \,\&\, \bar{x}_2 \vee \varphi_2 \,\&\, x_2 = x_4 \vee \bar{x}_1 \,\&\, x_2;$$

$$f = \varphi_2 \,\&\, \bar{\bar{x}}_3 \vee \varphi_3 \,\&\, \bar{x}_3 = x_4 \vee \bar{x}_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3).$$

Этот каскад назван однородным в предположении, что в нем кроме дополнительных внешних выводов φ_1 и φ_2 имеется еще один вывод φ_3, который не используется и для упрощения рисунка не изображен.

Обратим внимание на тот факт, что в данном случае ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ реализуется однородным каскадом либо с двухкратным использованием фрагментов φ_1 и φ_2 (рис. 12), либо с повторной подачей входной переменной x_4 и двухкратным использованием фрагмента φ_2 (рис. 13), что не использовалось в каскадах Макхопадхая.

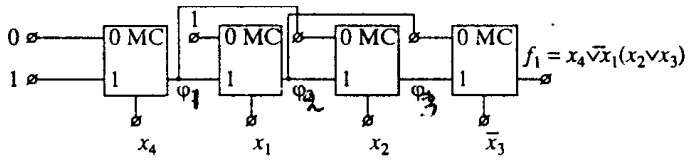

Рис. 12.

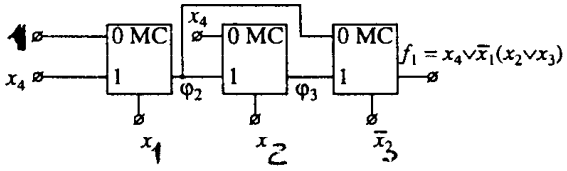

Рис. 13.

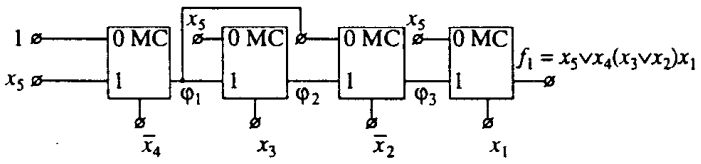

Рис. 14.

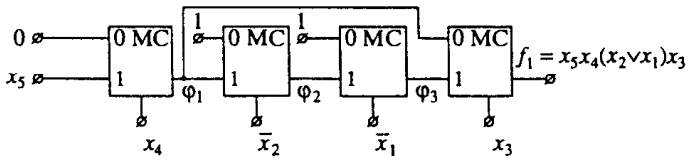

Рис. 15.

Приведем пример ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ из пяти букв $f = x_5 \vee x_4 \,\&\, (x_3 \vee x_2) \,\&\, x_1$, которая при использовании предлагаемого метода требует трехкратной подачи одной из переменных (рис. 14) при пофрагментной реализации формулы

$$\varphi_1 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_4 \vee x_5 \,\&\, \bar{x}_4 = x_5 \vee x_4;$$

$$\varphi_2 = x_5 \,\&\, \bar{x}_3 \vee \varphi_1 \,\&\, x_3 = x_5 \vee x_4 \,\&\, x_3;$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_2 \vee \varphi_2 \,\&\, \bar{x}_2 = x_5 \vee x_4 \,\&\, (x_3 \vee x_2);$$

$$f = x_5 \,\&\, \bar{x}_1 \vee \varphi_3 \,\&\, x_1 = x_5 \vee x_4 \,\&\, (x_3 \vee x_2) \,\&\, x_1.$$

Из приведенных выше примеров следует, что если задача состоит не в реализации заданной ПББФ, а в нахождении простейшей однородной каскадной реализации БФУ, соответствующей этой формуле, то такая схема должна строиться по формуле, записанной в порядке неубывания весов переменных в однотипной с ней положительно монотонной формуле. Таким образом, если вместо формулы $f = x_4 \vee \bar{x}_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3)$ реализовать формулу $f = (x_3 \vee x_2) \,\&\, \bar{x}_1 \vee x_4$, то реализация БФУ будет простейшей (рис. 6).

Изложенный порядок записи, упрощающий структуру МС-каскада первого типа, справедлив только для ПББФ. Если изложенную постановку задачи распространить на произвольные нормальные ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ, то заданная ББФ должна быть перестроена таким образом, чтобы по ней можно было построить ЛБГ с минимальным числом путей [27].

В этом классе существуют обобщенно-каскадные формулы, которые принципиально не могут быть реализованы МС-каскадом первого типа без дополнительных внешних выводов и требуют их введения в каскад. Пусть задана обобщенно-каскадная ББФ $f = (x_1 \vee x_2) \,\&\, x_3 \vee x_4 \,\&\, x_5$. Минимальное число путей в ЛБГ достигается при замене заданной формулы новой формулой $f = x_3 \,\&\, (x_1 \vee x_2) \vee x_4 \,\&\, x_5$.

Простейший МС-каскад первого типа с дополнительными внешними выводами (рис. 15), построенный по этому ЛБГ, реализует ББФ $f = x_5 \,\&\, x_4 \vee (x_2 \vee x_1) \,\&\, x_3$. При этом

$$\varphi_1 = 0 \,\&\, \bar{x}_4 \vee x_5 \,\&\, x_4 = x_5 \,\&\, x_4;$$

$$\varphi_2 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_2 \vee \varphi_1 \,\&\, \bar{x}_2 = x_5 \,\&\, x_4 \vee x_2;$$

$$\varphi_3 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_1 \vee \varphi_2 \,\&\, \bar{x}_1 = x_5 \,\&\, x_4 \vee x_2 \vee x_1;$$

$$f = \varphi_1 \,\&\, \bar{x}_3 \vee \varphi_3 \,\&\, x_3 = x_5 \,\&\, x_4 \vee (x_2 \vee x_1) \,\&\, x_3.$$

Таким образом в случае поиска простейшего МС-каскада может возникнуть ситуация, когда

задана одна формула, ЛБГ строится по другой формуле, а каскад реализует третью формулу.

