ТЕОРИЯ
И СИСТЕМЫ
УПРАВЛЕНИЯ
№ 3 • 1995

УДК 681.3.06:62-507

© 1995 г. Б. П. КУЗНЕЦОВ, А. А. ШАЛЫТО

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ ЛИНЕЙНЫМИ БИНАРНЫМИ ГРАФАМИ. II. ОЦЕНКИ ЧИСЛА И СУММАРНОЙ ДЛИНЫ ПУТЕЙ

Получены оценки числа и суммарной длины путей в линейных бинарных графах, реализующих булевы формулы. Оценки характеризуют логическую сложность соответствующих бинарных программ.

Введение. В [1] были рассмотрены вопросы анализа и синтеза линейных бинарных графов (ЛБГ), реализующих булевы формулы (БФ) в базисе И, ИЛИ, НЕ. В силу того, что повторная БФ в указанном базисе может быть получена за счет переобозначения переменных из бесповторной БФ (ББФ), имеющей ту же структуру (арифметический полином [2]), то в дальнейшем рассматривается лишь класс ББФ. Из сказанного следует, что анализ класса ББФ дает представление о структуре произвольных в указанном базисе формул. В [1] было показано, что важнейшими параметрами ЛБГ, характеризующими их логическую сложность, являются число и суммарная длина путей. Однако количественные оценки этих показателей не рассматривались. Настоящая работа призвана восполнить указанный пробел.

1. Оценки числа и суммарной длины путей в ЛБГ. Определим первоначально рекуррентные соотношения для подсчета этих показателей. Пусть задан ЛБГ, соответствующий некоторой формуле. Дуги, соединяющие соседние вершины, будем называть основными, а дуги, осуществляющие связь условных вершин с операторными (шинами),— выходами, остальные дуги будем называть переходами.

Правым подграфом ЛБГ относительно заданной вершины будем называть подграф, включающий данную вершину и все вершины, размещенные правее ее со всеми дугами (переходами, выходами), исходящими из вершин, образующих подграф. Правый подграф ЛБГ относительно i-й вершины будем в дальнейшем именовать i-подграфом.

Длиной перехода будем называть число вершин, размещенных между вершинами, инцидентными переходу. Длину «выхода» считаем равной нулю. Длину перехода (выхода) из i-й вершины ЛБГ обозначим b_i. Число путей и их суммарную длину в i-подграфе обозначим S_i и L_i соответственно. Определим выражения для вычисления S_i и L_i. В h-подграфе имеется одна вершина с двумя выходами, поэтому $S_h = 2$, $L_h = 2$; в $(h-1)$-м подграфе — две вершины и три выхода, поэтому число путей в нем на один больше, чем в h-подграфе, а суммарная длина путей больше на три. При этом $S_{h-1} = 3$, $L_{h-1} = 5$.

Рассмотрим i-подграф, считая, что все j-подграфы $(j > i)$ уже рассмотрены и для них определены S_j и L_j. Из i-й вершины исходят две дуги, соединяющие ее с крайней слева вершиной $(i+1)$-подграфа и с крайней слева вершиной $(i + a_i)$-подграфа (с шиной при $a_i = 0$), где $a_i = b_i + 1$ при $b_i > 0$ и $a_i = 0$ при $b_i = 0$. Величина a_i позволяет определить номер вершины, связанной по переходу с i-й вершиной. Через i-ю вершину проходят S_{i+1} путей в $(i+1)$-подграф и

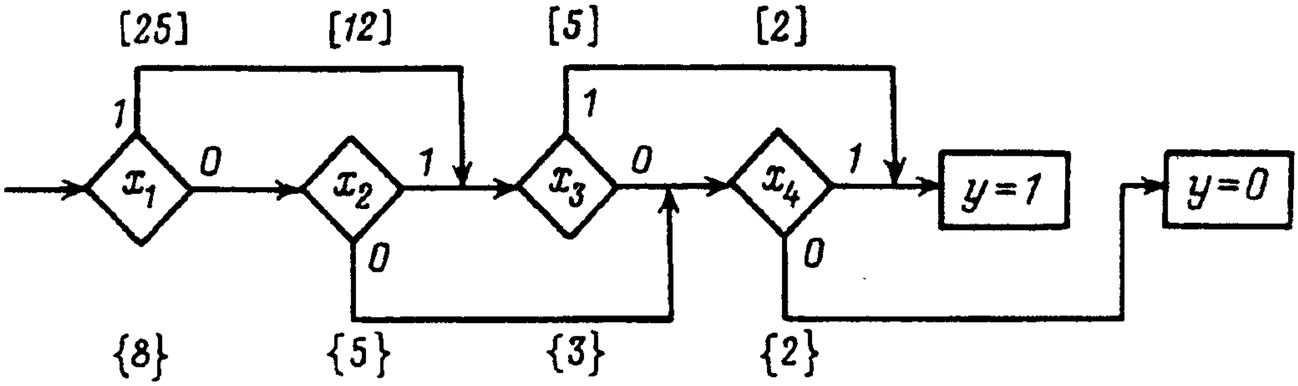

Рис. 1

S_{i+a_i} путей (один путь при $a_i = 0$) в $(i + a_i)$-подграф (на выход при $a_i = 0$). Следовательно, имеет место соотношение

