УДК 519.714

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

АРТЮХОВ В. Л., КОНДРАТЬЕВ В. Н., ШАЛЫТО А. А.

(Ленинград)

Понятие арифметического полинома расширяется за счет введения операции «абсолютная величина». Предлагаются методы построения полинома для систем булевых функций. Определены условия линейности полинома.

1. Введение

При использовании микропроцессоров и микро-ЭВМ в системах логического управления появляется возможность применения нетрадиционных методов реализации булевых функций, базирующихся на широких арифметических возможностях указанных технических средств. К таким методам относятся, например, спектральные методы, методы вычисления пороговых функций и вычисления с помощью арифметических полиномов (АП).

Последняя группа методов рассмотрена в [1, 2]. Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию вопросов реализации булевых функций (БФ) и систем булевых функций (СБФ) арифметическими полиномами.

2. Расширение понятия «арифметический полином»

Известно, что булеву формулу в базисе И, ИЛИ, НЕ можно реализовать АП, заменив в ней логические операции на арифметические по правилам:

(1) $$x_1 \& x_2 = x_1 x_2; \quad x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2; \quad \bar{x} = 1 - x.$$

Отметим также, что если булевы формулы f_1 и f_2 ортогональны ($f_1 \cdot f_2 = 0$), то

$$f_1 \vee f_2 = f_1 + f_2 = f_1 \oplus f_2.$$

Докажем теорему, которая в ряде случаев позволяет упрощать АП, полученный с помощью указанных правил.

Теорема 1. Пусть $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$, а N и k — произвольные целые числа. Тогда справедливы соотношения:

(2) $$x_i = (x_i)^N,$$

(3) $$x_i + (2^N - 2) x_1 x_2 + x_2 = (x_1 + x_2)^N,$$

(4) $$(x_1 - x_2)^{2k} = |x_1 - x_2|,$$

(5) $$(x_1 - x_2)^{2k+1} = x_1 - x_2.$$

Доказательство. Первое соотношение очевидно. Докажем остальные соотношения. Для этого рассмотрим бином Ньютона:

$$(6) \qquad (x_1+x_2)^N=x_1^N+Nx_1^{N-1}x_2+\frac{N(N-1)}{1\cdot 2}x_1^{N-2}x_2^2+\ldots+x_2^N.$$

Исходя из того, что сумма коэффициентов бинома при возведении в степень суммы переменных x_1 и x_2 равна 2^N и справедливо (2), выражение (6) преобразуется к виду:

$$(x_1+x_2)^N=x_1+(2^N-2)x_1x_2+x_2.$$

При возведении в N-ю степень разности переменных x_1 и x_2 сумма коэффициентов бинома равна нулю и поэтому справедливы выражения:

$$(x_1-x_2)^{2k+1}=x_1-x_2 \text{ при } N=2k+1;$$

$$(x_1-x_2)^{2k}=x_1-2x_1x_2+x_2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=$$
$$=(x_1-x_2)^2=|x_1-x_2| \text{ при } N=2k.$$

Теорема доказана.

Назовем АП, в котором используется операция «абсолютная величина», свернутым арифметическим полиномом (САП).

Пример 1. Реализовать САП формулу $f=x_1\oplus x_2$. Используя приведенные выше соотношения, получим:

$$f=x_1\oplus x_2=\bar{x}_1x_2\vee x_1\bar{x}_2=(1-x_1)x_2+x_1(1-x_2)=$$
$$=x_1-2x_1x_2+x_2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=(x_1-x_2)^2=|x_1-x_2|.$$

Из рассмотренного примера следует, что если f_1 и f_2 — конъюнкции ранга $r\geqslant 1$, то

$$(7) \qquad f_1\oplus f_2=|f_1-f_2|,$$

если f_1 и f_2 конъюкциями не являются, то

$$(8) \qquad f_1\oplus f_2=|f_1'-f_2'|,$$

где f_1' и f_2' — АП функций f_1 и f_2 соответственно.

Использование этих соотношений позволяет непосредственно получить САП для формул указанного вида.

Пример 2. Реализовать формулу $f=(x_1\vee x_2)\oplus x_3$ САП.