Реализация произвольной нормальной повторной БФ в рассматриваемом базисе осуществляется по ББФ той же структуры с дальнейшим переобозначением соответствующих переменных. Пусть требуется реализовать БФУ "два и более из трех", которая описывается, например, БФ $f = x_2 \,\&\, x_1 \vee (x_2 \vee x_1) \,\&\, x_3$. Построим сначала МС-каскад первого типа с дополнительными внешними выводами для ББФ, однотипной с заданной – $f = x_5 \,\&\, x_4 \vee (x_2 \vee x_1) \,\&\, x_3$ (рис. 15), и осуществим в построенном каскаде переобозначение переменных $x_5 = x_2$, $x_4 = x_1$ (рис. 16). Выполним верификацию этого каскада

$$\varphi_1 = 0 \,\&\, \bar{x}_1 \vee x_2 \,\&\, x_1 = x_2 \,\&\, x_1;$$

$$\varphi_2 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_2 \vee \varphi_1 \,\&\, \bar{x}_2 = x_2 \,\&\, x_1 \vee x_2;$$

$$\varphi_3 = 1 \,\&\, \bar{\bar{x}}_1 \vee \varphi_2 \,\&\, \bar{x}_1 = x_2 \,\&\, x_1 \vee x_2 \vee x_1;$$

$$f = \varphi_1 \,\&\, \bar{x}_3 \vee \varphi_3 \,\&\, x_3 = x_2 \,\&\, x_1 \vee (x_2 \vee x_1) \,\&\, x_3.$$

Из приведенных соотношений следует, что и для повторной формулы реализация в рассматриваемой структуре выполняется по фрагментам, а не по подформулам.

5. Реализация линейных булевых формул МС-структурой. На рис. 17 приведена МС-структура, непосредственно реализующая ЛБФ $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \oplus x_3 \oplus x_4$.

6. Реализация каскадных бесповторных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ МС-структурой с разрезами в верхнем канале. Используемый в данном случае метод реализации также основан на непосредственном построении заданной формулы. При этом реализация каждой двуместной операции И и ИЛИ связана с одним разрезом в верхнем канале каскада с целью обеспечения возможности настройки с помощью констант 0 (для операций И) и 1 (для операций ИЛИ) следующего за разрезом МС. При этом реализация двуместных операций НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ разрезов не требует.

На рис. 18 приведена МС-структура с разрезами в верхнем канале, реализующая ББФ $f = ((x_2 \oplus \oplus x_3) \,\&\, x_1 \vee x_4) \oplus x_5$, разрезы в которой отмечены крестиками.

7. Реализация каскадных повторных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ МС-структурой с разрезами в верхнем канале. Разложение Рида не позволяет в явном виде выделять отдельные переменные, связанные операциями НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, поэтому воспользуемся для этой цели преобразованием Артюхова–Шалыто [28, 29]

$$f = (\bar{x}_i \,\&\, f(x_i = 0) \vee x_i \,\&\, \overline{f(x_i = 1)}) \oplus x_i;$$

$$f = (\bar{x}_i \,\&\, \overline{f(x_i = 0)} \vee x_i \,\&\, f(x_i = 1)) \oplus \bar{x}_i.$$

Пусть задана повторная формула в базисе И, ИЛИ, НЕ $f = \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, x_3 \vee \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \bar{x}_3 \vee x_1 \,\&\, \& \, x_2 \,\&\, x_3$ из девяти букв, которая не является каскадной. Некаскадными являются также эквивалентные ей формулы из восьми и шести букв: $f = (\bar{x}_2 \,\&\, x_3 \vee x_2 \,\&\, \bar{x}_3) \,\&\, \bar{x}_1 \vee x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3$ и $f = (x_2 \oplus x_3) \,\&\, \bar{x}_1 \vee x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3$.

Используя разложение Рида, попытаемся построить для рассматриваемого примера каскадную формулу. Выполняя разложение по переменной x_1, получим $f(x_1 = 0) = x_2 \oplus x_3$; $f(x_1 = 1) = x_2 \,\&\, x_3$. При этом $f = (x_2 \,\&\, x_3 \oplus x_2 \oplus x_3) \,\&\, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. Эта формула из семи букв является каскадной и может быть реализована МС-структурой с одним разрезом в верхнем канале из шести МС.

Преобразование этой формулы с помощью правил булевой алгебры приводит к построению каскадной повторной БФ $f = (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_1 \oplus x_2 \oplus \oplus x_3$, которая реализуется искомым каскадом из четырех элементов (рис. 19).

Последнюю формулу можно построить также при двухкратном применении указанного выше преобразования к заданной БФ

$$f = (\bar{x}_3 \,\&\, \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \vee x_3 \,\&\, (x_1 \oplus x_2)) \oplus x_3 =$$
$$= (\bar{x}_2 \,\&\, x_1 \,\&\, x_3 \vee x_2 \,\&\, x_1) \oplus x_2 \oplus x_3 =$$
$$= (x_2 \vee x_3) \,\&\, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

Если для заданной формулы выполнить разложение или преобразование по другим перемен-

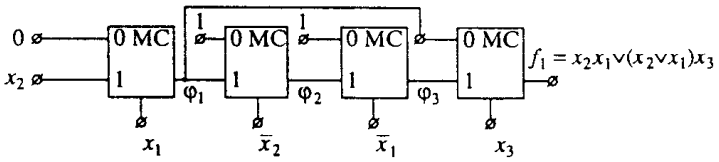

Рис. 16.

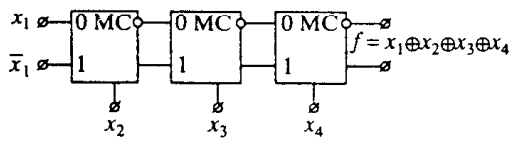

Рис. 17.

