ТЕОРИЯ
И СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ
№ 5 • 1995

МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.3.06:62-507

© 1995 г. Б. П. КУЗНЕЦОВ, А. А. ШАЛЫТО

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ ЛИНЕЙНЫМИ БИНАРНЫМИ ГРАФАМИ. III. ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА И СУММАРНОЙ ДЛИНЫ ПУТЕЙ

Излагается метод оптимизации числа и длины путей в линейных бинарных графах, реализующих булевы формулы. Рассматривается вопрос о расширении области использования предлагаемого метода.

Введение. В [1] рассмотрены методы синтеза и анализа линейных бинарных графов (ЛБГ), реализующих булевы формулы в базисе И, ИЛИ, НЕ. При этом исследуются лишь бесповторные булевы формулы (ББФ), так как повторные формулы получаются из них за счет переобозначения переменных [2].

В [3] показано, что изменение порядка записи формулы влияет на число и суммарную длину путей в ЛБГ. Определены оценки, характеризующие предельную величину уменьшения этих показателей за счет оптимизации. Однако метод оптимизации для рассматриваемого класса формул не известен. В ([3] приведен лишь метод оптимизации бесповторных пороговых формул.) Настоящая работа призвана восполнить указанный пробел.

1. Оценка числа вариантов записи формулы. Пусть задана некоторая БВФ. Обозначим в ней инвариантные фрагменты [2] новыми буквами. В преобразованной ББФ (ПББФ) любая перестановка ее фрагментов, вообще говоря, может привести к изменению рассматриваемых показателей ЛБГ.

Пусть ПББФ — конъюнкция (дизъюнкцией) из t букв. Из сказанного выше следует, что в общем случае все варианты ее записи могут быть неизоморфны по рассматриваемым показателям. При этом число вариантов записи удовлетворяет соотношению $\Pi = t!$

Пример 1. Пусть задана ББФ $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5)\, x_6$. Определить число вариантов ее записи.

В этом случае ПББФ имеет вид $y = z_1 z_2 z_3$, где $z_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$; $z_2 = x_4 \vee x_5$; $\bar{z}_3 = \bar{x}_6$. Таким образом $t = 3$, а $\Pi = 3! = 6$. Для каждого из шести вариантов записи исходной формулы существует свой ЛБГ с числом путей S, равным 16, 15, 13, 11, 11, 10 соответственно, причем максимальное значение S достигается для исходной формулы, а минимальное — для формулы $y = x_6 (x_4 \vee x_5)(x_1 \vee \vee x_2 \vee x_3)$.

Пусть ПББФ — знакопеременная (необязательно пороговой) формула из t букв. При этом число вариантов ее записи

$$\Pi = 2^{t-1}.$$

Пример 2. Пусть задана ББФ

$$y = [x_1x_2x_3 \vee (x_4 \vee x_5)\, x_6]\,(x_7x_8 \vee x_9x_{10}) \vee x_{11}x_{12}.$$

Определить число вариантов ее записи.

В этом случае ПББФ записывается следующим образом: $y = (z_1 \vee z_2z_3)\, z_4 \vee \vee z_5$, где $z_1 = x_1x_2x_3$; $z_2 = x_4 \vee x_5$; $z_3 = x_6$; $z_4 = x_7x_8 \vee x_9x_{10}$; $z_5 = x_{11}x_{12}$. ПББФ — знакопеременная (в данном случае пороговой) формула из $t = 5$ букв. Поэтому $\Pi = 2^{5-1} = 16$. Для каждого из 16 вариантов записи исходной формулы существует свой ЛБГ с числом путей, равным 132, 123, 117, 114, 111, 108, 102, 93, 89, 87, 87, 87, 78, 78, 69, 69 соответственно. При этом максимальное значение S достигается для исходной формулы, а минимальное — для формул $y = x_{11}x_{12} \vee (x_7x_8 \vee x_9x_{10})\,[x_6\,(x_4 \vee x_5) \vee x_1x_2x_3]$, $y = x_{11}x_{12} \vee [x_6\,(x_4 \vee x_5) \vee x_1x_2x_3] \times \times (x_7x_8 \vee x_9x_{10})$. Приведенные выше соотношения — верхняя и нижняя оценка для класса ПББФ. Таким образом $2^{t-1} \le \Pi \le t!$

Пример 3. Пусть ПББФ состоит из $t = 7$ букв ($64 = 2^6 \le \Pi \le 5040$) и имеет вид $y = z_1z_2z_3z_4 \vee z_5z_6z_7$. При этом $\Pi = 4!3!2 = 288$.