Из соотношений (1) и (8) следует, что $f=|x_1+x_2-x_1x_2-x_3|$, в то время как применение (1) позволяет получить АП:

$$f=x_1+x_2+x_3-x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3+2x_1x_2x_3.$$

3. Реализация булевых функций полиномами Жегалкина

ПЖ может быть получен из заданной формулы на основе соотношений:

$$a\vee b=a\oplus b\oplus ab; \quad \bar{a}=1\oplus a.$$

Рассмотрим другие более регулярные методы построения ПЖ. Выбор метода зависит от вида задания реализуемой функции (табличный или формульный). При формульном задании выбор метода зависит от специфики этой формулы (допускает формула простую разделительную декомпозицию (9) или нет).

1°. Если задана булева функция, представимая в виде [3]

$$(9) \qquad f(X)=f(\varphi(X_1),\ X_2),$$

где $X=X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2=0$, то поиск ПЖ может выполняться на основе соотношений

$$(10)\qquad f=[\bar\varphi f(\varphi=0)\vee\varphi\overline{f(\varphi=1)}\,]\oplus\varphi= \\ =[\bar\varphi f(\varphi=0)\oplus\varphi\overline{f(\varphi=1)}\,]\oplus\varphi,$$

$$(11)\qquad f=[\bar\varphi\overline{f(\varphi=0)}\vee\varphi f(\varphi=1)\,]\oplus\bar\varphi= \\ =[\bar\varphi\overline{f(\varphi=0)}\oplus\varphi f(\varphi=1)\,]\oplus\bar\varphi,$$

являющихся обобщением формул, предложенных в [4], для произвольных функций:

$$(12)\qquad f=[\bar x_i f(x_i=0)\vee x_i\overline{f(x_i=1)}\,]\oplus x_i= \\ =[\bar x_i f(x_i=0)\oplus x_i\overline{f(x_i=1)}\,]\oplus x_i,$$

$$(13)\qquad f=[\bar x_i\overline{f(x_i=0)}\vee x_i f(x_i=1)\,]\oplus\bar x_i= \\ =[\bar x_i\overline{f(x_i=0)}\oplus x_i f(x_i=1)\,]\oplus\bar x_i.$$

Пример 3. Определить ПЖ для формулы $f=x_1x_2\vee x_3x_4$. Многократно используя соотношение (10), получим

$$f=x_1x_2\vee x_3x_4=(\overline{x_3x_4}x_1x_2\oplus x_3x_4 0)\oplus x_3x_4=x_1x_2\overline{x_3x_4}\oplus x_3x_4= \\ =(\overline{x_1x_2}0\oplus x_1x_2\overline{\overline{x_3x_4}})\oplus x_1x_2\oplus x_3x_4=x_1x_2x_3x_4\oplus x_1x_2\oplus x_3x_4.$$

Отметим, что в данном случае повторного использования соотношения (10) можно избежать, если учесть, что $\overline{x_3x_4}=1\oplus x_3x_4$.

2°. Если задана булева формула, представимая в виде (9), то поиск ПЖ может выполняться также на основе использования соотношения

$$(14)\qquad f=f(\varphi=0)\oplus[f(\varphi=0)\oplus f(\varphi=1)\,]\cdot\varphi,$$

являющегося обобщением разложения Рида [3], предложенного для произвольных формул:

$$(15)\qquad f=f(x_i=0)\oplus[f(x_i=0)\oplus f(x_i=1)\,]\oplus x_i.$$

Пример 4. Определить ПЖ для формулы $f=x_1x_2\vee x_3x_4$. Используя соотношение (14), находим

$$f=x_1x_2\oplus(x_1x_2\oplus 1)x_3x_4=x_1x_2\oplus x_1x_2x_3x_4\oplus x_3x_4.$$

3°. Третий подход состоит в следующем: определяется ортогональная дизъюнктивная нормальная форма (ОДНФ) в общем случае на основе многократного использования правила

$$f=f_1\vee f_2=f_1\vee\bar f_1 f_2.$$

В ОДНФ знак $\vee$ заменяется на $\oplus$, а $\bar x_i$ — на $1\oplus x_i$. Затем раскрываются скобки и приводятся подобные члены, если они имеются.