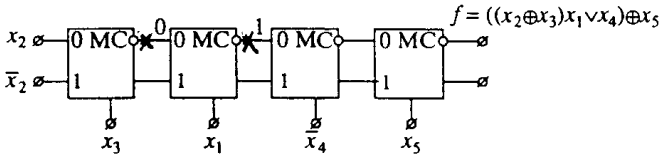

Рис. 18.

ным, то могут быть построены другие каскадные повторные формулы, например, $f = (x_1 \,\&\, \bar{x}_3 \vee x_2) \oplus \oplus x_1 \oplus x_3$. Каскадно также реализуются функции "один из трех" ($f = x_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \bar{x}_3 \vee \vee \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, x_3 = (\bar{x}_2 \vee x_3) \,\&\, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)$) и "два из трех" ($f = \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \bar{x}_3 = = (x_2 \vee x_3) \,\&\, \bar{x}_1 \oplus x_2 \oplus x_3$), в то время как функция "два и более из трех" каскадно не реализуются.

В качестве примера приведем еще три простейшие повторные БФ, реализуемые каскадно: $f = \bar{x}_1 \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, \bar{x}_3 \vee x_2 \,\&\, x_3 = \bar{x}_1 \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, \bar{x}_3 \vee \vee x_1 \,\&\, x_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \,\&\, x_3 \oplus x_1 = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \,\&\, x_1 \oplus x_3$; $f = \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, \bar{x}_2 \vee x_1 \,\&\, x_3 = \bar{x}_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, \bar{x}_2 \vee \vee x_2 \,\&\, x_3 = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \,\&\, x_2 \oplus x_1 = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \,\&\, x_1 \oplus x_2$; $f = \bar{x}_2 \,\&\, x_3 \vee x_2 \,\&\, \bar{x}_3 \vee x_1 \,\&\, x_2 = \bar{x}_2 \,\&\, x_3 \vee x_2 \,\&\, \bar{x}_3 \vee \vee x_1 \,\&\, x_3 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \,\&\, x_3 \oplus x_2 = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \,\&\, x_2 \oplus x_3$.

Из изложенного в разд. 6, 7 следует, что функциональные возможности двухканальных структур с разрезами в одном канале из простых элементов (мультиплексоров "два в один") совпадают с возможностями однородных одноканальных каскадов Майтра, состоящих из весьма сложных модулей [6].

8. Реализация обобщенно-каскадных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ МС-структурой с разрезами в двух каналах. Для заданной формулы строится [6] древовидная схема из двухвходовых элементов, в которой выделяются каскады, число которых не превышает величины $[h/2]$, где $[a]$ – символ округления значения переменной "a" до ближайшего меньшего целого. Каждый каскад вкладывается в однородную схему рассматриваемого вида. После вложения каждого каскада выполняется его "изоляция" за счет рассечения связей в обоих каналах. На рис. 20 приведена МС-структура из пяти МС, реализующая обобщенно-каскадную ББФ из шести букв: $f = (x_1 \,\&\, x_2 \vee x_3) \oplus (x_4 \vee x_5) \,\&\, x_6$.

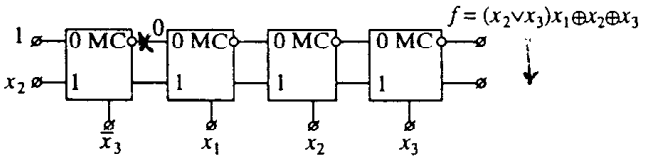

Рис. 19.

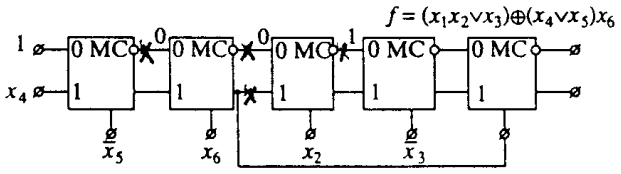

Рис. 20.

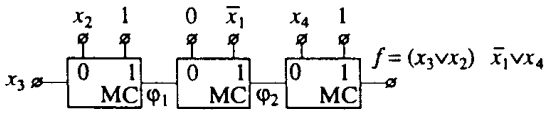

Рис. 21.

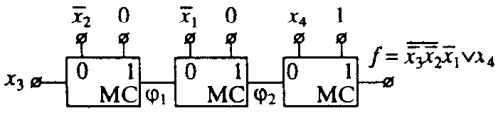

Рис. 22.

9. Реализация каскадных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ МС-каскадами второго типа. В таких каскадах каждый МС настраивается (за счет возможности подачи на его нулевой и единичный входы констант 0 и 1, переменной x_i и ее инверсии $\bar{x}_i$) на реализацию произвольной БФУ двух переменных – переменной x_i и подформулы, подаваемой на его управляющий вход.

Отметим, что в предлагаемом каскаде произвольная функция двух переменных реализуется модулем, имеющим всего лишь два внешних вывода, по крайней мере один из которых используется для подачи входной переменной. (В однородных каскадах Майтра модули имеют по крайней мере три внешних вывода – один информационный и два настроечных [5, 6].) Реализация в данном случае выполняется непосредственно по заданной формуле, используя для определения настройки каждого МС таблицу истинности для БФУ двух переменных, им реализуемой.

Рассмотрим первоначально, как реализуется в данном случае каскадная нормальная ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ, например, $f = (x_3 \vee x_2) \,\&\, \bar{x}_1 \vee x_4$. Заменим эту формулу системой формул двух переменных $\varphi_1 = x_2 \vee x_3$; $\varphi_2 = \varphi_1 \,\&\, \bar{x}_1$; $f = \varphi_2 \vee x_4$ и построим для каждой из них ТИ (табл. 4–6). Рассматривая каждую из этих таблиц, заполним соответствующую строку таблицы настройки элементов однородного каскада (табл. 7) и построим соответствующий каскад (рис. 21).

