

## МОДЕЛИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.3.06:62-507

© 1995 г. Б. П. КУЗНЕЦОВ, А. А. ШАЛЫТО

### РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ ЛИНЕЙНЫМИ БИНАРНЫМИ ГРАФАМИ. III. ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА И СУММАРНОЙ ДЛИНЫ ПУТЕЙ

Излагается метод оптимизации числа и длины путей в линейных бинарных графах, реализующих булевы формулы. Рассматривается вопрос о расширении области использования предлагаемого метода.

Введение. В [1] рассмотрены методы синтеза и анализа линейных бинарных графов (ЛБГ), реализующих булевы формулы в базисе И, ИЛИ, НЕ. При этом исследуются лишь неповторные булевы формулы (ББФ), так как повторные формулы получаются из них за счет переобозначения переменных [2].

В [3] показано, что изменение порядка записи формулы влияет на число и суммарную длину путей в ЛБГ. Определены оценки, характеризующие предельную величину уменьшения этих показателей за счет оптимизации. Однако метод оптимизации для рассматриваемого класса формул не известен. В ([3] приведен лишь метод оптимизации неповторных пороговых формул.) Настоящая работа призвана восполнить указанный пробел.

1. Оценка числа вариантов записи формулы. Пусть задана некоторая ББФ. Обозначим в ней инвариантные фрагменты [2] новыми буквами. В преобразованной ББФ (ПББФ) любая перестановка ее фрагментов, вообще говоря, может привести к изменению рассматриваемых показателей ЛБГ.

Пусть ПББФ — конъюнкция (дизъюнкцией) из  $t$  букв. Из сказанного выше следует, что в общем случае все варианты ее записи могут быть неизоморфны по рассматриваемым показателям. При этом число вариантов записи удовлетворяет соотношению  $\Pi = t!$

Пример 1. Пусть задана ББФ  $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) (x_4 \vee x_5) x_6$ . Определить число вариантов ее записи.

В этом случае ПББФ имеет вид  $y = z_1 z_2 z_3$ , где  $z_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ ;  $z_2 = x_4 \vee x_5$ ;  $\bar{z}_3 = \bar{x}_6$ . Таким образом  $t = 3$ , а  $\Pi = 3! = 6$ . Для каждого из шести вариантов записи исходной формулы существует свой ЛБГ с числом путей  $S$ , равным 16, 15, 13, 11, 11, 10 соответственно, причем максимальное значение  $S$  достигается для исходной формулы, а минимальное — для формулы  $y = x_6 (x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ .

Пусть ПББФ — знакпеременная (необязательно пороговой) формула из  $t$  букв. При этом число вариантов ее записи

$$\Pi = 2^{t-1}.$$

Пример 2. Пусть задана ББФ

$$y = [x_1 x_2 x_3 \vee (x_4 \vee x_5) x_6] (x_7 x_8 \vee x_9 x_{10}) \vee x_{11} x_{12}.$$

Определить число вариантов ее записи.

В этом случае ПББФ записывается следующим образом:  $y = (z_1 \vee z_2 z_3) z_4 \vee \vee z_5$ , где  $z_1 = x_1 x_2 x_3$ ;  $z_2 = x_4 \vee x_5$ ;  $z_3 = x_6$ ;  $z_4 = x_7 x_8 \vee x_9 x_{10}$ ;  $z_5 = x_{11} x_{12}$ . ПББФ — знакопеременная (в данном случае пороговой) формула из  $t = 5$  букв. Поэтому  $\Pi = 2^{5-1} = 16$ . Для каждого из 16 вариантов записи исходной формулы существует свой ЛБГ с числом путей, равным 132, 123, 117, 114, 111, 108, 102, 93, 89, 87, 87, 87, 78, 78, 69, 69 соответственно. При этом максимальное значение  $S$  достигается для исходной формулы, а минимальное — для формул  $y = x_{11} x_{12} \vee (x_7 x_8 \vee x_9 x_{10}) [x_6 (x_4 \vee x_5) \vee x_1 x_2 x_3]$ ,  $y = x_{11} x_{12} \vee [x_6 (x_4 \vee x_5) \vee x_1 x_2 x_3] \times (x_7 x_8 \vee x_9 x_{10})$ . Приведенные выше соотношения — верхняя и нижняя оценка для класса ПББФ. Таким образом  $2^{t-1} \leq \Pi \leq t!$

Пример 3. Пусть ПББФ состоит из  $t = 7$  букв ( $64 \leq 2^6 \Pi \leq 5040$ ) и имеет вид  $y = z_1 z_2 z_3 z_4 \vee z_5 z_6 z_7$ . При этом  $\Pi = 4!3!2 = 288$ .