$$S_i = \begin{cases} S_{i+1} + S_{i+a_i} & \text{при} \quad a_i > 0; \\ S_{i+1} + 1 & \text{при} \quad a_i = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $0 \le i \le h$, $S_h = 2$.

Суммарная длина путей i-подграфа включает в себя суммарную длину путей $(i + 1)$-подграфа, увеличенную на величину S_{i+1} (за счет увеличения на единицу каждого пути через $(i + 1)$-подграф, а также при наличии перехода $(a_i > 0)$ суммарную длину путей $(i + a_i)$-подграфа, увеличенную на величину S_{i+a_i} (за счет увеличения на единицу каждого пути через $(i + a_i)$-подграф), а при его отсутствии $(a_i = 0)$ — единицу. Таким образом справедливо соотношение

$$L_i = \begin{cases} (L_{i+1} + S_{i+1}) + (L_{i+a_i} + S_{i+a_i}) & \text{при} \quad a_i > 0; \\ L_{i+1} + S_{i+1} + 1 & \text{при} \quad a_i = 0. \end{cases}$$

Учитывая (1.1), эти соотношения приобретают вид

$$L_i = \begin{cases} S_i + L_{i+1} + L_{i+a_i} & \text{при} \quad a_i > 0; \\ S_{i+1} + L_{i+1} + 1 & \text{при} \quad a_i = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $0 < i < h - 1$, $L_h = 2$.

На рис. 1 приведены значения S_i и L_i, вычисленные по формулам (1.1) и (1.2) для ЛБГ, соответствующего формуле $y = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_4$. При этом $h = 4$, $S_4 = L_4 = 2$. Из вершины x_3 нет перехода $(a_3 = 0)$, поэтому $S_3 = S_4 + 1 = 3$, $L_3 = S_4 + L_4 + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$. Из вершины x_2 есть переход на вершину x_4 $(b_2 = 1,\ a_2 = 2)$, и поэтому $S_2 = S_3 + S_4 = 3 + 2 = 5$, $L_2 = S_2 + L_3 + L_4 = 5 + 5 + 2 = 12$. Из вершины x_1 есть переход на вершину x_3 $(b_1 = 1,\ a_1 = 2)$, поэтому $S_1 = S_2 + S_3 = 8$, $L_1 = S_1 + L_2 + L_3 = 25$. Таким образом $S = S_1 = 8$; $L = L_1 = 25$. Перейдем к получению искомых оценок.

Нижние оценки числа и суммарной длины путей в ЛБГ достигаются в ЛБГ, в которых один выход каждой условной вершины (кроме последней) соединен с одной из шин, а второй — соседней условной вершиной. Последняя условная вершина соединена с каждой из шин. Поэтому число путей равно $h + 1$, что является нижней оценкой этой величины: $S_н = h + 1$.