Из изложенного следует, что число вариантов записи формулы есть быстрорастущая функция от числа букв в ПББФ и поэтому перебор вариантов с целью поиска оптимума чрезвычайно затруднителен. Для сокращения трудоемкости поиска предлагается рассматриваемый ниже метод.

2. Метод оптимизации. Лемма 1. Если задана конъюнкция формул и выполняется соотношение

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{p_2 - 1}{q_2} \le \ldots \le \frac{p_h - 1}{q_h}, \tag{2.1}$$

где p_i и q_i — число единичных и нулевых путей в ЛБГ формулы y_i ($i = 1, \ldots, h$), то справедливо неравенство

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{S^1 - 1}{S^0} \le \frac{p_h - 1}{q_h}, \tag{2.2}$$

где S^0 (S^1) — число нулевых (единичных) путей в ЛБГ.

Введем следующие обозначения:

$$T_1 = q_1 + p_1T_2;\quad T_2 = q_2 + p_2T_3;\quad T_{h-1} = q_{h-1} + p_{h-1}T_h;$$

$$T_h = q_h;\quad R_1 = p_1R_2;\quad R_2 = p_2R_3;\ \ldots;\ R_{h-1} = p_{h-1}R_h;\quad R_h = p_h.$$

1. Докажем, что

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{S^1 - 1}{S^0} = \frac{R_1 - 1}{T_1}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{p_1R_2 - 1}{q_1 + p_1T_2};\quad p_1q_1 - q_1 + p_1^2T_2 - p_1T_2 \le q_1p_1R_2 - q_1;$$

$$q_1 + p_1T_2 - T_2 \le q_1R_2;\quad T_2\,(p_1 - 1) \le q_1\,(R_2 - 1);\quad \frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{R_2 - 1}{T_2}.$$

Аналогично доказательство неравенства

$$\frac{p_2 - 1}{q_1} \le \frac{R_2 - 1}{T_2}$$

сводится к доказательству того, что

$$\frac{p_2 - 1}{q_1} \le \frac{R_3 - 1}{T_3}.$$

Так как из соотношения (2.1) следует, что

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{p_2 - 1}{q_2},$$

то доказательство исходного неравенства сводится к доказательству неравенства

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{R_3 - 1}{T_3}.$$

Действуя аналогично, задачу можно свести к доказательству неравенства

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{R_h - 1}{T_h} = \frac{p_h - 1}{q_h},$$

справедливость которого следует из (2.1). Исходное соотношение доказано.

2. Докажем, что

$$\frac{S^1 - 1}{S^0} \le \frac{p_h - 1}{q_h}.$$

Справедливы соотношения $S^1_h = S^1_{h-1}p_h$; $S^0_h = S_{h-1}' + S_{h-1}'q_h$. Доказательство исходного неравенства сводится к доказательству

$$\frac{S^1_{h-1}p_h - 1}{S^0_{h-1} + S^1_{h-1}q_h} \le \frac{p_h - 1}{q_h};$$

$$S^1_{h-1}p_hq_h - q_h \le S^0_{h-1}p_h - S^0_{h-1} + S^1_{h-1}q_hp_h - S^1_{h-1}q_h;$$

$$q_h(S^1_{h-1} - 1) \le S^0_{h-1}(p_h - 1); \quad \frac{S^1_{h-1} - 1}{S^0_{h-1}} \le \frac{p_h - 1}{q_h}.$$

Так как из (2.1) следует, что

$$\frac{p_{h-1} - 1}{q_{h-1}} \le \frac{p_h - 1}{q_h},$$

то доказательство исходного соотношения сводится к доказательству

$$\frac{S^1_{h-1} - 1}{S^0_{h-1}} \le \frac{p_{h-1} - 1}{q_{h-1}}.$$

Действуя аналогично, задачу можно свести к доказательству неравенства

$$\frac{S^1_2 - 1}{S^0_2} \le \frac{p_2 - 1}{q_2},$$

что эквивалентно

$$\frac{p_1p_2 - 1}{q_1 + p_1q_2} \le \frac{p_2 - 1}{q_2}.$$

Последнее неравенство сводится к соотношению

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{p_2 - 1}{q_2},$$

которое справедливо исходя из предположения (2.1). Таким образом исходное неравенство доказано.