Из сравнения построенного МС-каскада второго типа с МС-каскадом первого типа (рис. 6), построенным для той же формулы, следует, что имея одинаковую сложность, они обладают также и одинаковыми функциональными возможностями в классе каскадных нормальных ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ.

Однако рассматриваемые в настоящем разделе каскады в отличие от описанных выше позволяют реализовать также и каскадные формулы, не являющиеся нормальными. На рис. 22 приведен однородный каскад, реализующий формулу $f = \overline{\bar{x}_2 \,\&\, \bar{x}_3} \,\&\, \bar{x}_1 \vee x_4$, функционально эквивалент-

ную предыдущей. В этом случае $\varphi_1 = \bar{x}_2 \ \& \ \bar{x}_3$; $\varphi_2 = \bar{\varphi}_1 \ \& \ \bar{x}_1$; $f = \varphi_2 \vee x_4$, а каскад из двухвходовых элементов кроме элементов И и ИЛИ содержит элемент ЗАПРЕТ.

Рассматриваемые в настоящем разделе каскады из $h - 1$ элементов позволяют реализовывать также и каскадные ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ из h букв как нормального, так и ненормального вида.

На рис. 23 приведен МС-каскад второго типа, реализующий каскадную ББФ $f = ((x_2 \oplus x_3) \ \& \ x_1 \vee \vee x_4) \oplus x_5$, которая при другом включении мультиплексоров требовала использования двухканальной МС-структуры с разрезами в верхнем канале (рис. 18).

Исследуемые каскады позволяют реализовать также каскадные повторные БФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ. На рис. 24 приведена реализация МС-каскадом второго типа формулы $f = (x_2 \vee x_3) \ \& \ x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, которая требовала применения МС-структуры с разрезами в верхнем канале (рис. 19).

Из изложенного следует, что МС-каскады второго типа обладают равными функциональными возможностями в классе каскадных нормальных БФ по сравнению с однородными каскадами Майтра, но по элементной сложности существенно проще последних и позволяют реализовать БФ, не относящиеся к классу нормальных.

10. Свойство таблиц истинности булевых функций, реализуемых каскадными бесповторными булевыми формулами. Рассмотрим в качестве примера МС-каскад второго типа, представленный на рис. 21. Построим для этого каскада схему формирования значений канальных переменных x_3, φ_1, φ_2, f (рис. 25).

Анализ этой схемы показывает, что каждый элемент вводит в каскад по два типа битовых фрагментов длины два, что приводит, учитывая структуру каскада, к тому, что столбец φ_1 содержит два типа таких фрагментов от переменной x_2 – {01 и 11}, столбец φ_2 – два типа фрагментов длины два от переменной x_1 – {00 и 10} и два типа фрагментов длины четыре от переменных x_2, x_1 – {0010 и 1010}, столбец f – два типа фрагментов длины два от переменной x_4 – {01 и 11}, два типа фрагментов длины четыре от переменных x_1, x_4 – {0101 и 1101} и два типа фрагментов длины восемь от переменных x_2, x_1, x_4 – {0101 1101 и 1101 1101}.

Столбец f построенной схемы (рис. 25) образует столбец значений ТИ (табл. 1) при порядке переменных x_3, x_2, x_1, x_4 в БФУ, соответствующей каскадной ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ из четырех букв $f = (x_3 \vee x_2) \ \& \ \bar{x}_1 \vee x_4$. Построенный столбец значений ТИ обладает тем свойством, что в нем

Таблица 4

x_3	x_2	φ_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 5

φ_1	x_1	φ_2
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Таблица 6

φ_2	x_4	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 7

Номер элемента	Нулевой вход	Единичный вход
1	x_2	1
2	0	$\bar{x}_1$
3	x_4	1

число типов фрагментов длины 2^i ($i = 1, \ldots, h - 1$) равно двум.

Это свойство сохраняется и для каскадных ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ. Так, например, столбец значений ТИ (табл. 8) для формулы $f_4 = (x_3 \oplus x_2) \ \& \ \bar{x}_1 \vee x_4$ содержит два типа фрагментов длины два от

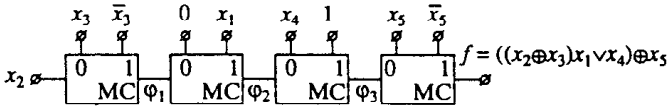

Рис. 23.

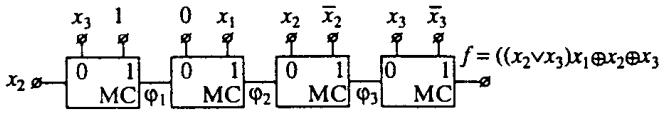

Рис. 24.

Таблица 8. Таблица истинности для $f_4 = (x_3 \oplus x_2)\ \&\ \bar{x}_1 \vee x_4$

x_3	x_2	x_1	x_4	f_4	x_3	x_2	x_1	x_4	f_4
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

переменной x_4 – {01 и 01}, два типа фрагментов длины четыре от переменных x_1, x_4 – {0101 и 1101}, два типа фрагментов длины восемь от переменных x_2, x_1, x_4 – {0101 1101 и 1101 0101}.

Можно утверждать также, что если в столбце значений ТИ булевой функции число типов фрагментов любой длины (2, 4, 8, ..., 2^i) больше двух, то соответствующая ББФ не является одновременно каскадной и бесповторной. Так, например, в столбце значений f_1 (табл. 2) три типа фрагментов длины два – {00, 01, 11}, и уже по этой причине эта БФУ реализуется некаскадной ББФ $f_1 = x_4 \vee \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3)$.

