УДК 519.714

© 1993 г. В.Н. КОНДРАТЬЕВ,
А.А. ШАЛЫТО, канд. техн. наук
(ЦНИИ НПО "АВРОРА", Санкт-Петербург)

РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Предложены канонические алгоритмические структуры, обеспечивающие реализацию систем булевых функций линейными арифметическими полиномами. Найдены матричные соотношения для вычисления коэффициентов линейных полиномов. Определены условия линейности различных порядков, при выполнении которых каноническая структура может быть упрощена. Показано, что предлагаемый подход в некотором смысле существенно более эффективен, чем реализация систем булевых функций на пороговых элементах.

1. Введение

При использовании в системах логического управления микропроцессоров и микроЭВМ появляется возможность применения нетрадиционных методов реализации систем булевых функций (СБФ), базирующихся на широких арифметических возможностях указанных технических средств. Одним из таких методов является реализация СБФ с помощью арифметических полиномов (АП) [1–12].

В общем случае АП является нелинейным и содержит 2^n членов, поэтому с ростом числа переменных вычисление АП значительно усложняется.

Особую важность при этом представляет реализация СБФ с помощью линейных АП (ЛАП), так как вычисление ЛАП сводится к суммированию коэффициентов при переменных, значения которых равны единице.

В [3, 7] рассмотрены отдельные вопросы реализации СБФ с использованием ЛАП. Так, в [3] предложен подход к реализации СБФ суперпозицией ЛАП, основанный на линейной представимости некоторых классов булевых функций.

При применении этого подхода искомый результат формируется из ЛАП не непосредственно, а лишь после маскирования избыточных разрядов в двоичном представлении вычисленного значения полинома.

В [7] найдено условие линейности (УЛ), при выполнении которого СБФ реализуется одним ЛАП. Однако лишь ограниченный класс СБФ удовлетворяет УЛ.

В настоящей работе предлагается подход, обеспечивающий при невыполнении УЛ реализацию произвольных СБФ с помощью совокупности ЛАП, объединяемых управляющей конструкцией (УК). При этом УК по значению входного набора осуществляет выбор одного из ЛАП совокупности, который и вычисляет десятичный эквивалент значений СБФ на заданном наборе.

2. Арифметические полиномы. Основные понятия

В [7] введено понятие обобщенной совершенной дизъюнктивной нормальной формы (ОСДНФ) для СБФ:

$$(1)\qquad Y = y_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_n \vee y_1\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}x_n \vee \ldots \vee y_{2^n-1}x_1x_2\ldots x_n,$$

где x_j – j-я двоичная входная переменная ($j = 1 \ldots n$); n – число входных переменных; y_i – десятичный эквивалент значения СБФ на i-м наборе значений входных переменных таблицы истинности (ТИ) ($i = \overline{0, 2^n - 1}$), $\bar{x}_j$ – инверсия j-й входной переменной.

В общем случае АП, реализующий СБФ, имеет вид:

$$(2)\qquad Y = a_0 + a_1x_n + a_2x_{n-1} + a_3x_{n-1}x_n + \ldots + a_{2^n-1}x_1x_2\ldots x_n,$$

где a_i - некоторое целое число.

Выражение (2) формируется из (1) заменой коэффициентов y_i на a_i и исключением переменных с инверсиями. Выражения (1) и (2) связаны матричным соотношением вида:

(3) $$[A] = [K_n] \cdot [Y],$$

где $[A]$, $[Y]$ – вектор-столбцы коэффициентов АП и ОСДНФ соответственно.

Для матрицы $[K_n]$ справедливо:

$$[K_n] = \begin{bmatrix} K_{n-1} & 0 \\ -K_{n-1} & K_{n-1} \end{bmatrix}; \quad [K_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

где $[-K_{n-1}]$ – матрица, полученная путем инвертирования знаков единичных элементов матрицы $[K_{n-1}]$.

Программная реализация указанного преобразования изложена в [8]. Необходимо отметить, что предложенный метод позволяет реализовать полиномом не только СБФ, но и таблицы с двоичными аргументами и произвольными действительными значениями функций.