Из изложенного следует, что число вариантов записи формулы есть быстрорастущая функция от числа букв в ПББФ и поэтому перебор вариантов с целью поиска оптимума чрезвычайно затруднителен. Для сокращения трудоемкости поиска предлагается рассматриваемый ниже метод.

2. Метод оптимизации. Лемма 1. Если задана конъюнкция формул и выполняется соотношение

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{p_2 - 1}{q_2} \leq \dots \leq \frac{p_h - 1}{q_h}, \quad (2.1)$$

где  $p_i$  и  $q_i$  — число единичных и нулевых путей в ЛБГ формулы  $y_i$  ( $i = 1, \dots, h$ ), то справедливо неравенство

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{S^1 - 1}{S^0} \leq \frac{p_h - 1}{q_h}, \quad (2.2)$$

где  $S^0$  ( $S^1$ ) — число нулевых (единичных) путей в ЛБГ.

Введем следующие обозначения:

$$T_1 = q_1 + p_1 T_2; \quad T_2 = q_2 + p_2 T_3; \quad T_{h-1} = q_{h-1} + p_{h-1} T_h;$$

$$T_h = q_h; \quad R_1 = p_1 R_2; \quad R_2 = p_2 R_3; \dots; \quad R_{h-1} = p_{h-1} R_h; \quad R_h = p_h.$$

1. Докажем, что

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{S^1 - 1}{S^0} = \frac{R_1 - 1}{T_1}.$$

Рассмотрим неравенство

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{p_1 R_2 - 1}{q_1 + p_1 T_2}; \quad p_1 q_1 - q_1 + p_1^2 T_2 - p_1 T_2 \leq q_1 p_1 R_2 - q_1;$$

$$q_1 + p_1 T_2 - T_2 \leq q_1 R_2; \quad T_2 (p_1 - 1) \leq q_1 (R_2 - 1); \quad \frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{R_2 - 1}{T_2}.$$

Аналогично доказательство неравенства

$$\frac{p_2 - 1}{q_1} \leq \frac{R_2 - 1}{T_2}$$

сводится к доказательству того, что

$$\frac{p_2 - 1}{q_1} \leq \frac{R_3 - 1}{T_3}.$$

Так как из соотношения (2.1) следует, что

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{p_2 - 1}{q_2},$$

то доказательство исходного неравенства сводится к доказательству неравенства

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{R_3 - 1}{T_3}.$$

Действуя аналогично, задачу можно свести к доказательству неравенства

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{R_h - 1}{T_h} = \frac{p_h - 1}{q_h},$$

справедливость которого следует из (2.1). Исходное соотношение доказано.

2. Докажем, что

$$\frac{S^i - 1}{S^0} \leq \frac{p_h - 1}{q_h}.$$

Справедливы соотношения  $S_h^i = S_{h-1}^i p_h$ ;  $S_h^0 = S_{h-1}^0 + S_{h-1}^0 q_h$ . Доказательство исходного неравенства сводится к доказательству

$$\frac{S_{h-1}^i p_h - 1}{S_{h-1}^0 + S_{h-1}^i q_h} \leq \frac{p_h - 1}{q_h};$$

$$S_{h-1}^i p_h q_h - q_h \leq S_{h-1}^0 p_h - S_{h-1}^0 + S_{h-1}^i q_h p_h - S_{h-1}^i q_h;$$

$$q_h (S_{h-1}^i - 1) \leq S_{h-1}^0 (p_h - 1); \quad \frac{S_{h-1}^i - 1}{S_{h-1}^0} \leq \frac{p_h - 1}{q_h}.$$

Так как из (2.1) следует, что

$$\frac{p_{h-1} - 1}{q_{h-1}} \leq \frac{p_h - 1}{q_h},$$

то доказательство исходного соотношения сводится к доказательству

$$\frac{S_{h-1}^i - 1}{S_{h-1}^0} \leq \frac{p_{h-1} - 1}{q_{h-1}}.$$

Действуя аналогично, задачу можно свести к доказательству неравенства

$$\frac{S_2^i - 1}{S_2^0} \leq \frac{p_2 - 1}{q_2},$$

что эквивалентно

$$\frac{p_1 p_2 - 1}{q_1 + p_1 q_2} \leq \frac{p_2 - 1}{q_2}.$$

Последнее неравенство сводится к соотношению

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{p_2 - 1}{q_2},$$

которое справедливо исходя из предположения (2.1). Таким образом исходное неравенство доказано.