Три типа фрагментов длины два – {00, 10, 11} содержит также столбец значений ТИ (табл. 3), соответствующей некаскадной ББФ $f_2 = x_4\ \&\ (x_3 \vee x_2)\ \&\ \bar{x}_1$. Столбец значений БФУ, соответствующей некаскадной формуле $f = \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3) \vee x_4$, содержит два типа фрагментов длины два от переменной x_4 – {01 и 11}, но три типа фрагментов длины четыре от переменных x_3, x_4 – {0111, 1111, 0101}.

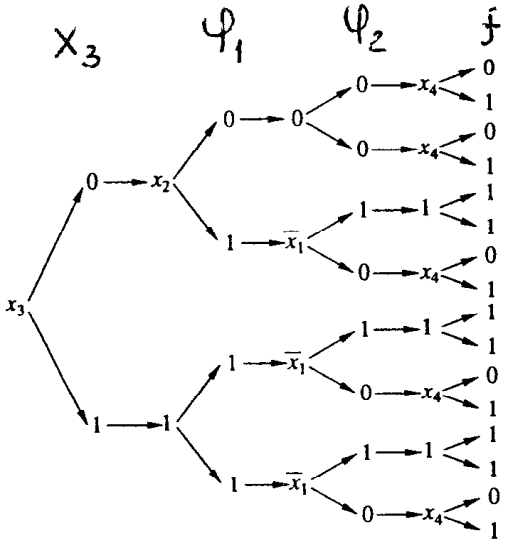

Рис. 25.

Покажем, что происходит со столбцом значений ТИ при реализации каскадных повторных БФ. Пусть требуется реализовать каскадную повторную БФ $f = (x_2 \vee x_3)\ \&\ x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. Построим сначала ТИ для однотипной с ней ББФ $f = (x_2 \vee x_3)\ \&\ \&\ x_1 \oplus x_4 \oplus x_5$. В 32-разрядном столбце значений этой ТИ два типа фрагментов длины два – {01 и 10}, два типа фрагментов длины четыре – {0110 и 1001}, два типа фрагментов длины восемь – {0110 0110 и 0110 1001} и два типа фрагментов длины шестнадцать – {0110 0110 0110 1001 и 0110 1001 0110 1001}.

Выполняя отождествление переменных $x_4 = x_2$ и $x_5 = x_3$, преобразуем столбец значений функции пяти переменных в восьмиразрядный столбец значений ТИ булевой функции трех переменных, для которой из-за повторности реализующей ее формулы установленное выше свойство о номенклатуре фрагментов не выполняется – он содержит три типа фрагментов длины два – {00, 10, 01} и два типа фрагментов длины четыре – {0010 и 1001}.

В заключение раздела отметим, что в [6] показано, что необходимым условием представимости БФУ, существенно зависящей от всех переменных, ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ является нечетность числа единиц в столбце значений ТИ функции. (Это условие не является достаточным, так как, например, для повторных БФ, приведенных в разд. 7 (кроме БФУ "два и более из трех"), соответствующие столбцы значений также содержат нечетное число единиц.)

Из изложенного следует, что если в столбце значений ТИ булевой функции, существенно зависящей от всех переменных, число типов фрагментов удовлетворяет сформулированному условию, а число единиц в столбце нечетно, то такая БФУ реализуется каскадной ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ, а при четном числе единиц в нем – каскадной ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ.

Установленное в настоящем разделе свойство столбца значений ТИ булевых функций, обеспечивающее их реализацию каскадной ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ является расширением теоремы Кертиса [5, 30] о нахождении простой разделительной декомпозиции и направлено на нахождение $(h-1)$-кратной вложенной разделительной декомпозиции. Поясним это на примере ТИ булевой функции пяти переменных.

В соответствии с теоремой Кертиса:

для существования простой разделительной декомпозиции вида $f = \psi_0(\psi_1(x_2), x_3, x_1, x_4, x_5)$ столбец значений ТИ должен содержать не более двух типов фрагментов длины 16 от переменных x_3, x_1, x_4, x_5; для существования простой разделительной декомпозиции вида $f = \psi_0(\psi_2(x_2, x_3), x_1, x_4, x_5)$

столбец значений ТИ должен содержать не более двух типов фрагментов длины 8 от переменных x_1, x_4, x_5; для существования простой разделительной декомпозиции вида $f = \psi_0(\psi_3(x_2, x_3, x_1), x_4, x_5)$ столбец значений ТИ должен содержать не более двух типов фрагментов длины четыре от переменных x_4, x_5; для существования простой разделительной декомпозиции вида $f = \psi_0(\psi_4(x_2, x_3, x_1, x_4), x_5)$ столбец значений ТИ должен содержать не более двух типов фрагментов длины два от переменной x_5.

Одновременное выполнение всех этих условий (полученное свойство) обеспечивает искомую декомпозицию $f = \psi_0(\psi_4(\psi_3(\psi_2(\psi_1(x_2), x_3), x_1), x_4), x_5)$. При $\psi_1 = x_2$; $\psi_2 = \psi_1 \vee x_3$; $\psi_3 = \psi_2 \,\&\, x_1$; $\psi_4 = \psi_3 \oplus x_4$; $\psi_0 = \psi_4 \oplus x_5$, имеет место каскадная ББФ $f = (x_2 \vee \vee x_3) \,\&\, x_1 \oplus x_4 \oplus x_5$. При обратном порядке записи входных переменных в ТИ это соотношение приобретает вид

$$f = \psi_0(x_5, \psi_4(x_4, \psi_3(x_1, \psi_2(x_3, \psi_1(x_2))))).$$

Отметим, что установленное свойство столбца значений ТИ функции, реализуемой каскадной ББФ, проще соответствующего свойства для той же функции с обратным порядком записи входных переменных в ТИ и является одинаковым как для функций, реализуемых каскадной ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ, так и для функций, реализуемых каскадной ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ, в то время как для функций с обратным порядком записи входных переменных соответствующие свойства различны.