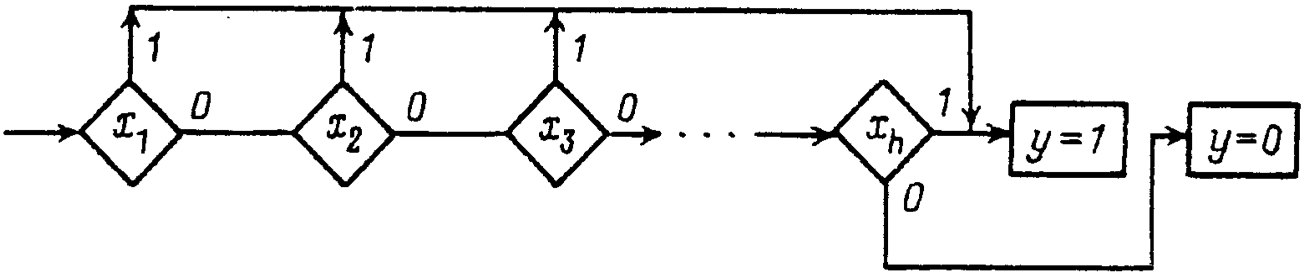

Рис. 2

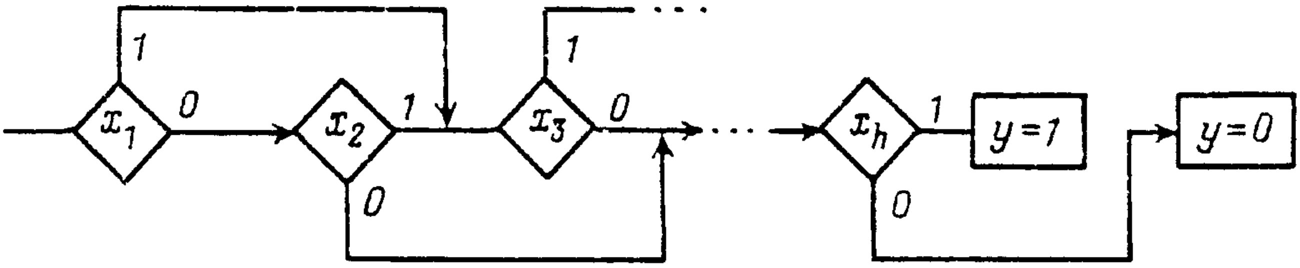

Рис. 3

Определим нижнюю оценку суммарной длины путей. Она достигается в ЛБГ того же класса. Из ЛБГ (рис. 2) следует, что

$$L_{\text{н}} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (h-1) + h + h = \left(\sum_{i=1}^{h+1} i\right) - 1 =$$

$$= \frac{(h+2)(h+1)}{2} - 1 = \frac{1}{2}(h+3).$$

Эта оценка совпадает с оценкой длины внешних путей, получаемой для того же графа, представленного в виде бинарного дерева [3].

Верхние оценки рассматриваемых характеристик достигаются в ЛБГ, у которых, согласно выражениям (1.1) и (1.2), все вершины (кроме двух справа) имеют переходы минимальной длины, равное единице ($b_i = 1$, $a_i = 2$, $i = 1, \ldots, h-2$) (рис. 3). Определим формулу для определения числа путей в таких ЛБГ. При этом из (1.1) получим

$$S_i = S_{i-1} + S_{i+2}. \tag{1.3}$$

В таких ЛБГ число путей, проходящих через i-ю вершину, равно максимальному числу путей в ЛБГ, содержащем $h - (i-1)$ условных вершин. Учитывая это, введем следующее обозначение: $S_i = S_{\text{в}}(h - (i-1))$. Из (1.3) следует, что $S_{\text{в}}(h - (i-1)) = S_{\text{в}}(h-i) + S_{\text{в}}(h-(i+1))$. При $i = 1$ $S_{\text{в}}(h) = S_{\text{в}}(h-1) + S_{\text{в}}(h-2)$. В силу того, что $S_{\text{в}}(1) = 2$, $S_{\text{в}}(2) = 3$, то

$$S_{\text{в}}(h) = \Phi_{h+2}, \tag{1.4}$$

где Φ_{h+2} – $(h+2)$-е число Фибоначчи [4]. Обратим внимание на то, что при $h > 1$ $S_{\text{в}}(h) < 2^h$.

Перейдем к определению суммарного числа путей в рассматриваемом случае. При этом из (1.3) получим $L_i = S_i + L_{i+1} + L_{i+2}$. Обозначим $L_i = L_{\text{в}}(h - (i-1))$. Тогда $L_{\text{в}}(h-(i-1)) = S_{\text{в}}(h-(i-1)) + L_{\text{в}}(h-i) + L_{\text{в}}(h-(i+1))$. При $i = 1$ $L_{\text{в}}(h) = S_{\text{в}}(h) + L_{\text{в}}(h-1) + L_{\text{в}}(h-2) = \Phi_{h+2} + L_{\text{в}}(h-1) + L_{\text{в}}(h-2) = \Phi_{h+2} + \Phi_{h+3} + 2L_{\text{в}}(h-2) + L_{\text{в}}(h-3) = 1\Phi_{h+2} + 1\Phi_{h+3} + 2\Phi_{h+4} + 3L_{\text{в}}(h-3) + 2L_{\text{в}} \times$

$\times\ (h-4) = 1\Phi_{h+2} + 1\Phi_{h+3} + 2\Phi_{h+4} + 3\Phi_{h+5} + 5L_в(h-4) + 3L_в(h-5) = \dots$

$\dots = \Phi_1\Phi_{h+2} + \Phi_2\Phi_{h+3} + \dots + \Phi_i\Phi_{h+3-i} + \dots + \Phi_h\Phi_3 = \sum_{i=1}^{h}\Phi_i\Phi_{h-i+3}.$