Т е о р е м а 1. Если выполняется соотношение (2.1), то минимальное число путей в ЛБГ достигается при записи конъюнкции в виде $y = y_1 y_2 \dots y_h$.

Доказательство выполним по индукции. Пусть $h=2$ и $(p_1 - 1)/q_1 \le \le (p_2 - 1)/q_2$. Покажем, что при этом формула должна иметь следующий вид: $y = y_1 y_2$. Рассмотрим формулы $y_{\rm I} = y_1 y_2$ и $y_{\rm II} = y_2 y_1$ и докажем, что $S_{\rm I} \le S_{\rm II}$. При этом $S_{\rm I} = S^1_{\rm I} + S^0_{\rm I} = p_1 p_2 + q_1 + p_1 q_2$, $S_{\rm II} = S^1_{\rm II} + S^0_{\rm II} = p_2 p_1 + q_2 + p_2 q_1$. Число путей для первой формулы меньше, чем для второй, так как $(p_1 - 1)/q_1 \le \le (p_2 - 1)/q_2$; $(p_1 - 1)\, q_2 \le (p_2 - 1)\, q_1$; $p_1 q_2 - q_2 \le p_2 q_1 - q_1$; $q_1 + p_1 q_2 \le q_2 + p_2 q_1$; $p_1 p_2 + q_1 + p_1 q_2 \le p_1 p_2 + q_2 + p_2 q_1$; $S_{\rm I} \le S_{\rm II}$.

Пусть $h=3$ и

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{p_2 - 1}{q_2} \le \frac{p_3 - 1}{q_3}.$$

При этом формула записывается в виде $y = y_1 y_2 y_3$. Так как при перестановке в конъюнкции число единичных путей не изменяется ($S^1 = p_1 p_2 p_3$), то сравним только длины нулевых путей

$$S^0_a = q_1 + p_1 (q_2 + p_2 q_3) \quad \text{для} \quad y_a = y_1 y_2 y_3;$$

$$S^0_b = q_1 + p_1 (q_3 + p_3 q_2) \quad \text{для} \quad y_b = y_1 y_3 y_2;$$

$$S^0_c = q_2 + p_2 (q_1 + p_1 q_3) \quad \text{для} \quad y_c = y_2 y_1 y_3;$$

$$S^0_d = q_2 + p_2 (q_3 + p_3 q_1) \quad \text{для} \quad y_d = y_2 y_3 y_1;$$

$$S^0_e = q_3 + p_3 (q_1 + p_1 q_2) \quad \text{для} \quad y_e = y_3 y_1 y_2;$$

$$S^0_f = q_3 + p_3 (q_2 + p_2 q_1) \quad \text{для} \quad y_f = y_3 y_2 y_1.$$

Так как

$$\frac{p_2 - 1}{q_2} \le \frac{p_3 - 1}{q_3}, \quad \text{то} \quad S^0_a \le S^0_b;$$

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{p_3 - 1}{q_3}, \quad \text{то} \quad S^0_c \le S^0_d;$$

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \le \frac{p_2 - 1}{q_2}, \quad \text{то} \quad S^0_e \le S^0_f.$$

Покажем теперь, что $S^0_a \le S^0_c$; $S^0_a \le S^0_e$. Первое неравенство следует из $(p_1 - 1)/q_1 \le (p_2 - 1)/q_2$, а второе — из $S^0_b \le S^0_e$, так как $(p_1 - 1)/q_1 \le (p_3 - 1)/ /q_3$. Таким образом S^0_a минимально и $y = y_1 y_2 y_3$.

Рассмотрим конъюнкцию $y = y_1 y_2 \dots y_h$, упорядоченную с помощью соотношения (2.1), и предположим, что справедливость такого упорядочивания доказана. Введем в конъюнкцию $(h+1)$-ю формулу и определим, в каком месте конъюнкции ее расположить.

1. Пусть

$$\frac{p_{h+1}-1}{q_{h+1}} \le \frac{p_1-1}{q_1}.$$

Тогда из соотношения (2.2) следует, что

$$\frac{p_{h+1}-1}{q_{h+1}} \le \frac{S^1-1}{S^0}$$

и поэтому конъюнкцию формул y и y_{h+1} следует записать в виде $y' = y_{h+1}y$.