11. Реализация обобщенно-каскадных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕ МС-каскадами второго типа с разрезами. Формулы рассматриваемого класса могут быть реализованы МС-каскадами первого типа с дополнительными внешними выводами. При использовании МС-каскадов второго типа вместо дополнительных внешних выводов применяются разрезы. На рис. 26 приведен МС-каскад второго типа, реализующий ББФ $f = (x_1 \vee x_2) \,\&\, x_3 \vee x_4 \,\&\, x_5$. Аналогично может быть реализована повторная БФ $f = (x_1 \vee x_2) \,\&\, x_3 \vee x_1 \,\&\, x_2$.

12. Реализация обобщенно-каскадных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ МС-каскадами с разрезами. Эти каскады в рассматриваемом классе формул не универсальны, так как, реализуя, например, $f = (x_1 \oplus \oplus x_2) \,\&\, x_3 \vee x_4 \,\&\, x_5$ (рис. 27), они не позволяют реализовать без использования дополнительного инвертора, например, такую БФ, как $f = (x_1 \,\&\, x_2 \vee \vee x_3) \oplus (x_4 \vee x_5) \,\&\, x_6$, в то время как МС-структура с разрезами в двух каналах ее реализует (рис. 20).

13. Реализация нормальных булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕ МЭ-каскадами. На основе МС-каскадов первого типа могут быть построены соответствующие МЭ-каскады. Для этого по положительно монотонной ББФ, однотипной с заданной формулой, с помощью подхода, изложенного в разд. 2–4, строится МС-каскад первого типа из h или $h - 1$ элементов. В этом каскаде каждый МС заменяется на МЭ, а инверсные входные переменные – соответствующими переменными без инверсий. После этого инверсные и повторные переменные размещаются в МЭ-каскаде в соответствии с заданной БФ.

Докажем справедливость замены i-го мультиплексора МС-каскада первого типа на i-й мажоритарный элемент при реализации БФ, положительно монотонных по переменной x_i. Для таких формул справедливы соотношения $f(x_i = 0) \,\&\, f(x_i = 1) = f(x_i = 0)$; $f(x_i = 0) \vee f(x_i = 1) = f(x_i = 1)$.

Из этих соотношений следует, что для этого класса БФ разложение Шеннона имеет вид

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_i = 0) \vee f(x_i = 1) \,\&\, x_i.$$

Поэтому

$$f(x_i = 0) \,\&\, \bar{x}_i \vee f(x_i = 1) \,\&\, x_i = \\ = f(x_i = 0) \vee f(x_i = 1) \,\&\, x_i.$$

Левую часть этого равенства реализует каждая из схем, представленных на рис. 3 и 4. Покажем, что правую часть равенства реализует схема, представленная на рис. 28: $f = f(x_i = 0) \,\&\, f(x_i = 1) \vee (f(x_i = 0) \vee f(x_i = 1)) \,\&\, x_i = f(x_i = 0) \vee f(x_i = 1) \,\&\, x_i$. Ввиду симметрии входов мажоритарного элемента правую часть равенства реализует также и схема на рис. 29.

Из изложенного следует, что для положительно монотонных БФ любой мультиплексор каскада первого типа, включенный по схеме (рис. 3), может быть заменен МЭ, включенным по схеме (рис. 28). Также может быть выполнена замена МС (рис. 4) мажоритарным элементом (рис. 29).

Отметим, что изложенный метод строит однородные каскадные схемы из МЭ, в то время как известные методы [31] строят обычно пирамидальные схемы. Для ББФ в базисе И, ИЛИ, НЕ метод строит простейшие по сложности схемы в рассматриваемом базисе, содержащие $h - 1$ эле-

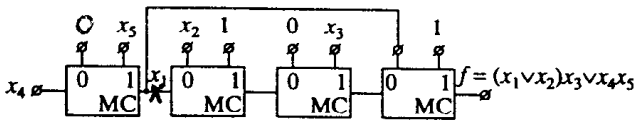

Рис. 26.

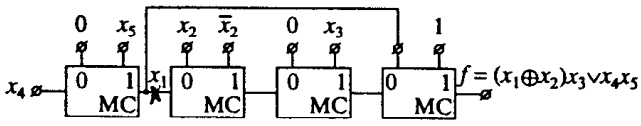

Рис. 27.

ментов, а для повторных БФ в том же базисе сложность их реализации априорно известна и также равна $h-1$.

На рис. 30 приведен МС-каскад, реализующий каскадную ББФ $f=(x_3 \vee x_2)\ \&\ \bar{x}_1 \vee x_4$, который построен по МС каскаду первого типа (рис. 6)

$$\varphi_1 = (1 \vee x_3)\ \&\ x_2 \ \vee\ 1\ \&\ x_3 = x_3 \vee x_2;$$

$$\varphi_2 = (0 \vee \varphi_1)\ \&\ \bar{x}_1 \vee 0\ \&\ \varphi_1 = (x_3 \vee x_2)\ \&\ \bar{x}_1;$$

$$f = (1 \vee \varphi_2)\ \&\ x_4 \vee 1\ \&\ \varphi_2 = (x_3 \vee x_2)\ \&\ \bar{x}_1 \vee x_4.$$

В данном случае реализация по фрагментам совпадает с реализацией по подформулам. Такое совпадение отсутствует при реализации других типов БФ. На рис. 31 приведен МЭ-каскад, который построен для каскадно реализуемой ББФ $f = \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3) \vee x_4$ по МС-каскаду первого типа (рис. 9)

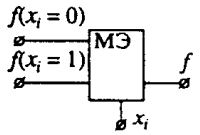

Рис. 28.

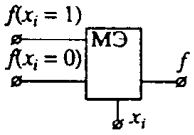

Рис. 29.

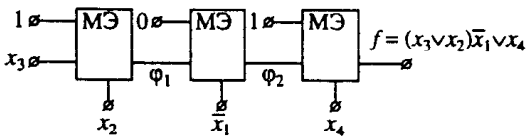

Рис. 30.