Отметим, что трудоемкость построения ОДНФ зависит от порядка записи формулы. При этом, если φ_1 содержит h_1 букв, а φ_2 — h_2 букв и $h_1<h_2$, то $\varphi=\varphi_1\vee\varphi_2$. Если $h_1>h_2$, то $\varphi=\varphi_2\vee\varphi_1$.

Пример 5. Определить ПЖ для формулы $f=(x_1\vee x_2)x_3\vee x_1x_2$. Из сказанного выше следует, что $f=(x_1\vee x_2)x_3\vee x_1x_2=x_1x_2\vee(x_1\vee x_2)x_3=x_1x_2\vee\overline{x_1x_2}(x_1\vee x_2)x_3=x_1x_2\vee(\bar x_1x_2\vee x_1\bar x_2)x_3=x_1x_2\oplus(x_1\oplus x_2)x_3=x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3$.

4°. Матричный способ [5] построения ПЖ базируется на задании функции в виде совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) или таблицы истинности. Он основан на использовании двоичного треугольника Паскаля [6], входящего в квадратную матрицу размерности $2^n \times 2^n$, все элементы которой, расположенные выше главной диагонали, равны нулю.

Для этой матрицы выполняются соотношения:

$$(16) \qquad |Q_n| = \begin{vmatrix} Q_{n-1} & 0 \\ Q_{n-1} & Q_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad |Q_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты ПЖ

$$(17) \qquad f = g_0 \oplus g_1 x_n \oplus g_2 x_{n-1} \oplus g_3 x_{n-1} x_n \oplus \ldots \oplus g_{2^n-1} x_1 x_2 \ldots x_n$$

связаны с коэффициентами СДНФ

$$(18) \qquad f = y_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n \vee y_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{n-1} x_n \vee y_2 \bar{x}_1 \ldots \ldots x_{n-1} \bar{x}_n \vee \ldots \vee y_{2^n-1} x_1 x_2 \ldots x_n$$

матричным соотношением

$$(19) \qquad |G| = |Q_n| \otimes |Y|,$$

где $|G|$, $|Y|$ — матрицы-столбцы коэффициентов ПЖ и СДНФ соответственно, $\otimes$ — символ операции умножения матриц, в котором арифметическая сумма заменена суммой по модулю 2.

В качестве примера приведем соотношение (19) при $n=2$:

$$\begin{vmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0 \\ y_0 \oplus y_1 \\ y_0 \oplus y_2 \\ y_0 \oplus y_1 \oplus y_2 \oplus y_3 \end{vmatrix}.$$

Обратный переход от ПЖ к СДНФ осуществляется на основе выражения

$$(20) \qquad |Y| = |Q_n| \otimes |G|.$$

4. Построение свернутого арифметического полинома для произвольной булевой функции

САП для произвольной булевой формулы (функции) может быть найден следующим образом: для заданной формулы (функции) определяется ПЖ; он преобразуется в САП в общем случае за счет многократного использования (7).

Пример 6. Построить САП для $f=(x_1 \vee x_2) \oplus x_3$, используя четвертый метод построения ПЖ.

Определив СДНФ этой функции, получим матрицу-столбец $|Y|$, после чего коэффициенты g_i вычисляются с помощью соотношения (19):

$$\begin{vmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, $f=g_0\oplus g_1x_3\oplus g_2x_2\oplus g_3x_2x_3\oplus g_4x_1\oplus g_5x_1x_3\oplus g_6x_1x_2\oplus g_7x_1x_2x_3=$ $=x_3\oplus x_2\oplus x_1\oplus x_1x_2=|||x_3-x_2|-x_1|-x_1x_2|$.

Из сравнения САП, найденных в примерах 2 и 6, следует, что в отличие от АП представление САП не является единственным. Поэтому для проверки правильности построения САП бывает необходим переход от САП к АП. При этом для уменьшения глубины вложенности операторов «абсолютная величина» предлагается использовать, начиная с самых вложенных операторов, разложение Шеннона в виде $f=(1-x_i)f(x_i=0)+$ $+x_if(x_i=1)$ и соотношения $|x_i-x_j|=x_i-2x_ix_j+x_j$, $|1-x_i|=1-x_i$, $|x_i-1|=1-x_i$.