**Теорема 1.** Если выполняется соотношение (2.1), то минимальное число путей в ЛБГ достигается при записи конъюнкции в виде  $y = y_1 y_2 \dots y_h$ .

Доказательство выполним по индукции. Пусть  $h = 2$  и  $(p_1 - 1)/q_1 \leq \leq (p_2 - 1)/q_2$ . Покажем, что при этом формула должна иметь следующий вид:  $y = y_1 y_2$ . Рассмотрим формулы  $y_I = y_1 y_2$  и  $y_{II} = y_2 y_1$  и докажем, что  $S_I \leq S_{II}$ . При этом  $S_I = S_I^1 + S_I^0 = p_1 p_2 + q_1 + p_1 q_2$ ,  $S_{II} = S_{II}^1 + S_{II}^0 = p_2 p_1 + q_2 + p_2 q_1$ . Число путей для первой формулы меньше, чем для второй, так как  $(p_1 - 1)/q_1 \leq \leq (p_2 - 1)/q_2$ ;  $(p_1 - 1) q_2 \leq (p_2 - 1) q_1$ ;  $p_1 q_2 - q_2 \leq p_2 q_1 - q_1$ ;  $q_1 + p_1 q_2 \leq q_2 + p_2 q_1$ ;  $p_1 p_2 + q_1 + p_1 q_2 \leq p_1 p_2 + q_2 + p_2 q_1$ ;  $S_I \leq S_{II}$ .

Пусть  $h = 3$  и

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{p_2 - 1}{q_2} \leq \frac{p_3 - 1}{q_3}.$$

При этом формула записывается в виде  $y = y_1 y_2 y_3$ . Так как при перестановке в конъюнкции число единичных путей не изменяется ( $S^1 = p_1 p_2 p_3$ ), то сравним только длины нулевых путей

$$S_a^0 = q_1 + p_1 (q_2 + p_2 q_3) \quad \text{для } y_a = y_1 y_2 y_3;$$

$$S_b^0 = q_1 + p_1 (q_3 + p_3 q_2) \quad \text{для } y_b = y_1 y_3 y_2;$$

$$S_c^0 = q_2 + p_2 (q_1 + p_1 q_3) \quad \text{для } y_c = y_2 y_1 y_3;$$

$$S_d^0 = q_2 + p_2 (q_3 + p_3 q_1) \quad \text{для } y_d = y_2 y_3 y_1;$$

$$S_e^0 = q_3 + p_3 (q_1 + p_1 q_2) \quad \text{для } y_e = y_3 y_1 y_2;$$

$$S_f^0 = q_3 + p_3 (q_2 + p_2 q_1) \quad \text{для } y_f = y_3 y_2 y_1.$$

Так как

$$\frac{p_2 - 1}{q_2} \leq \frac{p_3 - 1}{q_3}, \quad \text{то } S_a^0 \leq S_b^0;$$

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{p_3 - 1}{q_3}, \quad \text{то } S_c^0 \leq S_d^0;$$

$$\frac{p_1 - 1}{q_1} \leq \frac{p_2 - 1}{q_2}, \quad \text{то } S_e^0 \leq S_f^0.$$

Покажем теперь, что  $S_a^0 \leq S_c^0$ ;  $S_a^0 \leq S_e^0$ . Первое неравенство следует из  $(p_1 - 1)/q_1 \leq (p_2 - 1)/q_2$ , а второе — из  $S_b^0 \leq S_d^0$ , так как  $(p_1 - 1)/q_1 \leq (p_3 - 1)/q_3$ . Таким образом  $S_a^0$  минимально и  $y = y_1 y_2 y_3$ .

Рассмотрим конъюнкцию  $y = y_1 y_2 \dots y_h$ , упорядоченную с помощью соотношения (2.1), и предположим, что справедливость такого упорядочивания доказана. Введем в конъюнкцию  $(h + 1)$ -ю формулу и определим, в каком месте конъюнкции ее расположить.

1. Пусть

$$\frac{p_{h+1} - 1}{q_{h+1}} \leq \frac{p_1 - 1}{q_1}.$$

Тогда из соотношения (2.2) следует, что

$$\frac{p_{h+1} - 1}{q_{h+1}} \leq \frac{S^1 - 1}{S^0}$$

и поэтому конъюнкцию формул  $u$  и  $u_{h+1}$  следует записать в виде  $u' = u_{h+1}u$ .