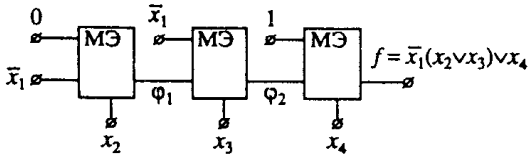

Рис. 31.

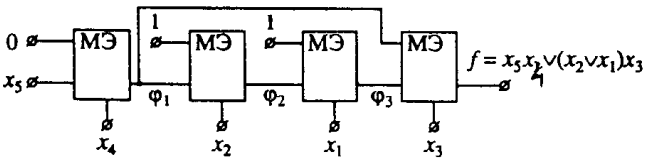

Рис. 32.

$$\varphi_1 = (0 \vee \bar{x}_1)\ \&\ x_2 \vee 0\ \&\ \bar{x}_1 = \bar{x}_1\ \&\ x_2;$$

$$\varphi_2 = (\varphi_1 \vee \bar{x}_1)\ \&\ x_3 \vee \varphi_1\ \&\ \bar{x}_1 = \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3);$$

$$f = (1 \vee \varphi_2)\ \&\ x_4 \vee 1\ \&\ \varphi_2 = \bar{x}_1\ \&\ (x_2 \vee x_3) \vee x_4.$$

На рис. 32 приведен МЭ-каскад с дополнительными внешними выводами, построенными для некаскадной ББФ $f = x_5\ \&\ x_4 \vee (x_2 \vee x_1)\ \&\ x_3$ по соответствующему МС-каскаду первого типа (рис. 15)

$$\varphi_1 = (0 \vee x_5)\ \&\ x_4 \vee 0\ \&\ x_5 = x_5\ \&\ x_4;$$

$$\varphi_2 = (1 \vee \varphi_1)\ \&\ x_2 \vee 1\ \&\ \varphi_1 = x_5\ \&\ x_4 \vee x_2;$$

$$\varphi_3 = (1 \vee \varphi_2)\ \&\ x_1 \vee 1\ \&\ \varphi_2 = x_5\ \&\ x_4 \vee x_2 \vee x_1;$$

$$f = (\varphi_1 \vee \varphi_3)\ \&\ x_3 \vee \varphi_1\ \&\ \varphi_3 =$$
$$= x_5\ \&\ x_4 \vee x_3\ \&\ (x_2 \vee x_1).$$

Покажем на примере, как в данном случае реализуются повторные БФ. Пусть задана ББФ $f = x_1\ \&\ \bar{x}_3 \vee \bar{x}_3\ \&\ x_4 \vee \bar{x}_2\ \&\ \bar{x}_3 \vee x_1\ \&\ \bar{x}_2\ \&\ x_4$, приведенная в [31]. Выполнив минимизацию этой формулы, получим новую повторную БФ из семи букв – $f = \bar{x}_2\ \&\ (\bar{x}_3 \vee x_4\ \&\ x_1) \vee \bar{x}_3\ \&\ (x_4 \vee x_1)$, которая реализуется МЭ-каскадом с дополнительными внешними выводами, содержащими шесть элементов (рис. 33)

$$\varphi_1 = (0 \vee \bar{x}_2)\ \&\ \bar{x}_3 \vee 0\ \&\ \bar{x}_2 = \bar{x}_2\ \&\ \bar{x}_3;$$

$$\varphi_2 = (\bar{x}_2 \vee \varphi_1)\ \&\ x_4 \vee \bar{x}_2\ \&\ \varphi_1 = \bar{x}_2\ \&\ (\bar{x}_3 \vee x_4);$$

$$\varphi_3 = (\varphi_1 \vee \varphi_2)\ \&\ x_1 \vee \varphi_1\ \&\ \varphi_2 =$$
$$= \bar{x}_2\ \&\ (\bar{x}_3 \vee x_4\ \&\ x_1);$$

$$\varphi_4 = (1 \vee \varphi_3)\ \&\ \bar{x}_3 \vee 1\ \&\ \varphi_3 =$$
$$= \bar{x}_2\ \&\ (\bar{x}_3 \vee x_4\ \&\ x_1) \vee \bar{x}_3;$$

$$\varphi_5 = (\varphi_3 \vee \varphi_4)\ \&\ x_4 \vee \varphi_3\ \&\ \varphi_4 =$$
$$= \bar{x}_2\ \&\ (\bar{x}_3 \vee x_4\ \&\ x_1) \vee \bar{x}_3\ \&\ x_4;$$

$$f = (\varphi_4 \vee \varphi_5)\ \&\ x_1 \vee \varphi_4\ \&\ \varphi_5 =$$
$$= \bar{x}_2\ \&\ (\bar{x}_3 \vee x_4\ \&\ x_1) \vee \bar{x}_3\ \&\ (x_4 \vee x_1).$$

Отметим, что методы, изложенные в [31], строят в данном случае не каскадные, а пирамидальные схемы, первая из которых содержит девять МЭ, а вторая – пять.

Заключение. В настоящей работе показано, что:

МС-каскады первого типа и МЭ-каскады из $h-1$ элементов могут быть построены для каскадных и каскадно реализуемых ПББФ из h букв;

МС-каскады первого типа и МЭ-каскады с дополнительными внешними выводами из $h-1$ элементов позволяют реализовать произвольные

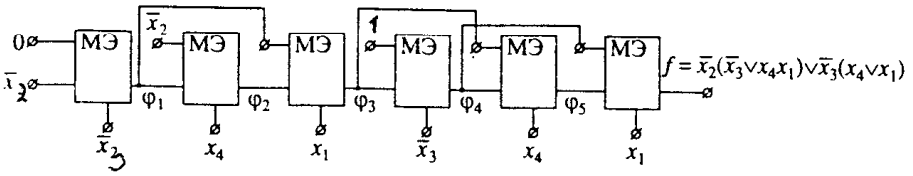

Рис. 33.