Известно [5], что

$$\sum_{i=0}^{n}\Phi_i\Phi_{n-i} = \frac{n-1}{5}\Phi_n + \frac{2n}{5}\Phi_{n-1}. \tag{1.5}$$

Так как $\Phi_0 = 0$, то

$$\sum_{i=0}^{n}\Phi_i\Phi_{n-i} = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i\Phi_{n-i}.$$

Пусть $n = h+3$, тогда

$$\sum_{i=1}^{h+3}\Phi_i\Phi_{h+3-i} = \Phi_{h+3}\Phi_0 + \Phi_{h+2}\Phi_1 + \Phi_{h+1}\Phi_2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{h}\Phi_i\Phi_{h+3-i} = \Phi_{h+3} + \sum_{i=1}^{h}\Phi_i\Phi_{h+3-i}.$$

Поэтому

$$L_в(h) = \sum_{i=1}^{h}\Phi_i\Phi_{h+3-i} = \left(\sum_{i=1}^{h+3}\Phi_i\Phi_{h+3-i}\right) - \Phi_{h+3}.$$

Используя соотношение (5), получим

$$L_в(h) = \frac{h+2}{5}\Phi_{h+3} + \frac{2(h+3)}{5}\Phi_{h+2} - \Phi_{h+3} =$$

$$= 1/5\,((h-3)\Phi_{h+3} + 2(h+3)\Phi_{h+2}).$$

Так как $\Phi_{h+2} = \Phi_{h+1} + \Phi_h$; $\Phi_{h+3} = 2\Phi_{h+1} + \Phi_h$, то $L_в(h) = 1/5\,(4h\Phi_{h+1} + 3(h+1)\Phi_h)$. Таким образом

$$\boxed{h+1 \le S(h) \le \Phi_{h+2};}\quad 1/2\,h(h+3) \le L(h) \le 1/5\,(4h\Phi_{h+1} + 3(h+1)\Phi_h). \tag{1.6}$$

В табл. 1 приведены значения Φ_h, $S_н$, $S_в$, $L_н$, $L_в$ при $h = 1 \dots 14$. Так как

$$\Phi_h = \frac{\alpha^h - \beta^h}{\sqrt{5}};\quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618;\quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\quad \Phi_n \approx \left]\frac{\alpha^h}{\sqrt{5}}\right[,$$

а при $h \to \infty$, $\Phi_{h+1} = \alpha\Phi_h$, то

$$L_в(h) \approx 1/5\,(4h\ 1.618\Phi_h + 3(h+1)\Phi_h) = \frac{9.742}{5}h\Phi_h \approx 2h\Phi_h.$$

Из последнего соотношения следует, что при $h > 10$ $L_в < 2^h$.

Поведение относительных показателей описывается следующими соотношениями:

$$l_{ср.н} = \frac{L_н}{S_н} = \frac{0.5h(h+3)}{h+1} = 1/2\left(h + \frac{2h}{h+1}\right);\quad l_{ср.в} = \frac{L_в}{S_в} \approx \frac{2h\Phi_h}{\Phi_{h+2}} \approx 0{,}74h;$$

$$\Delta_1 = \frac{S_в}{S_н} = \frac{\Phi_{h+2}}{h+1} = \frac{]\alpha^{h+2}[}{h+1} \approx 1.17\frac{(1.618)^h}{h+1}; \tag{1.7}$$

$$\Delta_2 = \frac{L_в}{L_н} \approx \frac{2h\Phi_h}{0.5h(h+3)} \approx 1.79\frac{(1.618)^h}{h+3}. \tag{1.8}$$

Таблица 1

Число и суммарная длина путей в ЛБГ

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Φ_h	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
$S_н$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$S_в$	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987
$L_н$	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104	119
$L_в$	2	5	12	25	50	96	180	331	600	1075	1908	3360	5878	10255

2. Анализ верхних и нижних оценок сложности. В [6] было показано, что изменение порядка записи формул влияет на величину среднего времени вычисления бинарной программы. При этом усреднение осуществляется по всем наборам входных переменных. Аналогичный эффект имеет место и для числа и суммарной длины путей — изменение порядка записи формулы влияет на значения показателей. Наиболее ярко это проявляется для класса знакопеременных бесповторных пороговых формул (ЗБПФ). (Отметим, что в дальнейшем для определенности рассматриваются только положительно монотонные ЗБПФ.)