2. Пусть

$$\frac{p_h-1}{q_h} \le \frac{p_{h+1}-1}{q_{h+1}}.$$

Тогда из соотношения (2.2) следует, что

$$\frac{S^1-1}{S^0} \le \frac{p_{h+1}-1}{q_{h+1}}$$

и поэтому конъюнкцию формул y и y_{h+1} следует записать в виде $y' = yy_{h+1}$.

3. Пусть

$$\frac{p_{i-1}-1}{q_{i-1}} \le \frac{p_{h+1}-1}{q_{h+1}} \le \frac{p_i-1}{q_i}.$$

Запишем конъюнкцию y в виде $y = Y_1Y_2$, где $Y_1 = y_1y_2 \ldots y_{i-1}$ и $Y_2 = y_iy_{i+1} \ldots y_h$. Из соотношения (2.2) следует, что

$$\frac{S_1^1-1}{S_1^0} \le \frac{p_{i-1}-1}{q_{i-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_i-1}{q_i} \le \frac{S_2^1-1}{S_2^0}.$$

Поэтому

$$\frac{S_1^1-1}{S_1^0} \le \frac{p_{h+1}-1}{q_{h+1}} \le \frac{S_2^1-1}{S_2^0}.$$

Следовательно, конъюнкцию трех формул Y_1, y_{h+1}, Y_2 следует записать в виде $y^1 = Y_1y_{h+1}Y_2$. Таким образом теорема доказана. Так как конъюнкция и дизъюнкция двойственны, без доказательства приведем соответствующие лемму и теорему для дизъюнкции.

Лемма 2. Если задана дизъюнкция некоторых формул и выполняется соотношение

$$\frac{q_1-1}{p_1} \le \frac{q_2-1}{p_2} \le \ldots \le \frac{q_h-1}{p_h}, \tag{2.3}$$

справедливо неравенство

$$\frac{q_1-1}{p_1} \le \frac{S^0-1}{S^1} \le \frac{q_h-1}{p_h}. \tag{2.4}$$

Теорема 2. Если выполняется соотношение (2.3), минимальное число путей в ЛБГ достигается при записи дизъюнкции в виде $y = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_h$.

Рассмотрим следствия этих теорем.

Следствие 1. Если задана конъюнкция [дизъюнкция] некоторых формул, число единичных (нулевых) путей в соответствующем ЛБГ не зависит от взаимного расположения этих формул, а оптимизация числа путей достигается за счет оптимизации только нулевых (единичных) путей.

Следствие 2. Соотношение (2.1) [(2.3)] является также критерием для определения минимального числа нулевых [единичных] путей в ЛБГ, соответствующем конъюнкции [дизъюнкции].

Следствие 3. Пусть $y_i = x_i$. При этом $p_i = q_i = 1$. Так как

$$\frac{p_i - 1}{q_i} = \frac{q_i - 1}{p_i} = 0, \quad a \frac{p_j - 1}{q_j} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{q_j - 1}{p_j} > 0,$$

то одиночная буква всегда должна располагаться в первой формуле.

Следствие 4. Так как бесповторные пороговые формулы строятся путем соединения операциями И и ИЛИ только одиночных букв, следствие 3 указывает оптимальный порядок записи этого класса формул.

Следствие 5. Если реализуемая формула ДНФ (КНФ) [2], причем ранг i-й конъюнкции (дизъюнкции) равен k_i, то так как $p_i = 1$ $(p_i = k_i)$, $q_i = k_i$ $(q_i = 1)$, соотношения (2.1) и (2.3) приобретают вид $k_1 - 1 \le k_2 - 1 \le \ldots \le k_h - 1$ (при этом $k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_h$).

Свойство 1. Если заданная формула имеет вид $y = y_1 y_2 \ldots y_h$, то $S^1 = p_1 p_2 \ldots p_h$, $S^0 = q_1 + p_1(q_2 + p_2(q_4 + \ldots + p_{h-2}(q_{h-1} + p_{h-1} q_h) \ldots))$.