В качестве примера докажем справедливость равенства

$$f=|||x_1-x_2|-x_1x_2|-x_3|=x_1+x_2+x_3-x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3+2x_1x_2x_3.$$

Используя первое из приведенных соотношений, получим $f=$ $=||x_1+x_2-3x_1x_2|-x_3|$. Разложим внутренний оператор по переменной x_1:

$$\varphi_1=|x_1+x_2-3x_1x_2|=(1-x_1)|x_2|+x_1|1-2x_2|.$$

Разложим оператор $\varphi_2=|1-2x_2|$ по переменной x_2: $\varphi_2=(1-x_2)|1|+$ $+x_2|-1|=1$. При этом $\varphi_1=(1-x_1)x_2+x_1=x_1+x_2-x_1x_2$. Таким образом, $f=$ $=|x_1+x_2-x_1x_2-x_3|$. Раскладывая это соотношение по переменной x_1, получим: $f=(1-x_1)|x_2-x_3|+x_1|1-x_3|=(1-x_1)(x_2-2x_2x_3+x_3)+x_1(1-x_3)=$ $=x_1+x_2+x_3-x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3+2x_1x_2x_3$.

Несмотря на то, что при использовании изложенного метода вычислительная сложность САП не меньше этого показателя для ПЖ, он может использоваться в тех случаях, когда в языке программирования отсутствуют логические операции, как это имеет место, например, в ряде версий языка Бейсик. Предлагаемый метод позволяет во многих случаях получать более компактную запись по сравнению с «классическими» АП.

Рассмотренные САП реализуют одну булеву формулу. По аналогии с АП могут быть введены в рассмотрение свернутые полиномы (СП), реализующие СБФ. Например, СБФ $f_1=x_1\oplus x_2$, $f_2=x_1\oplus x_3$ может быть реализована следующим СП: $Y=2|x_1-x_2|+|x_1-x_3|$, в то время как без введения дополнительных функций АП для этой СБФ имеет вид: $Y=3x_1+2x_2+x_3-$ $-2x_1x_3-4x_1x_3$.

5. Реализация булевой формулы арифметическим полиномом

Реализация булевой формулы АП может осуществляться следующим способом, отличным от непосредственного использования (1): определяется ОДНФ; в ОДНФ знак $\vee$ заменяется на $+$, а $\bar{x}_i$ на $1-x_i$; раскрываются скобки и приводятся подобные члены, если они имеются.

Пример 7. Реализовать формулу $f=(x_1\vee x_2)x_3\vee x_1x_2$ арифметическим полиномом. При этом $f=(x_1\vee x_2)x_3\vee x_1x_2=x_1x_2\vee(x_1\vee x_2)x_3=x_1x_2\vee\overline{x_1x_2}(x_1\vee$ $\vee x_2)x_3=x_1x_2\vee(\bar{x}_1x_2\vee x_1\bar{x}_2)x_3=x_1x_2+[(1-x_1)x_2+x_1(1-x_2)]x_3=x_1x_2+x_1x_3+$ $+x_2x_3-2x_1x_2x_3$.

Приведем без доказательства два утверждения.

1. Если заданная формула бесповторна в базисе И, ИЛИ, НЕ, то коэффициенты АП равны: -1, 0, 1. Обратное утверждение силы не имеет.

2. Если коэффициенты АП равны: -1, 0, 1, то соответствующий ПЖ может быть найден по АП заменой знаков $+$ и $-$ на $\oplus$.

6. Построение арифметического полинома для системы булевых функций

Введем понятие обобщенной совершенной дизъюнктивной нормальной формы (ОСДНФ) для СБФ.

При этом под ОСДНФ понимается выражение вида

$$(21)\qquad Y=y_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}\bar{x}_n\vee y_1\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}x_n\vee\ldots$$
$$\ldots\vee y_{2^n-1}x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n,$$

где y_i — десятичный эквивалент значений СБФ на наборе i. Справедливость (21) следует из ортогональности конъюнкции ОСДНФ.

АП для СБФ Y будем искать в виде

$$(22)\qquad Y=a_0+a_1x_n+a_2x_{n-1}+a_3x_{n-1}x_n+\ldots+a_{2^n-1}x_1x_2\ldots x_n.$$

Выражение (22) получается из (21) заменой y_i на a_i и исключением переменных с инверсиями.