Этот класс формул можно разделить на два подкласса — формулы, в которых последняя операция — ИЛИ, и формулы с последней операцией И. Первая разновидность формул имеет вид

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_h) &= (\ldots(x_1x_2 \vee x_3)\,x_4 \vee x_5)\,x_6 \vee \ldots)\,x_{h-1} \vee x_h \quad \text{при} \quad h = 2r+1; \\ f_2(x_1, \ldots, x_h) &= (\ldots(x_1 \vee x_2)\,x_3 \vee x_4)\,x_5 \vee \ldots)\,x_{h-1} \vee x_h \quad \text{при} \quad h = 2r, \end{aligned} \tag{2.1}$$

а вторая

$$\begin{aligned} f_3(x_1, \ldots, x_h) &= (\ldots(x_1 \vee x_2)\,x_3 \vee x_4)\,x_5 \ldots \vee x_{h-1})\,x_h \quad \text{при} \quad h = 2r+1; \\ f_4(x_1, \ldots, x_h) &= (\ldots(x_1x_2 \vee x_3)\,x_4 \vee x_5 \ldots \vee x_{h-1})\,x_h \quad \text{при} \quad h = 2r. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Для любой из формул, принадлежащих классу ЗБПФ, имеет место удивительный факт: для ЛБГ, построенного при порядке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_h$, достигаются верхние оценки в (1.6), а для ЛБГ, построенного при обратном порядке переменных $x_h, x_{h-1}, \ldots, x_1$,— нижняя. Это подтверждает возможность оптимизации числа и суммарной длины путей за счет изменения порядка записи формулы. Достигаемый эффект оптимизации максимален для класса ЗБПФ и определяется соотношениями (1.7) и (1.8). Из этих соотношений и табл. 1 следует, что если при $h=8$ $\Delta_1 > 6$, $\Delta_2 > 7$, то при $h=14$ $\Delta_1 > 65$, $\Delta_2 > 86$. Следовательно, неоптимальный порядок записи формулы может привести к резкому усложнению ЛБГ по рассматриваемым показателям, что затрудняет их тестирование [1].

3. Свойства ЛБГ бесповторных пороговых формул. В [1] было показано, что в ЛБГ положительно монотонных бесповторных пороговых формул (ПМБПФ), переменные которых расположены в порядке неубывания весов, величина i-й пометки по Акерсу равна весу p_i i-й переменной, а число нулевых путей равно порогу T. Необходимо отметить, что при этом порядке переменных число путей в ЛБГ максимально.

Пусть ПМБПФ $f_\&$, для которых последняя операция — И, имеет пороговую структуру $p_1, p_2, \ldots, p_h$; T. Формула $f_\&^d$, двойственная $f_\&$, имеет структуру [7]

$$p_1, p_2, \ldots, p_h; \quad \sum_{i=1}^{h} p_i - T + 1.$$

ПМБПФ $f_\vee$, последняя операция которой — ИЛИ, с весами $p_1, p_2, \ldots, p_h$ имеет порог, равный p_h. Так как $f_\&^d = f_\vee$, то

$$\sum_{i=1}^{h} p_i - T + 1 = p_h; \quad T = 1 + \sum_{i=1}^{h-1} p_i.$$

Таким образом ПМБПФ $f_\&$ имеет структуру

$$p_1, p_2, \ldots, p_h; \quad 1 + \sum_{i=1}^{h-1} p_i.$$

Для ЛБГ ПМБПФ $f_\vee$

$$S^0 = T = p_h; \quad S^1 = \sum_{i=k}^{k} p_i; \quad S = p_h + \sum_{i=k}^{h} p_i,$$

где K — порядковый номер переменной, следующей за последней конъюнкцией. Например, для $y = (x_1 \vee x_2)\, x_3 x_4 \vee x_5$ $k = 4$. Для ЛБГ ПМБПФ $f_\&$

$$S^0 = T = 1 + \sum_{i=1}^{h-1} p_i; \quad S^1 = p_h; \quad S = 1 + \sum_{i=1}^{h} p_i.$$

Среди формул рассматриваемого класса положительно монотонные ЗБПФ обладают максимальными весами переменных. При этом [8, 9]

$$p_i = \Phi_i; \quad \sum_{i=1}^{h} p_i = \Phi_{h+2} - 1.$$

Для ЗБПФ (2.1)

$$S^0 = T = p_h = \Phi_h; \quad S^1 = \Phi_{h+1}; \quad S = \Phi_{h+2}; \quad T + \sum_{i=1}^{h} p_i = \Phi_{h+2} + \Phi_h - 1.$$

Для ЗБПФ (2.2)

$$S^0 = T = \Phi_{h+1}; \quad S^1 = \Phi_h; \quad S = \Phi_{h+2}; \quad T + \sum_{i=1}^{h} p_i = \Phi_{h+3} - 1.$$

4. Число путей в ЛБГ, реализующих инвариантные ББФ. Верхняя оценка числа путей, равная Φ_{h+2}, является неулучшаемой для класса произвольных ЛБГ. В силу того, что она достигается для формул, изменение порядка записи которых приводит к получению нижней оценки, то вопрос о нахождении для класса ББФ неулучшаемой верхней оценки числа путей в ЛБГ остается открытым.