Наряду с прямым преобразованием (3) существует также и обратное преобразование:

$$[Y] = [Q_n] \cdot [A],$$

где

$$[Q_n] = \begin{bmatrix} Q_{n-1} & 0 \\ Q_{n-1} & Q_{n-1} \end{bmatrix}; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ЛАП будем называть выражения вида

(4) $$P = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1.$$

В [7] определено УЛ АП для СБФ (условие представимости СБФ с помощью выражения (4)):

(5) $$[Y_l] = [DC] \cdot [Y_b],$$

где $[Y_l]$ – вектор-столбец из $2^n - n - 1$ элементов y_l $(l \neq 0, 2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1})$, расположенных в порядке возрастания индексов; $[Y_b]$ – вектор-столбец из $(n+1)$-го элементов y_b $(b = 0, 2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1})$, расположенных в порядке убывания индексов; D – подматрица размерности $(2^n - n - 1) \times (n+1)$, каждая строка которой является двоичным эквивалентом l, обозначаемым символом "bin l"; C – вектор-столбец из $2^n - n - 1$ элементов, каждое значение которого равно 1 минус сумма единиц в "bin l".

При $n = 3$ выражение (5) принимает вид:

(6) $$\begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Базовыми входными наборами (БВН) будем называть входные наборы, число единиц в которых не превышает одной. Число БВН для СБФ n переменных равно $n + 1$. При этом элементы матрицы $[Y_b]$ являются значениями СБФ на БВН.

Если соотношение (5) выполняется, то СБФ n переменных реализуется одним ЛАП, который строится по значениям СБФ только на БВН. Такой ЛАП будем называть базо-

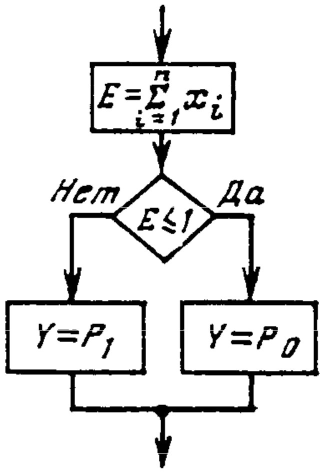

Рис. 1

вым. Коэффициенты этого полинома определяются соотношением

$$(7)\quad \begin{bmatrix} a_{2^n-1} \\ a_{2^n-2} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{2^n-1} \\ y_{2^n-2} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

получаемым из (3) вычеркиванием строк и столбцов матрицы $[K_n]$ и элементов вектор-столбцов $[A]$ и $[Y]$, соответствующих нелинейным членам АП. Используемая в (7) матрица имеет размерность $(n+1) \times (n+1)$.

3. Реализация систем булевых функций двух и трех переменных

Пусть задана СБФ двух переменных. Так как в данном случае имеется четыре входных набора, три из которых являются БВН, то СБФ может быть реализована с помощью двух ЛАП вида $P_0 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_1$; $P_1 = y_3$. Коэффициенты полинома P_0 определяются на основе (7) при $n=2$ следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a_2^0 \\ a_1^0 \\ a_0^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Например, СБФ, принимающая значения $y_0 = 3$, $y_1 = 4$, $y_2 = 2$ и $y_3 = 5$, реализуется полиномами: $P_0 = 3 + x_2 - x_1$ и $P_1 = 5$. Полученные ЛАП объединяются УК, определяющей область действия каждого из них. При ее построении используется тот факт, что каждый БВН содержит не более одной единицы (рис. 1 при $n=2$).

Перейдем к рассмотрению СБФ трех переменных. Для этого представим столбец значений СБФ в виде двух не полностью определенных функций, первая из которых (Y_{I}) образуется из значений СБФ на БВН, а вторая (Y_{II}) из всех остальных значений (табл. 1). В этой же таблице в качестве примера приведены три булевые функции f_1, f_2, f_3, зависящие от переменных x_1, x_2, x_3.