нормальные формулы в базисе И, ИЛИ, НЕ из h букв без изменения порядка их записи;

МС-каскады второго типа из $h - 1$ элементов позволяют реализовать каскадные БФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ из h букв;

МС-каскады второго типа с разрезами из $h - 1$ элементов позволяют реализовать произвольные нормальные БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ из h букв при допустимости изменения порядка их записи;

МС-структуры с разрезами в двух каналах из $h - 1$ элементов позволяют реализовать произвольные нормальные БФ в базисе И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ из h букв при допустимости изменения порядка их записи;

МС-каскады первого типа более эффективны, чем однородные каскады Макхопадхая;

МС-каскады второго типа более эффективны, чем однородные каскады Майтра;

для каскадно реализуемых ПББФ из h букв могут быть построены МС-каскады первого типа из h элементов, но не могут быть построены МС-каскады второго типа.

Установлены свойства столбцов значений БФУ, реализуемых каскадными ББФ и ББФ, обратными к каскадным и каскадно реализуемым. Некоторые из приведенных результатов были получены в [32]. Отметим, что МС-каскады могут быть реализованы не только в базисе элементов с односторонней проводимостью (как в настоящей работе), но и в базисе элементов с двусторонней проводимостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евреинов Э.В., Косарев Ю.Г.* Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск: Наука, 1966.
2. *Прангишвили И.В., Абрамова Н.А., Бабичева Е.В. и др.* Микроэлектроника и однородные структуры для построения логических и вычислительных устройств. М.: Наука, 1967.
3. *Варшавский В.И., Мараховский В.Б., Песчанский В.А. и др.* Однородные структуры (Анализ. Синтез. Поведение). М.: Энергия, 1973.
4. *Варшавский В.И., Мараховский В.Б., Песчанский В.А. и др.* Синтез схем в однородных структурах. Л.: Судостроение, 1973.
5. *Поспелов Д.А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.
6. *Артюхов В.Л., Копейкин Г.А., Шальто А.А.* Настраиваемые модули для управляющих логических систем. Л.: Энергоатомиздат, 1981.
7. *Вольвовский Л.А.* Методы синтеза логических функций в однородных средах // Абстрактная и структурная теория релейных устройств. М.: Наука, 1972.
8. *Битюцкий В.П., Чистов В.П.* Функциональная полнота в ленточных однородных структурах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 3.
9. *Битюцкий В.П., Чистов В.П.* Простейшие ленточные структуры // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 6.
10. *Минник Р.* Использование матриц с простыми внутренними связями в монолитных цифровых системах // Микроэлектроника и большие системы. М.: Мир, 1967.
11. *Шипилина Л.Б.* Метод синтеза скобочной формы булевой функции в однородной среде // Абстрактная и структурная теория релейных устройств. М.: Наука, 1972.
12. *Игнатущенко В.В.* Синтез переключательных функций в некоторых типах однородных структур // АиТ. 1968. № 5.
13. *Canaday R.H.* Two-dimensional iterative logic //Proc. AFIPS. Fall Joint Comput Conf. 1965. V. 27. Pt. 1.
14. *Akers S.B.* Synthesis of combinational logic using three-input majority gates // Switching circuit theory and logical design. Publ. AIEE. S-141. 1962.
15. *Miyata F.* Realization of arbitrary logical functions using majority elements // IEEE Trans. Electron. Comput. 1963. № 3.
16. *Amarel S., Cooke G., Winder R.O.* Majority gate network // IEEE Trans. Electron. Comput. 1964. № 1.
17. *Minnick R.C.* A survey of micro cellural research // J. ACM. 1967. № 2.
18. *Макаревский А.Я., Варшавский В.И., Мараховский В.В. и др.* Реализация булевых функций одномерными однородными сетями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1972. № 1.
19. *Шорт Р.* Каскады с матричной структурой из двухканальных элементов // Микроэлектроника и большие системы. М.: Мир, 1967.
20. *Mukhopadhayay A.* Unate cellular logic // IEEE Trans. Electron. Comput. 1969. № 2.
21. *Maitra K.* Cascaded switching networks of two-input flexible cells // IRE Trans. Electron. Computers. 1962. № 2.

22. *Minnick R.C.* Cutpoint Cellular Logic // IEEE Trans. Electron. Comput. 1964. № 6.

23. *Levy S., Winder R.O., Mott T.H.* A note on tributary switching networks // IEEE Trans. Electron. Comput. 1964. № 2.

24. *Stone H.S., Korenjak A.J.* Canonical form and synthesis of cellular cascades // IEEE Trans. Electron. Comput. 1963. № 6.

25. *Артюхов В.Л., Розенблюм Л.Я., Шалыто А.А.* Логические возможности некоторых типов каскадных структур // Сети связи и дискретные устройства управления. М.: Наука, 1976.

26. *Кузнецов Б.П., Шалыто А.А.* Реализация булевых формул линейными бинарными графами. I. Синтез и анализ // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 5.

27. *Кузнецов Б.П., Шалыто А.А.* Реализация булевых формул линейными бинарными графами. III. Оптимизация числа и суммарной длины путей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 5.

28. *Артюхов В.Л., Шалыто А.А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности. 1983.

29. *Артюхов В.Л., Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1988. № 4.

30. *Curtis H.A.* A new approach to the design of switching circuits. Princenton. N.J.: D. Van Nostrand Co, 1962.

31. *Боголюбов И.Н., Овсиевич Б.Л., Розенблюм Л.Я.* Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов // Сети передачи информации и их автоматизация. М.: Наука, 1965.

32. *Артюхов В.Л., Шалыто А.А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1984.

Номер 5 Сентябрь - Октябрь 1996

ISSN 0002-3388

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Главный редактор
Е.А. Федосов

МАИК "НАУКА" "Н А У К А"