Определим такой класс ББФ, для которого любая допустимая перестановка подформул не изменяет числа путей в ЛБГ. Такие формулы будем называть инвариантными, а верхняя оценка числа путей в их ЛБГ может быть неулучшаемая верхняя оценка для ЛБГ оптимально построенных формул. Инвариантной назовем ББФ, в которой любая допустимая перестановка членов не изменяет арифметического полинома. Формула $y = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \vee (x_5 \vee x_6)(x_7 \vee x_8)$ инвариантна, так как при любой перестановке ее полином имеет вид $y = (1 + 1) \times \times (1 + 1) + (1 + 1)\,(1 + 1)$. Формула $y = (x_1 \vee x_2)\, x_3 x_4 \vee (x_5 \vee x_6)\, x_7 x_8$ к этому классу не относится, так как различные перестановки приводят к различным полиномам.

Инвариантной ББФ соответствует древовидная схема из элементов И и ИЛИ, обладающая следующими свойствами: 1) каждая дизъюнкция (конъюнкция) формулы реализуется одним элементом ИЛИ(И); 2) все входные переменные подключены только к входам элементов первого яруса; 3) каждый вход элемента i-го ($i \geq 2$) яруса подключен к выходу соответствующего элемента $(i-1)$-го яруса; 4) все элементы одного яруса одинаковы; 5) элементы соседних ярусов разнотипны. Сформулируем два утверждения.

Утверждение 1. Если в схеме рассматриваемого класса первый ярус состоит из элементов И (ИЛИ), то $S^б = S^0$ ($S^б = S^1$), где $S^б = \max(S^0, S^1)$.

Утверждение 2. Пусть элемент первого яруса имеет «к» входов, а число элементов в этом ярусе равно $m = h/k$, тогда $S^б \le (S^б_k)^m = k^{h/k}$, где $S^б_k = \max(S^0_k, S^1_k) = k$.

Пример 1. Для инвариантной формулы, рассмотренной выше из утверждения 1, следует, что $S^б = S^1$, а из утверждения 2 — $S^1 \le 2^4 = 16$: $S \le 2S^1 = 32$.

Теорема 1. Для ЛБГ, соответствующего инвариантным ББФ из h букв, выполняется неравенство $S \le 2e^{h/e}$.

Доказательство. Так как для любых двух чисел a' и b', где $a' \ge b'$, справедливо $a' + b' \le 2a'$, то выполняется соотношение

$$S = S^0 + S' \le 2S^б.$$

На основании утверждения 2 справедливо неравенство

$$S \le 2S^б \le 2\,(S^б_k)^m = 2k^{h/k}.$$

Обозначим $S_m = 2k^{h/k}$ и определим k, при котором функция S_m максимальна. Для этого найдем производную $k^{h/k}$ по k и приравняем ее нулю

$$(k^{h/k})' = (e^{h/k \ln k})' = e^{h/k \ln k}\left(\frac{h}{k}\ln k\right)' = k^{h/k}\left(-\frac{h}{k^2}\ln k + \frac{h}{k}\cdot\frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{h}{k^2}(1 - \ln k)\,k^{h/k} = h\,(1 - \ln k)\,k^{h/k-2}.$$

Определим значение «k», при котором

$$h\,(1 - \ln k)\,k^{h/k-2} = 0.$$

Таким значением является $k = e$. Следовательно, $S_m = 2e^{h/e}$. Так как $S \le \max S_m$, то $S \le 2e^{h/e}$.