Столбец $\boldsymbol{Y}_{\text{I}}$ реализуется ЛАП, коэффициенты которого определяются на основе (7) при $n=3$:

$$(8)\quad \begin{bmatrix} a_4^0 \\ a_2^0 \\ a_1^0 \\ a_0^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Таблица 1

Номер полинома	X	x_1 x_2 x_3	f_1 f_2 f_3	Y	Y_{I}	Y_{II}
0	0	0 0 0	0 0 0	0	y_0	–
0	1	0 0 1	0 1 1	3	y_1	–
0	2	0 1 0	0 1 1	3	y_2	–
1	3	0 1 1	0 1 0	2	..	y_3
0	4	1 0 0	0 1 1	3	y_4	–
1	5	1 0 1	0 1 0	2	–	y_5
1	6	1 1 0	0 1 0	2	–	y_6
1	7	1 1 1	1 1 1	7	–	y_7

При этом позиции столбца Y_{I} (табл. 1), помеченные прочерками, приобретают значения, определяемые ЛАП. Столбец Y_{II} доопределим значениями СБФ на БВН таким образом, чтобы АП, реализующий этот столбец, был линейным. Для этого используем соотношение, вытекающее из УЛ (5):

$$(9) \qquad [Y_b] = [DC]^{-1} \cdot [Y_i].$$

Авторами установлено, что при $n \leq 3$ $[DC]^{-1} = [DC]$, и поэтому из (6) следует:

$$\begin{bmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (7) для $n=3$ найденное соотношение, получим:

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} a_4^1 \\ a_2^1 \\ a_1^1 \\ a_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, коэффициенты ЛАП для $n=3$ определяются с помощью (8) и (10). Так как при $n=3$ по сравнению с $n=2$ число ЛАП и условие их выбора не изменяются, то для реализации СБФ трех переменных можно использовать граф-схему (ГС) (рис. 1), полагая при этом $n=3$.

Пример 1. Реализовать СБФ, заданную табл. 1. На основе (8) и (10) получим: $P_0 = 3x_3 + 3x_2 + 3x_1$; $P_1 = -8 + 5x_3 + 5x_2 + 5x_1$. Для компактного представления ЛАП введем матричную форму их записи

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ -8 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения, используя (2) и (3), реализуем табл. 1 нелинейным АП (НАП) [7]:

$$Y = 3x_3 + 3x_2 - 4x_2x_3 + 3x_1 - 4x_1x_3 - 4x_1x_2 + 10x_1x_2x_3.$$

Для компактной записи НАП авторами предлагается использовать табличную форму (табл. 2).

Из сопоставления реализации СБФ трех переменных с помощью НАП и ЛАП следует, что линейная часть НАП совпадает с базовым ЛАП, а нелинейная его часть реализуется с помощью второго ЛАП и УК, состоящей из третьего линейного арифметического полинома и условной вершины (УВ).

4. Формирование групп значений системы булевых функций, реализуемых одним линейным полиномом

Значения СБФ на БВН всегда могут быть реализованы одним ЛАП на основе (7). Предложим подход к реализации СБФ с помощью ЛАП на остальных наборах.

Разобьем эти наборы на минимальное количество групп таким образом, чтобы каждая из них содержала не более $(n + 1)$-го набора, а значения СБФ, входящие в группу, реализовались одним ЛАП. Последнее условие выполняется, если для рассматривае-

Таблица 2

$Y =$

	1	x_3	x_2	$x_2 x_3$
1	0	3	3	-4
x_1	3	-4	-4	10

мой группы наборов матрица $[DC]$ имеет обратную, что позволяет вычислять коэффициенты ЛАП на основе (9) и (7). Обратимость матрицы $[DC]$ для группы, содержащей $n + 1$ набор, обеспечивается линейной независимостью [13] системы уравнений, задаваемой соотношением (5) на этой группе. Авторами установлено [14], что линейная независимость указанной системы уравнений достигается при формировании каждой группы наборов на основе следующих соотношений:

(11) $\quad X_{i+1} = X_i + F_i;$

(12) $\quad X_{i+1} = X_i - F_i,$

где X_i номер в ТИ i-го набора, входящего в группу $(i = 1,2,..., n + 1)$; F_i — обобщенное число Фибоначчи, определяемое соотношением: $F_i = F_{i-1} + F_j$, $F_1 = F_2 = 1$, $j = i - 1$ или $i - 2$. При этом

(13) $\quad F_i = 2F_{i-1};$

(14) $\quad F_i = F_{i-1} + F_{i-2}.$

Соотношение (11) соответствует "продвижению" по ТИ вниз, а соотношение (12) вверх.