Подставляя 2^n значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и приравнивая (21) и (22), получим 2^n равенств, из которых путем подстановки могут быть найдены выражения для коэффициентов АП через коэффициенты ОСДНФ.

Эти равенства могут быть представлены в матричной форме, аналогичной (19), также построенной на базе двоичного треугольника Паскаля:

$$(23)\qquad |A|=|P_n|\cdot|Y|,$$

где $|A|$, $|Y|$ — матрицы-столбцы коэффициентов АП и ОСДНФ соответственно.

Для матрицы $|P_n|$ выполняются соотношения:

$$(24)\qquad |P_n|=\begin{vmatrix} P_{n-1} & 0 \\ -P_{n-1} & P_{n-1}\end{vmatrix},\qquad |P_1|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1\end{vmatrix}.$$

где $-P_{n-1}$ — матрица, полученная путем инвертирования знаков единичных элементов матрицы P_{n-1}.

В качестве примера приведем выражение (23) для $n=2$:

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_0\\ -y_0+y_1\\ -y_0+y_2\\ y_0-y_1-y_2+y_3\end{vmatrix}.$$

Пример 8. Определить АП для СБФ $f_1=x_1x_2$, $f_2=x_1\oplus x_2$. Построив таблицу истинности (ОСДНФ) этих функций, определим, что $y_0=0$, $y_1=y_2=1$, $y_3=2$. При этом из соотношения (25) следует, что $a_0=0$, $a_1=a_2=1$, $a_3=0$. Поэтому $Y=a_0+a_1x_2+a_2x_1+a_3x_1x_2=x_2+x_1$.

Теорема 2. Если СБФ определена на $\beta(\beta\leqslant 2^n)$ наборах входных данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то всегда можно построить АП, содержащий не более β ненулевых коэффициентов.

Доказательство. Из соотношений (23), (25) следует, что a_i вычисляется через y_i и поэтому, если y_i не определено, то его значение всегда можно выбрать таким образом, чтобы a_i было равно нулю.

Пример 9. Определить АП для СБФ $Y(X)=\{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\}$, заданной на трех наборах с номерами $X=\{0, 1, 2\}$ и принимающей на этих наборах следующие значения: $Y=\{1, 2, 3\}$.

Из соотношения (25) следует, что, выбрав $y_3=4$, получим $a_3=0$.

При этом
$$Y=1+x_2+2x_1.$$

Обратный переход от АП к ОСДНФ осуществляется на основе соотношения

(26) $$|Y|=|Q_n|\cdot|A|.$$

7. Условие представимости системы булевых функций линейным арифметическим полиномом

Условие представимости СБФ линейным АП определяется из (23) путем приравнивания нулю коэффициентов при нелинейных членах в (22) и представления их через базовые значения y_i, где $i=0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$.

При этом условие линейности АП для СБФ определяется системой соотношений:

(27) $$3\leqslant l\leqslant 2^n-1, \quad l\neq 2^2, 2^3, \ldots, 2^{n-1},$$
$$y_l=\sum_{m=[\log_2 l]}^{0} x_{m+1}y_{2^m}+\left(1-\sum_{m=[\log_2 l]}^{0} x_{m+1}\right)y_0,$$
$$\operatorname{bin} l=x_{[\log_2 l]+1}x_{[\log_2 l]}\ldots x_2x_1,$$

где y_0, y_l, y_{2^m} — десятичные эквиваленты значений СБФ на наборах с номерами 0, l, 2^m соответственно; $\operatorname{bin} l$ — двоичный эквивалент l.

Более обозримый вид это условие приобретает в матричной форме:

(28) $$|Y_l|=|DC|\cdot|Y_б|,$$

где $|Y_l|$ — матрица-столбец из элементов y_l; $|Y_б|$ — матрица-столбец из базовых элементов $y_0, y_1, y_2, y_4, \ldots, y_{2^{n-1}}$; D — подматрица, каждая строка которой $\operatorname{bin} l$; C — вектор-столбец, каждое значение которого равно 1 минус сумма единиц $\operatorname{bin} l$.