2. Пусть

$$\frac{p_h - 1}{q_h} \leq \frac{p_{h+1} - 1}{q_{h+1}}.$$

Тогда из соотношения (2.2) следует, что

$$\frac{S^1 - 1}{S^0} \leq \frac{p_{h+1} - 1}{q_{h+1}}$$

и поэтому конъюнкцию формул  $u$  и  $u_{h+1}$  следует записать в виде  $u' = uu_{h+1}$ .

3. Пусть

$$\frac{p_{i-1} - 1}{q_{i-1}} \leq \frac{p_{h+1} - 1}{q_{h+1}} \leq \frac{p_i - 1}{q_i}.$$

Запишем конъюнкцию  $u$  в виде  $u = Y_1 Y_2$ , где  $Y_1 = y_1 y_2 \dots y_{i-1}$  и  $Y_2 = y_i y_{i+1} \dots y_h$ . Из соотношения (2.2) следует, что

$$\frac{S_1^1 - 1}{S_1^0} \leq \frac{p_{i-1} - 1}{q_{i-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_i - 1}{q_i} \leq \frac{S_2^1 - 1}{S_2^0}.$$

Поэтому

$$\frac{S_1^1 - 1}{S_1^0} \leq \frac{p_{h+1} - 1}{q_{h+1}} \leq \frac{S_2^1 - 1}{S_2^0}.$$

Следовательно, конъюнкцию трех формул  $Y_1$ ,  $u_{h+1}$ ,  $Y_2$  следует записать в виде  $u' = Y_1 u_{h+1} Y_2$ . Таким образом теорема доказана. Так как конъюнкция и дизъюнкция двойственны, без доказательства приведем соответствующие лемму и теорему для дизъюнкции.

**Л е м м а 2.** Если задана дизъюнкция некоторых формул и выполняется соотношение

$$\frac{q_1 - 1}{p_1} \leq \frac{q_2 - 1}{p_2} \leq \dots \leq \frac{q_h - 1}{p_h}, \quad (2.3)$$

справедливо неравенство

$$\frac{q_1 - 1}{p_1} \leq \frac{S^0 - 1}{S^1} \leq \frac{q_h - 1}{p_h}. \quad (2.4)$$

**Т е о р е м а 2.** Если выполняется соотношение (2.3), минимальное число путей в ЛБГ достигается при записи дизъюнкции в виде  $u = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_h$ .

Рассмотрим следствия этих теорем.

**С л е д с т в и е 1.** Если задана конъюнкция [дизъюнкция] некоторых формул, число единичных (нулевых) путей в соответствующем ЛБГ не зависит от взаимного

расположения этих формул, а оптимизация числа путей достигается за счет оптимизации только нулевых (единичных) путей.

**С л е д с т в и е 2.** Соотношение (2.1) [(2.3)] является также критерием для определения минимального числа нулевых [единичных] путей в ЛБГ, соответствующем конъюнкции [дизъюнкции].

**С л е д с т в и е 3.** Пусть  $y_i = x_i$ . При этом  $p_i = q_i = 1$ . Так как

$$\frac{p_i - 1}{q_i} = \frac{q_i - 1}{p_i} = 0, \quad a \frac{p_j - 1}{q_j} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{q_j - 1}{p_j} > 0,$$

то одиночная буква всегда должна располагаться в первой формуле.

**С л е д с т в и е 4.** Так как неповторные пороговые формулы строятся путем соединения операциями И и ИЛИ только одиночных букв, следствие 3 указывает оптимальный порядок записи этого класса формул.

**С л е д с т в и е 5.** Если реализуемая формула ДНФ (КНФ) [2], причем ранг  $i$ -й конъюнкции (дизъюнкции) равен  $k_i$ , то так как  $p_i = 1$  ( $p_i = k_i$ ),  $q_i = k_i$  ( $q_i = 1$ ), соотношения (2.1) и (2.3) приобретают вид  $k_1 - 1 \leq k_2 - 1 \leq \dots \leq k_h - 1$  (при этом  $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_h$ ).

**С в о й с т в о 1.** Если заданная формула имеет вид  $y = y_1 y_2 \dots y_h$ , то  $S^1 = p_1 p_2 \dots p_h$ ,  $S^0 = q_1 + p_1 (q_2 + p_2 (q_4 + \dots + p_{h-2} (q_{h-1} + p_{h-1} q_h) \dots))$ .