Пример 2. Пусть задана СБФ четырех переменных, реализованная на БВН линейным АП. Из оставшихся наборов необходимо выделить группу из $(n + 1)$-го элементов, значения СБФ на которых можно реализовать другим ЛАП.

Выбирая номера наборов, например, в соответствии с (11), получим $X_2 = X_1 + F_1$, $X_3 = X_2 + F_2$, $X_4 = X_3 + F_3$, $X_5 = X_4 + F_4$. Используя соотношение (14), определим, что $F_3 = 2$ и $F_4 = 3$. Тогда при $X_1 = 5$ получим: $X_2 = 6$, $X_3 = 7$, $X_4 = 9$, $X_5 = 12$.

Проверим обратимость матрицы $[DC]$ для выбранной группы наборов. Для этого сначала запишем соотношение (5) для сформированной группы:

$$\begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_9 \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_9 \\ y_{12} \end{bmatrix}.$$

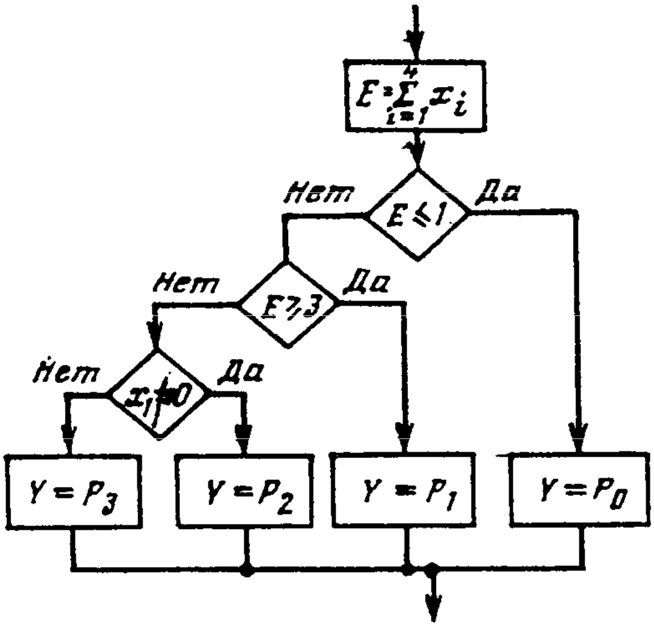

Рис. 2

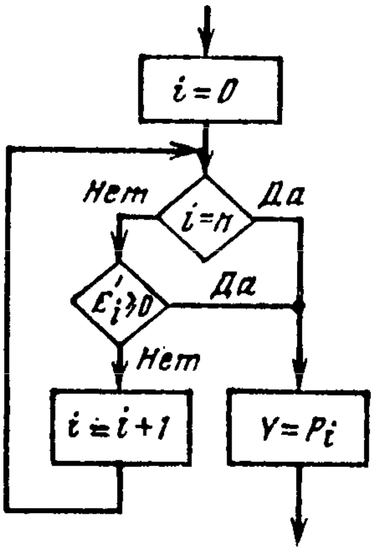

Рис. 3

Следовательно, в данном случае обратная матрица существует, и поэтому, используя последнее соотношение и (7), можно построить ЛАП для найденной группы наборов Нахождение обратной матрицы в общем случае весьма трудоемко, однако авторами установлено [14], что при формировании группы из $(n+1)$-го набора в соответствии с (12) и (13) выполняется равенство: $[DC]^{-1} = [DC]$.