Свойство 2. Если заданная формула имеет вид $y = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_h$, то $S^1 = p_1 + q_1(p_2 + q_2(p_3 + \ldots + q_{h-2}(p_{h-1} + q_{h-1} p_h) \ldots))$, $S^0 = q_1 q_2 \ldots q_h$.

Процедура оптимизации числа путей в ЛБГ состоит из следующих этапов.

1. Для заданной ББФ строится древовидная схема из элементов И и ИЛИ, в которой число входов каждого элемента равно числу букв в реализуемой этим фрагментом дизъюнкции или конъюнкции. Построенная для данной формулы схема является единственной и минимальной по числу элементов.

2. Элементы схемы от входов к выходу ранжируются по ярусам так, что если к рассматриваемому элементу подключены выходы двух элементов, находящихся в ярусах i и j, причем $i \ge j$, то рассматриваемый элемент считается принадлежащим $(i+1)$-му ярусу.

3. Выходы элементов каждого яруса, начиная с первого, помечаются слева направо символами y_l.

4. Для каждого элемента схемы, начиная с первого $(l = 1)$, записывается формула (конъюнкция или дизъюнкция), которую он реализует.

5. Для каждой формулы, реализуемой элементом, начиная с первой, определяется оптимальный порядок ее записи с помощью соотношений, приведенных в формулировках теорем и следствий 3—5. Осуществляется перестановка фрагментов формулы в найденном порядке и вычисляется число единичных и нулевых путей в соответствующем ЛБГ с помощью соотношений, приведенных в свойствах.

6. Оптимизированная запись формулы в целом осуществляется путем подстановки формул элементов, полученных с учетом перестановок, начиная с формулы выходного элемента схемы.

7. Для оптимизированной формулы строится ЛБГ.

Замечание. Изложенная процедура оптимизации числа путей минимизирует также число единичных и нулевых путей в отдельности, а также суммарную длину путей. Кроме того, минимизируется число точек объединения ребер в ЛБГ, а также номенклатура меток в соответствующей бинарной программе (БП).

Пример 4. Построить ЛБГ, содержащий минимальное число путей, для ББФ, рассмотренной в примере 2. На рис. 1 приведена схема, соответствующая этой формуле, где элементы ранжированы и помечены (этапы 1—3 процедуры). Запишем для каждого элемента соответствующую формулу (этап 4) и выполним вычисления, указанные в этапе 5

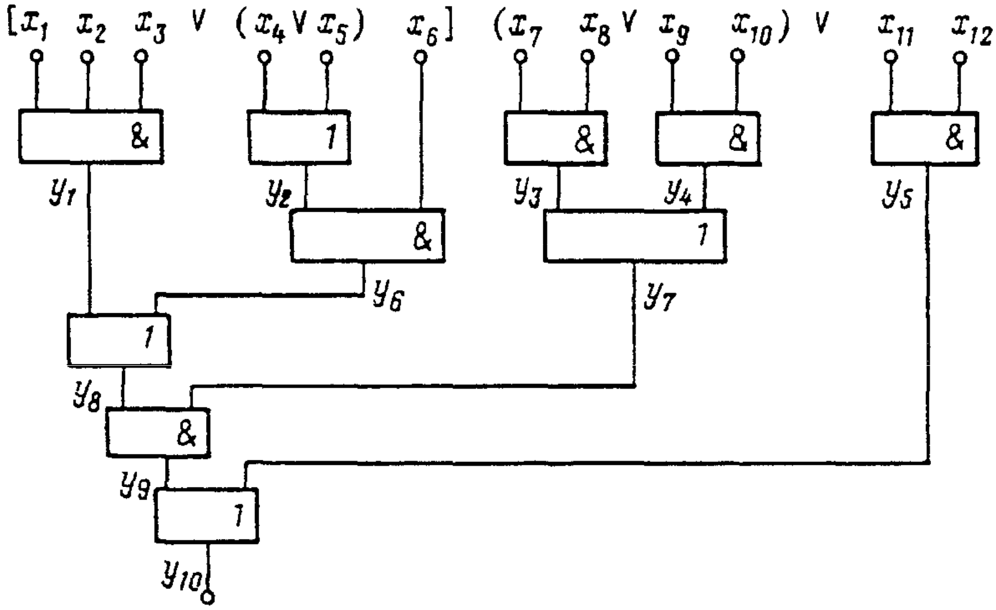

Рис. 1

1) $y_1 = x_1x_2x_3$, $p_1 = 1$, $q_1 = 3$;

2) $y_2 = x_4 \vee x_5$, $p_2 = 2$, $q_2 = 1$;

3) $y_3 = x_7x_8$; $p_3 = 1$, $q_3 = 2$;

4) $y_4 = x_9x_{10}$; $p_4 = 1$, $q_4 = 2$;

5) $y_5 = x_{11}x_{12}$; $p_5 = 1$, $q_5 = 2$;

6) $y_6 = y_2x_6$.