**С в о й с т в о 2.** Если заданная формула имеет вид  $y = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_h$ , то  $S^1 = p_1 + q_1 (p_2 + q_2 (p_3 + \dots + q_{h-2} (p_{h-1} + q_{h-1} p_h) \dots))$ ,  $S^0 = q_1 q_2 \dots q_h$ .

Процедура оптимизации числа путей в ЛБГ состоит из следующих этапов.

1. Для заданной ББФ строится древовидная схема из элементов И и ИЛИ, в которой число входов каждого элемента равно числу букв в реализуемой этим фрагментом дизъюнкции или конъюнкции. Построенная для данной формулы схема является единственной и минимальной по числу элементов.

2. Элементы схемы от входов к выходу ранжируются по ярусам так, что если к рассматриваемому элементу подключены выходы двух элементов, находящихся в ярусах  $i$  и  $j$ , причем  $i \geq j$ , то рассматриваемый элемент считается принадлежащим  $(i + 1)$ -му ярусу.

3. Выходы элементов каждого яруса, начиная с первого, помечаются слева направо символами  $y_l$ .

4. Для каждого элемента схемы, начиная с первого ( $l = 1$ ), записывается формула (конъюнкция или дизъюнкция), которую он реализует.

5. Для каждой формулы, реализуемой элементом, начиная с первой, определяется оптимальный порядок ее записи с помощью соотношений, приведенных в формулировках теорем и следствий 3—5. Осуществляется перестановка фрагментов формулы в найденном порядке и вычисляется число единичных и нулевых путей в соответствующем ЛБГ с помощью соотношений, приведенных в свойствах.

6. Оптимизированная запись формулы в целом осуществляется путем подстановки формул элементов, полученных с учетом перестановок, начиная с формулы выходного элемента схемы.

7. Для оптимизированной формулы строится ЛБГ.

**З а м е ч а н и е.** Изложенная процедура оптимизации числа путей минимизирует также число единичных и нулевых путей в отдельности, а также суммарную длину путей. Кроме того, минимизируется число точек объединения ребер в ЛБГ, а также номенклатура меток в соответствующей бинарной программе (БП).

**П р и м е р 4.** Построить ЛБГ, содержащий минимальное число путей, для ББФ, рассмотренной в примере 2. На рис. 1 приведена схема, соответствующая этой формуле, где элементы ранжированы и помечены (этапы 1—3 процедуры). Запишем для каждого элемента соответствующую формулу (этап 4) и выполним вычисления, указанные в этапе 5

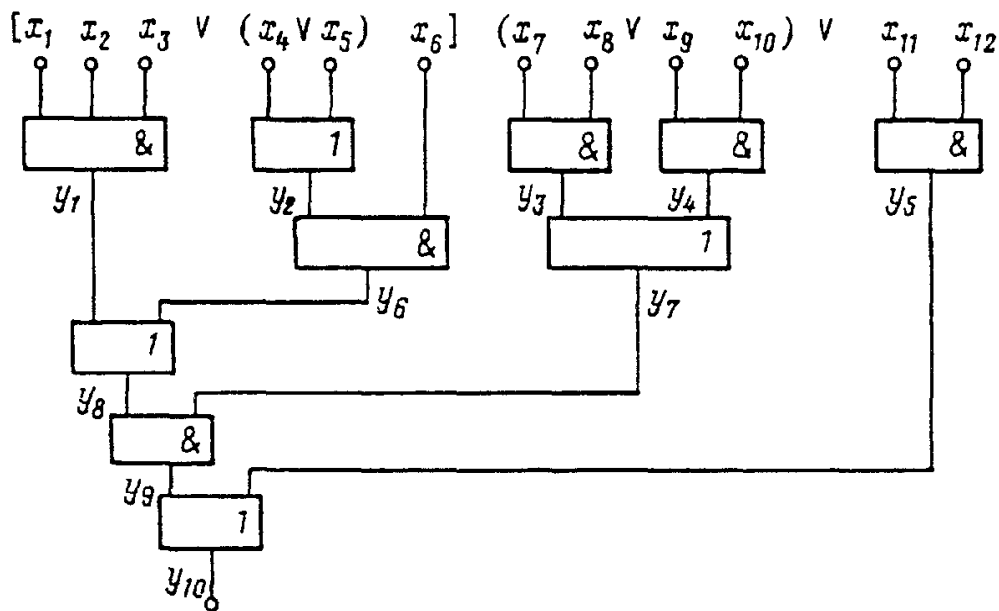


Рис. 1

- 1)  $y_1 = x_1 x_2 x_3$ ,  $p_1 = 1$ ,  $q_1 = 3$ ;
- 2)  $y_2 = x_4 \vee x_5$ ,  $p_2 = 2$ ,  $q_2 = 1$ ;
- 3)  $y_3 = x_7 x_8$ ,  $p_3 = 1$ ,  $q_3 = 2$ ;
- 4)  $y_4 = x_9 x_{10}$ ,  $p_4 = 1$ ,  $q_4 = 2$ ;
- 5)  $y_5 = x_{11} x_{12}$ ,  $p_5 = 1$ ,  $q_5 = 2$ ;
- 6)  $y_6 = y_2 x_6$ .