В качестве примера приведем соотношение (28) для $n=3$:

(29) $$\begin{vmatrix} y_3\\ y_5\\ y_6\\ y_7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1&-1\\1&0&1&-1\\1&1&0&-1\\1&1&1&-2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} y_4\\ y_2\\ y_1\\ y_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_2+y_1-y_0\\ y_4+y_1-y_0\\ y_4+y_2-y_0\\ y_4+y_2+y_1-2y_0\end{vmatrix}.$$

Укажем два частных случая линейности АП.

1. Если $Y=c_1+c_2d$ (d — десятичный эквивалент входного набора), то АП имеет вид:
$$Y=c_1+c_2\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}x_i.$$

2. Если $Y=c_1+c_2\sum_{i=1}^{n}x_i$, то АП имеет тот же вид.

Пример 10. Определить, представима ли СБФ $f_1=x_1x_2$, $f_2=x_1\vee x_2$, $f_3=x_1\oplus x_2$ линейным АП, и реализовать эту СБФ.

Запишем таблицу истинности этой СБФ. Введем столбец Y: $y_0=0$, $y_1=y_2=3$, $y_3=6$. Условие линейности выполняется:

$$|y_3| = |1 \quad 1 \quad -1| \cdot \begin{vmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = |y_2 + y_1 - y_0|.$$

Значения коэффициентов АП определяется из соотношения (25): $a_0=0$, $a_1=3$, $a_2=3$, $a_3=0$. При этом $Y=a_0+a_1x_2+a_2x_1+a_3x_1x_2=3x_1+3x_2$. Аналогичный результат получается из второго частного случая: $n=2$, $c_1=0$, $c_2=3$.

Условие линейности ПЖ имеет вид:

$$(30) \qquad |Y_l| = |DB|^{\otimes} |Y_6|,$$

где B — вектор-столбец, каждое значение которого равно сумме по модулю 2 единицы и единиц bin l.

В качестве примера приведем это условие для $n=3$:

$$\begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 \oplus y_1 \oplus y_0 \\ y_4 \oplus y_1 \oplus y_0 \\ y_4 \oplus y_2 \oplus y_0 \\ y_4 \oplus y_2 \oplus y_1 \end{vmatrix}.$$

8. Минимизация арифметического полинома

Полученные условия линейности АП могут использоваться при минимизации, осуществляемой за счет изменения порядка записи функций в СБФ и введения добавочных функций [1, 2].

Использование условия линейности позволяет упростить поиск линейной формы в случае, если она существует, так как вместо получения АП на каждом шаге минимизации может осуществляться лишь проверка линейности.

Пример 11. Реализовать СБФ $f_1=1\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3$, $f_2=x_1\vee x_2\vee x_3$ арифметическим полиномом. Для заданной СБФ условие линейности не выполняется. При этом $Y=2-(x_1+x_2+x_3)+3(x_1x_2+x_1x_3)-7x_1x_2x_3$. Перестановка функций f_2 и f_1 упрощает полином, но к линейности не приводит:

$$Y=1+x_1+x_2+x_3-2x_1x_2x_3.$$

Для обеспечения линейности введем дополнительную функцию $f_3=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3$ на вторую позицию: f_2, f_3, f_1. При этом $Y=3+x_1+x_2+x_3$.

Вопрос о направленном использовании условий линейности для минимизации АП полностью определенных СБФ остается открытым.

Для не полностью определенных СБФ соотношения типа (25) и (29) позволяют упростить поиск минимальных АП за счет выбора таких значений неопределенных коэффициентов y_i, которые обеспечивают получение нулевых значений коэффициентов или выполнение условий линейности. Аналогичный вывод можно сделать и для ПЖ [7].

Уменьшение вычислительной сложности может быть достигнуто также за счет перехода от полиномов к арифметическим скобочным формам (АСФ).

Пример 12. Определить АСФ для СБФ $f_1=x_1x_2x_3$, $f_2=x_1(x_2\oplus x_3)$, $f_3=\bar{x}_1x_2x_3\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$. Для этой СБФ (без введения дополнительных функций) АП имеет вид:

$$Y=4f_1'+2f_2'+f_3'=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1.$$

Переходя к АСФ, получим

$$Y=x_1(1+x_2+x_3)+x_2x_3.$$

Учитывая соотношение (2), АП может быть преобразован в АСФ следующим образом:

$$Y=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1^2=x_1(x_1+x_2)+(x_1+x_2)x_3=$$
$$=(x_1+x_2)(x_1+x_3).$$

9. Заключение

После того как настоящая работа была передана в редакцию, были опубликованы тезисы докладов 10 Всесоюзного совещания по проблемам управления, в которых содержатся работы [8, 9]. Некоторые результаты этих публикаций совпадают с полученными в настоящей работе. Кроме того, в [8] содержится ряд определений, которые представляют интерес, в частности, для классификации полиномов. Исходя из сказанного, сделаем несколько замечаний.