Формула — пороговая. Требуется перестановка: $y_6 = x_6y_2$; $p_6 = 2$, $q_6 = 2$.

7) $y_7 = y_3 \vee y_4$.

Формула симметрическая. Перестановок не требуется: $p_7 = p_3 + p_4q_3 = 3$; $q_7 = q_3q_4 = 4$;

8) $y_8 = y_1 \vee y_6$; $\dfrac{q_1 - 1}{p_1} \not\leq \dfrac{q_6 - 1}{p_6}$.

Требуется перестановка формулы: $y_8 = y_6 \vee y_1$. При этом $p_8 = p_6 + p_1q_6 = 4$; $q_8 = q_6q_1 = 6$;

9) $y_9 = y_8y_7$; $\dfrac{p_8 - 1}{q_8} \leq \dfrac{p_7 - 1}{q_7}$.

Перестановка не требуется. При этом $p_9 = p_8p_7 = 12$, $q_9 = q_8 + q_7p_8 = 22$;

10) $y_{10} = y_9 \vee y_5$; $\dfrac{q_9 - 1}{p_9} \not\leq \dfrac{q_5 - 1}{p_5}$.

Требуется перестановка: $y_{10} = y_5 \vee y_9$. При этом $p_{10} = p_5 + p_9q_5 = 25$; $q_{10} = q_5q_6 = 44$. Таким образом $S^1 = 25$, $S^0 = 44$, $S = 69$.

Построим оптимизированную формулу (этап 6): $y = y_{10} = y_5 \vee y_9 = x_{11}x_{12} \vee y_8y_7 = x_{11}x_{12} \vee (y_6 \vee y_1)(y_3 \vee y_4) = x_{11}x_{12} \vee (x_6y_2 \vee x_1x_2x_3)(x_7x_8 \vee x_9x_{10}) =$

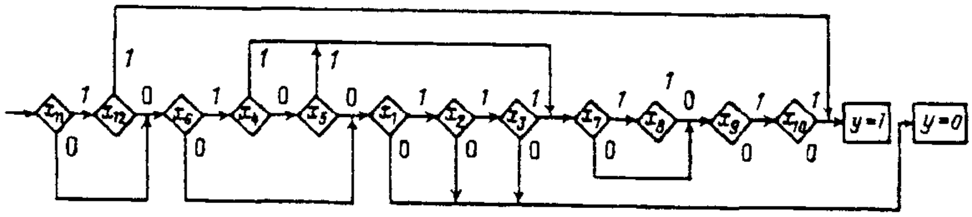

Рис. 1

$= x_{11}x_{12} \vee [x_6 (x_4 \vee x_5) \vee x_1x_2x_3] (x_7x_8 \vee x_9x_{10})$. ЛБГ этой формулы приведен на рис. 2 (этап 7). Для исходной формулы $S = 132$.

3. **Расширение области использования предлагаемого метода.** Построение ЛБГ для ББФ оптимально. Использование ЛБГ для повторных формул (ПФ) обладает наряду с достоинствами и рядом недостатков. К достоинствам можно отнести малую трудоемкость построения и отсутствие необходимости линеаризации при построении БП в базисе одноадресных условных переходов [1]. Недостатки состоят в следующем.

Во-первых, в ЛБГ ПФ на одном пути может быть многократная проверка одних и тех же переменных. Поэтому если их предварительно не записывать в оперативную память, то за время прохождения такого пути значение переменной может измениться и становится неясно, на каком наборе переменных значение формулы вычислено. Это явление может быть названо «риском» в ЛБГ. Во-вторых, в ЛБГ ПФ число путей может превышать величину 2^n, где n — число переменных в формуле, что нерационально для тестирования. В-третьих, число вершин в ЛБГ ПФ обычно не минимально. Этих недостатков лишены метод каскадов [4] и канонический метод [5], которые, однако, весьма трудоемки и требуют линеаризации БГ, в ходе которой в управляющем графе в большинстве случаев появляются вершины, соответствующие командам безусловного перехода. Применение этих методов наиболее рационально для недекомпозитабельных формул.