Формула — пороговая. Требуется перестановка:  $y_6 = x_6 y_2$ ;  $p_6 = 2$ ,  $q_6 = 2$ .

$$7) y_7 = y_3 \vee y_4.$$

Формула симметрическая. Перестановок не требуется:  $p_7 = p_3 + p_4 q_3 = 3$ ;  $q_7 = q_3 q_4 = 4$ ;

$$8) y_8 = y_1 \vee y_6; \frac{q_1 - 1}{p_1} \not\leq \frac{q_6 - 1}{p_6}.$$

Требуется перестановка формулы:  $y_8 = y_6 \vee y_1$ . При этом  $p_8 = p_6 + p_1 q_6 = 4$ ;  $q_8 = q_6 q_1 = 6$ ;

$$9) y_9 = y_8 y_7; \frac{p_8 - 1}{q_8} \leq \frac{p_7 - 1}{q_7}.$$

Перестановка не требуется. При этом  $p_9 = p_8 p_7 = 12$ ,  $q_9 = q_8 + q_7 p_8 = 22$ ;

$$10) y_{10} = y_9 \vee y_5; \frac{q_9 - 1}{p_9} \not\leq \frac{q_5 - 1}{p_5}.$$

Требуется перестановка:  $y_{10} = y_5 \vee y_9$ . При этом  $p_{10} = p_5 + p_9 q_5 = 25$ ;  $q_{10} = q_5 q_6 = 44$ . Таким образом  $S^1 = 25$ ,  $S^0 = 44$ ,  $S = 69$ .

Построим оптимизированную формулу (этап б):  $y = y_{10} = y_5 \vee y_9 = x_{11} x_{12} \vee y_8 y_1 = x_{11} x_{12} \vee (y_6 \vee y_1) (y_3 \vee y_4) = x_{11} x_{12} \vee (x_6 y_2 \vee x_1 x_2 x_3) (x_7 x_8 \vee x_9 x_{10}) =$

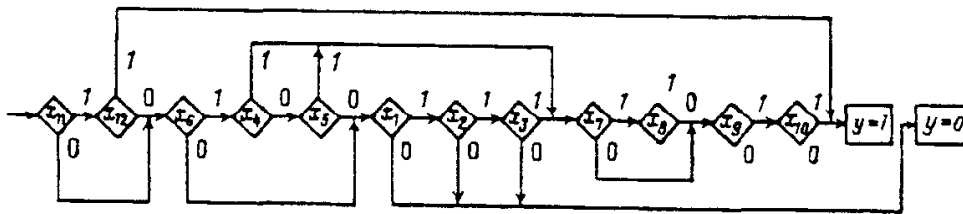


Рис. 2

$= x_{11}x_{12} \vee [x_6(x_4 \vee x_5) \vee x_1x_2x_3](x_7x_8 \vee x_9x_{10})$ . ЛБГ этой формулы приведен на рис. 2 (этап 7). Для исходной формулы  $S = 132$ .

3. Расширение области использования предлагаемого метода. Построение ЛБГ для ББФ оптимально. Использование ЛБГ для повторных формул (ПФ) обладает наряду с достоинствами и рядом недостатков. К достоинствам можно отнести малую трудоемкость построения и отсутствие необходимости линеаризации при построении БП в базисе одноадресных условных переходов [1]. Недостатки состоят в следующем.

Во-первых, в ЛБГ ПФ на одном пути может быть многократная проверка одних и тех же переменных. Поэтому если их предварительно не записывать в оперативную память, то за время прохождения такого пути значение переменной может измениться и становится неясно, на каком наборе переменных значение формулы вычислено. Это явление может быть названо «риском» в ЛБГ. Во-вторых, в ЛБГ ПФ число путей может превышать величину  $2^n$ , где  $n$  — число переменных в формуле, что нерационально для тестирования. В-третьих, число вершин в ЛБГ ПФ обычно не минимально. Этих недостатков лишены метод каскадов [4] и канонический метод [5], которые, однако, весьма трудоемки и требуют линеаризации БГ, в ходе которой в управляющем графе в большинстве случаев появляются вершины, соответствующие командам безусловного перехода. Применение этих методов наиболее рационально для недекомпозибельных формул.