5. Реализация систем булевых функций четырех переменных

В приложении показано, что произвольная СБФ при $n = 4$ может быть реализована четырьмя ЛАП, коэффициенты которых вычисляются на основе следующих соотношений:

$$
\begin{bmatrix} a_8^0 \\ a_4^0 \\ a_2^0 \\ a_1^0 \\ a_0^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}; \tag{15}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_8^1 \\ a_4^1 \\ a_2^1 \\ a_1^1 \\ a_0^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_7 \\ y_{11} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{bmatrix}; \tag{16}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_8^2 \\ a_4^2 \\ a_2^2 \\ a_1^2 \\ a_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}; \tag{17}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_8^3 \\ a_4^3 \\ a_2^3 \\ a_1^3 \\ a_0^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{bmatrix}. \tag{18}
$$

Таблица 3

Номер полинома	X	$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	$f_1\ f_2$	Y
0	0	0 0 0 0	0 1	1
0	1	0 0 0 1	1 1	3
0	2	0 0 1 0	1 0	2
2	3	0 0 1 1	0 0	0
0	4	0 1 0 0	0 0	0
2	5	0 1 0 1	0 1	1
2	6	0 1 1 0	0 1	1
1	7	0 1 1 1	1 1	3
0	8	1 0 0 0	0 1	1
3	9	1 0 0 1	1 0	2
3	10	1 0 1 0	1 0	2
1	11	1 0 1 1	0 0	0
3	12	1 1 0 0	0 1	1
1	13	1 1 0 1	0 1	1
1	14	1 1 1 0	0 1	1
1	15	1 1 1 1	1 1	3

Получаемые ЛАП объединяются с помощью УК (рис. 2), которая основана на следующих особенностях выделенных групп: наборы нулевой группы содержат не более одной единицы; наборы первой группы содержат не менее трех единиц; наборы, образующие вторую и третью группы, разделяются по значению "старшей" переменной x_1.

Анализ ГС (рис. 2) показывает, что приведение всех предикатов к виду $E_i' \geqslant 0$ позволяет построить циклическую ГС (рис. 3). Например, предикат $E_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant \leqslant 1$ преобразуется к виду $E_0' \geqslant 0$ при $E_0' = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$. При этом

$$\begin{bmatrix} E_0' \\ E_1' \\ E_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Определить ЛАП, реализующие СБФ, заданную табл. 3.

Используя соотношения (15) – (18), получим

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения запишем НАП для рассматриваемой СБФ:

$$Y = 1 + 2x_4 + x_3 - 4x_3x_4 - x_2 - x_2x_4 + 5x_2x_3x_4 - x_1x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2 - x_1x_2x_3.$$

Этот НАП может быть записан и более компактно (табл. 4).

Из изложенного выше следует, что предложенный подход при сравнительно простой УК позволил разбить значения СБФ на четыре группы, две из которых полные (содержат по $n+1=5$ значений), а остальные содержат лишь по три значения. В силу того, что меньшего числа групп при $n = 4$ добиться невозможно ($\left\lceil \frac{16}{5} \right\rceil = 4$), авторы попытались путем перебора разбить значения СБФ на группы таким образом, чтобы три группы были полными, а четвертая содержала одно значение. Для этого, выделив значения СБФ на БВН (0, 1, 2, 4, 8), для остальных значений с помощью ЭВМ построили все сочетания из 11 по 5 ($C_{11}^5 = 462$) и для каждого из них проверили линейную независимость уравнений, образующих УЛ. Генерация "независимых" групп показала, что их весьма много – 323.

Для того чтобы УК была достаточно простой, среди этих групп выделена совокупность из пяти элементов с тремя и более единицами (7, 11, 13, 14, 15), которая используется в ГС (рис. 2), а для остальных шести значений с двумя единицами (3, 5, 6, 9, 10, 12) были сформированы шесть групп по пять элементов ($C_6^5 = 6$), каждая из которых проверялась на входимость в состав 323 "независимых" групп. Все группы оказались "зависимыми", и поэтому решить сформулированную задачу при простой УК не удается.

Таблица 4

$$Y = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 1 & x_4 & x_3 & x_3x_4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ \hline x_2 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ x_1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline x_1x_2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

На основе анализа "независимых" групп установлено также, что среди них имеются не пересекающиеся между собой, например такие, как (3, 6, 13, 14, 15), (5, 9, 10, 11, 12) и (5, 7, 11, 14, 15), (6, 9, 10, 12, 13). Каждая из этих пар (совместно с базовой и группой (7) в первом случае и группой (3) – во втором) решает сформулированную выше задачу, однако при весьма сложных УК, что делает их применение нецелесообразным.