Существуют, однако, классы формул, для которых эффективно совместное применение БГ и ЛБГ с целью использования достоинств обоих подходов. Если в ПФ имеются бесповторные фрагменты, то они реализуются модифицированным формульным методом [1], а для оптимизации числа путей в них используется предлагаемый в настоящей работе метод.

П р и м е р 5. Реализовать формулу

$y = (x_1x_2 \vee x_3)\, \bar{x}_4 \vee x_4 (x_5 \vee x_6)\, x_7;$

1) выделяем бесповторные фрагменты $z_1 = (x_1x_2 \vee x_3)$ и $z_2 = (x_5 \vee x_6)\, x_7$;

2) с помощью предлагаемого метода оптимизируем эти формулы: $z_1 = x_3 \vee x_1x_2$; $z_2 = x_7 (x_5 \vee x_6)$;

3) реализуем z_1 и z_2 с помощью ЛБГ;

4) реализуем методом каскадов ПФ $y = z_1\bar{x}_4 \vee x_4z_2$;

5) подставим в БГ вместо вершин с пометками z_1 и z_2 соответствующие ЛБГ.

Подсчитаем число путей в графе [1], учитывая, что для z_1, z_2 и x_4 число единичных и нулевых путей соответственно равны $p_1 = q_1 = 2$; $p_2 = q_2 = 2$; $p_4 = q_4 = 1$. Подсчет осуществляется следующим образом:

$$y = \bar{x}_4z_1 \vee x_4z_2 = \bar{x}_4 (\bar{z}_10 \vee z_11) \vee x_4 (\bar{z}_20 \vee z_21),$$

$$S = q_4 (q_1 + p_1) + p_4 (q_2 + p_2) = 8. \qquad (3.1)$$

Для графа, построенного аналогично, но без оптимизации $p_1 = 3$, $q_1 = 2$; $p_2 = 2$, $q_2 = 3$; $p_4 = q_4 = 1$. При этом из (3.1) следует, что $S = 10$.

Более интересным, с теоретической точки зрения, является случай, когда в

ПФ могут быть выделены повторные независимые фрагменты, а получающаяся в результате формула является ББФ. При этом оптимизация числа путей также обеспечивается предлагаемым методом.

Пример 6. Реализовать формулу $y = [x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_4x_5] \times \times (\bar{x}_6x_7 \vee x_6\bar{x}_8)$;

1) выделяем независимые повторные фрагменты: $z_1 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$, $z_2 = \bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_4x_5$; $z_3 = \bar{x}_6x_7 \vee x_6\bar{x}_8$; 2) реализуем z_1, z_2 и z_3 с помощью соответствующих БГ; 3) определим число единичных и нулевых путей в каждом из них: $p_1 = 3$, $q_1 = 3$, $p_2 = 2$, $q_2 = 2$, $p_3 = 2$, $q_3 = 2$; 4) подставляя z_1, z_2 и z_3 в исходную формулу, получим ББФ $y = (z_1 \vee z_2)z_3$; 5) определим для этой формулы оптимальный порядок ее записи на основе теорем 1 и 2

$$\text{a)}\ \frac{2}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{q_1-1}{p_1} \not\leq \frac{q_2-1}{p_2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2};$$

преобразовываем формулу: $y = (z_2 \vee z_1)z_3$; б) определяем число единичных и нулевых путей для фрагмента $\varphi_{2,1} = z_2 \vee z_1 = z_2 \vee \bar{z}_2z_1$; $\bar{\varphi}_{2,1} = \bar{z}_2\bar{z}_1$. При этом $p_{2,1} = p_2 + q_2p_1 = 2 + 2\cdot 3 = 8$; $q_{2,1} = q_2q_1 = 2\cdot 3 = 6$;

$$\text{b)}\ \frac{7}{6} = \frac{8-1}{6} = \frac{p_{2,1}-1}{q_{2,1}} \not\leq \frac{p_3-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Преобразовываем формулу: $y = z_3(z_2 \vee z_1)$; 6) реализуем преобразованную формулу ЛБГ; 7) подставим вместо вершин ЛБГ с пометками z_1, z_2, z_3 соответствующие БГ. Подсчитаем число путей в графе:

$$y = z_3(z_2 \vee z_1) = \bar{z}_30 \vee z_3(z_2 \vee z_1) = \bar{z}_30 \vee z_3(\bar{z}_2z_1 \vee z_21) =$$

$$= \bar{z}_30 \vee z_3(\bar{z}_2(\bar{z}_10 \vee z_11) \vee z_21);$$

$$S = q_3 + p_3(q_2(q_1 + p_1) + p_2) = 2 + 2(2(3 + 3) + 2) = 30.$$

Для графа, построенного аналогично, но без оптимизации

$$y = (z_1 \vee z_2)z_3 = \bar{z}_1(z_2z_3) \vee z_1z_3 = \bar{z}_1(\bar{z}_20 \vee z_2z_3) \vee z_1(\bar{z}_30 \vee z_31) =$$

$$= \bar{z}_1(\bar{z}_20 \vee z_2\cdot(\bar{z}_30 \vee z_31)) \vee z_1(\bar{z}_30 \vee z_31);$$

$$S = q_1(q_2 + p_2(q_3 + p_3)) + p_1(q_3 + p_3) = 3(2 + 2(2 + 2)) + 3(2 + 2) = 42.$$

Необходимо отметить, что совместное использование БГ и ЛБГ резко снижает размерность задач, решаемых методом каскадов или каноническим методом, что существенно расширяет возможность их применения и поиска оптимальных решений. При этом упрощается также решение задачи линеаризации.

Заключение. В настоящей работе и в [1, 3] рассматривались вопросы реализации одной булевой формулы. Однако обычно на практике необходимо реализовать системы булевых формул (СБФ). Поясним причины, по которым в этих работах столь большое внимание уделяется реализации отдельных формул.

Авторами предлагается все алгоритмы, описываемые СБФ, разделить на два класса: алгоритмы, которые не могут изменяться в ходе проектирования, настройки и эксплуатации, и алгоритмы, которые неоднократно меняются на различных этапах «жизни» системы управления (контроля). К первому классу относятся, например, такие алгоритмы, как преобразование двоичного кода в код Грея, преобразование двоичного кода в код управления семи- или десятисегментным индикатором и т. д. Алгоритмы логического управления технологическим оборудованием обычно относятся ко второму классу.

Различные классы алгоритмов могут допускать разные подходы к их реализации. Для первого класса такой критерий, как модификационная способность, отсутствует, и поэтому важнейшими являются критерии, связанные с оптимизацией ресурсов. Для второго класса алгоритмов в большинстве случаев требование возможности безошибочного внесения изменений, в том числе и в условиях объекта управления, выходит на первый план. Для первого класса алгоритмов целесообразна совместная реализация СБФ [4, 6, 7], а для второй разновидности наиболее рационально каждую формулу реализовать оптимально и последовательно выполнить каждую из них [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов Б. П., Шалыто А. А.* Реализация булевых формул линейными бинарными графами. I. Синтез и анализ//Изв. РАН. Техн. кибернетика, 1994. № 5.
2. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.
3. *Кузнецов Б. П., Шалыто А. А.* Реализация булевых формул линейными бинарными графами. II. Оценки числа и суммарной длины путей//Изв. РАН. Теория и система управления. 1995. № 3.
4. *Кузнецов О. П.* О программной реализации логических функций и автоматов//АиТ. 1977. № 7.
5. *Блох А. Ш.* Граф-схемы и их применение. Минск: Вышейш. шк. 1975.
6. *Рубинов В. И., Шалыто А. А.* Метод построения граф-схем простых бинарных программ для систем булевых функций//Автоматика и вычисл. техника. 1986. № 4.
7. *Кузнецов Б. П.* Структурирование бинарных программ//Вопросы судостроения сер. «Судовая автоматика». ЦНИИ «Румб». 1983. Вып. 29.
8. *Артюхов В. Л., Рубинов В. И., Шалыто А. А.* Метод построения обобщенных бинарных программ для системы булевых функций//Вопросы судостроения, сер. «Судовая автоматика». ЦНИИ «Румб». 1982. Вып. 27.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 10.I.1994

ISSN 0002-338

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1995 5