Выше было показано, что $S \le \Phi_{h+2}$. Определим, при каких h справедливо, что $S \le \Phi_{h+2} > 2e^{h/e}$. Это неравенство выполняется при $h > 5.5$. Исходя из этого

$$S \le \begin{cases} \Phi_{h+2} & \text{при} \quad h < 6; \\ 2e^{h/e} & \text{при} \quad h \ge 6. \end{cases}$$

5. Число путей в ЛБГ, реализующих дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (ДНФ и КНФ). Рассмотрим этот вопрос на примере ДНФ, так как для КНФ результаты аналогичны. Представим первоначальную формулу из h букв, являющуюся инвариантной дизъюнкцией подформул из k букв. Для ЛБГ, реализующего эту формулу

$$S^0 = q^{h/k}; \quad S^1 = p + pq + pq^2 + \ldots + pq^{h/k-1} = p\sum_{i=0}^{h/k-1} q^i = \frac{p\,(q^{h/k} - 1)}{q - 1};$$

$$S = S^0 + S^1 = q^{h/k} + \frac{p\,(q^{h/k} - 1)}{q - 1} = \frac{q^{h/k}(p + q - 1) - p}{q - 1},$$

где p (q) — число единичных (нулевых) путей в подформуле из k букв; $q \ge 2$.

Перейдем к рассмотрению ДНФ. При этом $p = 1$. Если $q = 1$, то подсчет числа путей осуществляется по формулам: $S^0 = 1$, $S^1 = h$; $S = h + 1$. Если $q = k \ge 2$, то справедливы соотношения

$$S^0 = k^{h/k}; \quad S^1 = \frac{k^{h/k} - 1}{k - 1}; \quad S = S^0 + S^1 = \frac{k^{h/k+1} - 1}{k - 1}. \tag{5.1}$$

При этом

$$S < \frac{k}{k-1} k^{h/k} < 2k^{h/k} < 2e^{h/e}.$$

Выполняя подстановку различных значений k в (5.1) при фиксированных h, авторами установлено, что максимум S для одних значений h достигается при $k = 2$, а для других h — при $k = 3$, в то время как при иных значениях k максимум не достигается. В силу того, что не при всех h существуют инвариантные ДНФ, то в общем случае ДНФ, которым соответствуют ЛБГ с максимальным S, должны состоять только из конъюнкций ранга 2 и (или) 3.

Рассмотрим этот класс ДНФ. Пусть число конъюнкций ранга 2 равно α_2, а число конъюнкций ранга 3 равно α_3. При этом

$$2\alpha_2 + 3\alpha_3 = h. \tag{5.2}$$

Определим соотношения для подсчета числа путей в ЛБГ, соответствующих формулам этого класса. При этом отметим, что для минимизации числа путей в ЛБГ первыми в ДНФ должна располагаться все конъюнкции ранга 2. Таким образом

$$S^0 = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3}; \tag{5.3}$$

$$S^1 = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{\alpha_2} + 2^{\alpha_2} 3^1 + 2^{\alpha_2} 3^2 + \ldots + 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3 - 1} = \tag{5.4}$$

$$= 2^{\alpha_2 + 1} - 1 + 2^{\alpha_2}\left(\frac{3^{\alpha_3} - 1}{2} - 1\right) = 2^{\alpha_2 - 1}(3^{\alpha_3} + 1) - 1;$$

$$S = S^0 + S^1 = 2^{\alpha_2 - 1}(3^{\alpha_3 + 1} + 1) - 1. \tag{5.5}$$

Из соотношений (5.2) и (5.5) следует, что

$$S = 2^{h/2+1} - 1 \quad \text{при} \quad \alpha_3 = 0; \tag{5.6}$$

$$S = 1/2\,(3^{h/3+1} - 1) \quad \text{при} \quad \alpha_2 = 0; \tag{5.7}$$

$$S = 2^{\alpha_2 - 1}\left(3^{\frac{h - 2\alpha_2 + 3}{3}} + 1\right) - 1. \tag{5.8}$$

При фиксированных h определим значения S, получающиеся путем подстановки значений α_2 и α_3, удовлетворяющих (5.2), и выберем максимальные значения S для каждого h.

П р и м е р 2. Пусть $h = 18$. Соотношение (5.2) выполняется при: 1) $\alpha_2 = 9$, $\alpha_3 = 0$, $S = 1023$; 2) $\alpha_2 = 6$, $\alpha_3 = 2$, $S = 895$; 3) $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, $S = 975$; 4) $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 6$, $S = 1093$.