1. В соответствии с [8] символом АП будем обозначать полином для одной булевой функции, а полином для СБФ — символом ПМ. ПМ могут быть построены как с использованием дополнительных функций, так и без них. В первом случае для получения результата после вычисления полинома требуется маскировать разряды, соответствующие дополнительным функциям, а во втором искомый результат формируется по окончании вычисления полинома непосредственно.

Из сказанного, а также ввиду того, что выполнение операции маскирования в ряде случаев весьма затруднительно, например для многих языков высокого уровня ПМ могут быть разделены на два класса: без маскирования и с маскированием.

При этом необходимо отметить, что формула, рассмотренная в примере 2, может быть заменена СБФ и реализована линейным ПМ с маскированием вида

$$Y=3x_1+3x_2+2x_3,$$

в то время как АП, реализующие эту формулу непосредственно, нелинейны.

2. Соотношения (16) и (24) для Q_n и P_n являются кронекеровской n-й степенью матриц Q_1 и P_1 соответственно [9].

3. Соотношения (19) и (23) в соответствии с [8] называются прямым конъюнктивным преобразованием (КП) с матричными операциями $\{\oplus, \cdot\}$ и $\{+, \cdot\}$.

4. Соотношения (20) и (26) в соответствии с [8] называются обратным КП с матричными операциями $\{\oplus, \cdot\}$ и $\{+, \cdot\}$.

5. В [8] рассмотрены быстрые прямое и обратное КП.

6. По аналогии с [8] соотношения (19) и (26) определяют переход от АП к ПЖ:

$$|G|=|Q_n|^{\otimes}|Y|=|Q_n|^{\otimes}|Q_n|\cdot|A|,$$

а соотношения (23) и (20) — переход от ПЖ к АП:

$$|A|=|P_n|\cdot|Y|=|P_n|\cdot|Q_n|^{\otimes}|G|.$$

7. Использование ПМ и СП позволяет осуществлять параллельное вычисление СБФ [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюгин В. Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами. // АиТ. 1982. № 4. С. 84–93.
2. *Малюгин В. Д.* Реализация кортежей булевых функций посредством линейных арифметических полиномов // АиТ. 1984. № 2. С. 114–122.
3. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.
4. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1983.
5. *Авсаркисян Г. С., Брайловский Г. С.* Представление логических функций в виде полиномов Жегалкина // Автоматика и вычисл. техника. 1975. № 6. С. 6–10.
6. *Бохман Д., Постхоф Х.* Двоичные динамические системы. М.: Энергоиздат, 1986.
7. *Авсаркисян Г. С.* Полиномиальные формы частичных булевых функций и некоторые их приложения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 5. С. 50–58.
8. *Шмерко В. П., Кухарев Г. А.* Метод и алгоритмы оперативного решения систем булевых уравнений, заданных в полиномиальных формах. // 10 Всесоюз. совещ. по проблемам управления. Тез. докл. Кн. 1. М.: Ин-т проблем управления, 1986. С. 367–368.
9. *Малюгин В. Д.* Применение алгебры кортежей логических функций // 10 Всесоюз. совещ. по проблемам управления. Тез. докл. Кн. 1. М.: Ин-т проблем управления, 1986. С. 369.

Поступила в редакцию
24.XII.1986

REPRESENTATION OF BOOLEAN FUNCTIONS AS ARITHMETICAL POLINOMIALS

ARTYUKHOV V. L., KONDRAT'EY V. N., SHALYTO A. A.

The concept of an arithmetic polynomial is expanded by introducing an «absolute value» operation. Methods are proposed to design a polynomial for a set of Boolean functions. Conditions for the polynomial to be linear are defined.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА
И
ТЕЛЕМЕХАНИКА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

4

МОСКВА · 1988