Существуют, однако, классы формул, для которых эффективно совместное применение БГ и ЛБГ с целью использования достоинств обоих подходов. Если в ПФ имеются неповторяющиеся фрагменты, то они реализуются модифицированным формульным методом [1], а для оптимизации числа путей в них используется предлагаемый в настоящей работе метод.

Пример 5. Реализовать формулу

$$y = (x_1x_2 \vee x_3) \bar{x}_4 \vee x_4(x_5 \vee x_6)x_7;$$

1) выделяем неповторяющиеся фрагменты  $z_1 = (x_1x_2 \vee x_3)$  и  $z_2 = (x_5 \vee x_6)x_7$ ;

2) с помощью предлагаемого метода оптимизируем эти формулы:  $z_1 = x_3 \vee x_1x_2$ ;  $z_2 = x_7(x_5 \vee x_6)$ ;

3) реализуем  $z_1$  и  $z_2$  с помощью ЛБГ;

4) реализуем методом каскадов ПФ  $y = z_1\bar{x}_4 \vee x_4z_2$ ;

5) подставим в БГ вместо вершин с пометками  $z_1$  и  $z_2$  соответствующие ЛБГ.

Подсчитаем число путей в графе [Г], учитывая, что для  $z_1$ ,  $z_2$  и  $x_4$  число единичных и нулевых путей соответственно равны  $p_1 = q_1 = 2$ ;  $p_2 = q_2 = 2$ ;  $p_4 = q_4 = 1$ . Подсчет осуществляется следующим образом:

$$y = \bar{x}_4z_1 \vee x_4z_2 = \bar{x}_4(\bar{z}_10 \vee z_11) \vee x_4(\bar{z}_20 \vee z_21),$$

$$S = q_4(q_1 + p_1) + p_4(q_2 + p_2) = 8. \quad (3.1)$$

Для графа, построенного аналогично, но без оптимизации  $p_1 = 3$ ,  $q_1 = 2$ ;  $p_2 = 2$ ,  $q_2 = 3$ ;  $p_4 = q_4 = 1$ . При этом из (3.1) следует, что  $S = 10$ .

Более интересным, с теоретической точки зрения, является случай, когда в



ПФ могут быть выделены повторные независимые фрагменты, а получающаяся в результате формула является ББФ. При этом оптимизация числа путей также обеспечивается предлагаемым методом.

Пример 6. Реализовать формулу  $y = [x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_4x_5] \times (\bar{x}_6x_7 \vee x_6\bar{x}_8)$ ;

1) выделяем независимые повторные фрагменты:  $z_1 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$ ,  $z_2 = \bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_4x_5$ ;  $z_3 = \bar{x}_6x_7 \vee x_6\bar{x}_8$ ; 2) реализуем  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  с помощью соответствующих БГ; 3) определим число единичных и нулевых путей в каждом из них:  $p_1 = 3$ ,  $q_1 = 3$ ,  $p_2 = 2$ ,  $q_2 = 2$ ,  $p_3 = 2$ ,  $q_3 = 2$ ; 4) подставляя  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  в исходную формулу, получим ББФ  $y = (z_1 \vee z_2) z_3$ ; 5) определим для этой формулы оптимальный порядок ее записи на основе теорем 1 и 2

$$a) \frac{2}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{q_1-1}{p_1} \not\leq \frac{q_2-1}{p_2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2};$$

преобразовываем формулу:  $y = (z_2 \vee z_1) z_3$ ; б) определяем число единичных и нулевых путей для фрагмента  $\varphi_{2,1} = z_2 \vee z_1 = z_2 \vee \bar{z}_2 z_1$ ;  $\bar{\varphi}_{2,1} = \bar{z}_2 \bar{z}_1$ . При этом  $p_{2,1} = p_2 + q_2 p_1 = 2 + 2 \cdot 3 = 8$ ;  $q_{2,1} = q_2 q_1 = 2 \cdot 3 = 6$ ;

$$b) \frac{7}{6} = \frac{8-1}{6} = \frac{p_{2,1}-1}{q_{2,1}} \not\leq \frac{p_3-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Преобразовываем формулу:  $y = z_3(z_2 \vee z_1)$ ; б) реализуем преобразованную формулу ЛБГ; 7) подставим вместо вершин ЛБГ с пометками  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  соответствующие БГ. Подсчитаем число путей в графе:

$$y = z_3(z_2 \vee z_1) = \bar{z}_3 0 \vee z_3(z_2 \vee z_1) = \bar{z}_3 0 \vee z_3(\bar{z}_2 z_1 \vee z_2 1) = \\ = \bar{z}_3 0 \vee z_3(\bar{z}_2(\bar{z}_1 0 \vee z_1 1) \vee z_2 1);$$

$$S = q_3 + p_3(q_2(q_1 + p_1) + p_2) = 2 + 2(2(3 + 3) + 2) = 30.$$

Для графа, построенного аналогично, но без оптимизации

$$y = (z_1 \vee z_2) z_3 = \bar{z}_1(z_2 z_3) \vee z_1 z_3 = \bar{z}_1(\bar{z}_2 0 \vee z_2 z_3) \vee z_1(\bar{z}_3 0 \vee z_3 1) = \\ = \bar{z}_1(\bar{z}_2 0 \vee z_2(\bar{z}_3 0 \vee z_3 1)) \vee z_1(\bar{z}_3 0 \vee z_3 1);$$

$$S = q_1(q_2 + p_2(q_3 + p_3)) + p_1(q_3 + p_3) = 3(2 + 2(2 + 2)) + 3(2 + 2) = 42.$$

Необходимо отметить, что совместное использование БГ и ЛБГ резко снижает размерность задач, решаемых методом каскадов или каноническим методом, что существенно расширяет возможность их применения и поиска оптимальных решений. При этом упрощается также решение задачи линеаризации.

Заключение. В настоящей работе и в [1, 3] рассматривались вопросы реализации одной булевой формулы. Однако обычно на практике необходимо реализовать системы булевых формул (СБФ). Поясним причины, по которым в этих работах столь большое внимание уделяется реализации отдельных формул.

Авторами предлагается все алгоритмы, описываемые СБФ, разделить на два класса: алгоритмы, которые не могут изменяться в ходе проектирования, настройки и эксплуатации, и алгоритмы, которые неоднократно меняются на различных этапах «жизни» системы управления (контроля). К первому классу относятся, например, такие алгоритмы, как преобразование двоичного кода в код Грея, преобразование двоичного кода в код управления семи- или десяти- сегментным индикатором и т. д. Алгоритмы логического управления технологическим оборудованием обычно относятся ко второму классу.

Различные классы алгоритмов могут допускать разные подходы к их

реализации. Для первого класса такой критерий, как модификационная способность, отсутствует, и поэтому важнейшими являются критерии, связанные с оптимизацией ресурсов. Для второго класса алгоритмов в большинстве случаев требование возможности безошибочного внесения изменений, в том числе и в условиях объекта управления, выходит на первый план. Для первого класса алгоритмов целесообразна совместная реализация СБФ [4, 6, 7], а для второй разновидности наиболее рационально каждую формулу реализовать оптимально и последовательно выполнить каждую из них [8].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Б. П., Шалыто А. А. Реализация булевых формул линейными бинарными графами. I. Синтез и анализ//Изв. РАН. Техн. кибернетика, 1969. № 5.
2. Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А. Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.
3. Кузнецов Б. П., Шалыто А. А. Реализация булевых формул линейными бинарными графами. II. Оценка числа и суммарной длины путей//Изв. РАН. Теория и система управления. 1995. № 3.
4. Кузнецов О. П. О программной реализации логических функций и автоматов//АиТ. 1977. № 7.
5. Блох А. Ш. Граф-схемы и их применение. Минск: Высшейш. шк. 1975.
6. Рубинов В. И., Шалыто А. А. Метод построения граф-схем простых бинарных программ для систем булевых функций//Автоматика и вычисл. техника. 1986. № 4.
7. Кузнецов Б. П. Структурирование бинарных программ//Вопросы судостроения сер. «Судовая автоматика». ЦНИИ «Румб». 1983. Вып. 29.
8. Артюхов В. Л., Рубинов В. И., Шалыто А. А. Метод построения обобщенных бинарных программ для системы булевых функций//Вопросы судостроения, сер. «Судовая автоматика». ЦНИИ «Румб». 1982. Вып. 27.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
10.I.1994

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ISSN 0002-3388

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

**Т**ЕОРИЯ И

**С**ИСТЕМЫ  
**У**ПРАВЛЕНИЯ



1995

5