Таким образом при $h = 18$ самой «плохой» является инвариантная ББФ (ДНФ) с $k = 3$. Результаты выполненного анализа при $2 \le h \le 24$ сведены в табл. 2. Из рассмотрения табл. 2 следует, что при $h = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ самые плохие — инвариантные ДНФ, состоящие только из конъюнкций ранга 2 ($\alpha_3 = 0$). При $h \ge 18$ инвариантные ДНФ рассматриваемого класса состоят только из конъюнкций ранга 3 ($\alpha_2 = 0$). Это следует из того факта, что

$$2^{h/2+1} - 1 > 1/2\,(3^{h/3+1} - 1)$$

при $h < 18$. Анализ табл. 2 показывает также, что при значениях, отличных от четных чисел, перечисленных выше, самые «плохие» ДНФ обладают следующим свойством:

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 0; \\ 1, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 2; \\ 2, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 1. \end{cases} \tag{5.9}$$

Таблица 2

Параметры самых «плохих» ДНФ

h	α_2	α_3	S	h	α_2	α_3	S
2	1	0	3	14	7	0	255
3	0	1	4	15	0	5	364
4	2	0	7	16	8	0	511
5	1	1	9	17	1	5	729
6	3	0	15	18	0	6	1093
7	2	1	18	19	2	5	1459
8	4	0	31	20	1	6	2187
9	0	3	40	21	0	7	3280
10	5	0	63	22	2	6	4375
11	1	3	81	23	1	7	6561
12	6	0	127	24	0	8	9841
13	2	3	163				

Подставляя эти значения α_2 в (5.8), а также учитывая изложенное выше, получим

$$S = \begin{cases} 2^{h/2+1} - 1, & \text{если} \quad h = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16; \\ 1/2\,(3^{h/3+1} - 1), & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 0 \;\text{ и }\; h \neq 6, 12; \\ 3^{\frac{h+1}{3}}, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 2 \;\text{ и }\; h \neq 2, 8, 14; \\ 2\cdot 3^{\frac{h-1}{3}} + 1, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 1 \;\text{ и }\; h \neq 4, 10, 16. \end{cases} \tag{5.10}$$

При этом

$$2\cdot 3^{\frac{h-1}{3}} + 1 < 1/2\cdot 3^{h/3+1} - 1 < 3^{\frac{h+1}{3}}.$$

Таким образом

$$h + 1 \leq S \leq \max\,(2^{h/2+1} - 1,\ 3^{\frac{h+1}{3}}).$$

Определим соотношения для подсчета числа ДНФ из h букв, содержащих только конъюнкции рангов 2 и 3. При этом предполагается, что ДНФ перечисляется начиная с максимального значения α_2, удовлетворяющего этому соотношению. При этом из (5.2) и (5.9) следует, что

$$\alpha_3 = \begin{cases} \dfrac{h}{3}, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 0; \\ \dfrac{h-4}{3}, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 1; \\ \dfrac{h-2}{3}, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 2. \end{cases}$$

Номер ДНФ, при котором α_3 максимально, равен искомому числу ДНФ и определяется соотношением

$$b = \left]\, \frac{\alpha_3 + 1}{2} \,\right[\,.$$

При этом

$$b = \begin{cases} \left]\dfrac{h+3}{6}\right[, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 0; \\ \left]\dfrac{h-1}{6}\right[, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 1; \\ \left]\dfrac{h+1}{6}\right[, & \text{если} \quad \mathrm{mod}_3\, h = 2. \end{cases}$$

Например, для $h = 18$ $\mathrm{mod}_3\, h = 0$ и поэтому $b = 4$. Этот результат использовался в примере 2.

В заключение отметим, что знакопеременные БПФ, для которых достигается верхняя оценка числа путей в ЛБГ при $h < 18$, могут быть получены расстановкой скобок в инвариантных ДНФ с $k = 2$. Это приводит к весьма близкой структуре ЛБГ формул этих классов. Поэтому есть основания полагать, что оценки, полученные в настоящем разделе, могут являться неулучшаемыми верхними оценками числа путей в ЛБГ оптимально построенных формул в базисе И, ИЛИ, НЕ при $h > 3$. Отметим также, что приведенная выше верхняя оценка (5.10) числа путей S сложнее оценки числа клик (максимальных полных подграфов) в графах Муна — Мозера, являющейся верхней оценкой числа клик в произвольных графах [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузнецов Б. П., Шалыто А. А.* Реализация булевых формул линейными бинарными графами. I. Синтез и анализ. Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 5.
2. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.
3. *Рейнгольд Э., Нивергельд Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. М.: Мир, 1980.
4. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978.
5. *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ. Основные алгоритмы. М.: Мир, 1976.
6. *Кузнецов О. П.* О программной реализации логических функций и автоматов//АиТ. 1977. № 7, 9.
7. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов//Сети передачи информации и их автоматизация. М.: Наука, 1965.
8. *Артюхов В. Л., Розенблюм Л. Я., Шалыто А. А.* Логические возможности некоторых типов каскадных структур//Сети связи и дискретные устройства управления. М.: Наука, 1976.
9. *Фридман А., Менон П.* Теория переключательных схем. М.: Мир, 1978.

Москва — Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
10.I.1994

ISSN 0002-33

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

Теория и Системы Управления

1995 3