6. Реализация систем булевых функций пяти переменных

Используя подход, изложенный в разделе 4, удается все наборы входных переменных для $n = 5$ разбить на шесть групп: (0, 1, 2, 4, 8, 16), (15, 23, 27, 29, 30, 31), (10, 18, 22, 24, 25, 26), (5, 13, 17, 19, 20, 21), (3, 7, 9, 11), и (6, 12, 14, 28), для каждой из которых найдено матричное соотношение для определения коэффициентов ЛАП, позволяющего вычислять значения СБФ на входных наборах соответствующей группы [14].

Однако в отличие от граф-схем для реализации СБФ двух, трех и четырех переменных (рис. 1, 2) при предложенном методе формирования групп УК для $n = 5$ содержит не только ЛАП и УВ, но и другие операторы, что не позволяет обосновать целесообразность использования ЛАП в этом случае. Следует отметить, что предложенный выше подход к формированию групп входных наборов обусловливает априорную непредсказуемость УК.

Рассмотрим другой подход, ориентированный на получение УК, состоящей только из ЛАП и УВ.

При этом нулевая и симметричная ей (первая) группы выделяются на основе метода, изложенного в разделе 4. Выбор этих групп осуществляется с помощью ЛАП вида $E = \sum_{i=1}^{n} x_i$ и предикатов $E \leqslant 1$ и $E \geqslant n-1$ соответственно.

Исходя из (7), соотношение для определения коэффициентов ЛАП на БВН имеет вид:

$$(19)\qquad \begin{bmatrix} a_{16}^0 \\ a_8^0 \\ a_4^0 \\ a_2^0 \\ a_1^0 \\ a_0^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{16} \\ y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Для первой группы воспользуемся подходом, изложенным в разделе 4:

$$\begin{bmatrix} a^1_{16} \\ a^1_8 \\ a^1_4 \\ a^1_2 \\ a^1_1 \\ a^1_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{15} \\ y_{23} \\ y_{27} \\ y_{29} \\ y_{30} \\ y_{31} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Формирование следующих групп будем выполнять с помощью построения карт Карно [15], определяющих функции выбора каждой группы. При этом в карте на месте наборов, входящих в выделенные ранее группы, ставятся прочерки. На остальных позициях карты будем пытаться разместить не более $(n + 1)$-й единиц, соответствующих наборам выделяемой группы (оставшиеся позиции карты заполним нулями), таким образом, чтобы функция выбора была пороговой и обеспечивалась линейная независимость системы уравнений, задаваемой соотношением (5) на этой группе. Пороговость функции позволяет реализовать ее с помощью одного ЛАП и одной УВ [16–18]. Эффективный метод построения пороговых выражений для бесповторных пороговых формул (БПФ) предложен в [14].

В случае, если функция выбора, удовлетворяющая указанным выше условиям, найдена, в карте Карно нули удаляются, а единицы заменяются прочерками и тем самым повышается степень неопределенности функции выбора следующей группы, что увеличивает вероятность доопределения этой функции до пороговой. Приведенная процедура повторяется многократно, причем ввиду увеличения степени неопределенности шансы получения пороговой функции (ПФ) выбора увеличиваются с каждым шагом.

Разобьем оставшиеся двадцать наборов на четыре группы (по пять в каждой). Для определения функции выбора наборов второй группы проставим в карте Карно прочерки на позициях, соответствующих наборам нулевой и первой групп. На остальных позициях попытаемся разместить пять единиц и пятнадцать нулей таким образом, чтобы функция выбора наборов этой группы была пороговой, а соответствующая система уравнений обладала линейной независимостью. Найденное эвристически решение приведено в табл. 5.

Этому решению соответствует функция выбора вида $f_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4 x_5 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee x_4 x_5)$. Ввиду пороговости этой функции, реализуемой БПФ, она может быть вычислена с помощью ЛАП $E_2 = -3x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5$ и предиката $E_2 \geqslant 0$. Таким образом, в качестве второй группы будем использовать наборы 3, 5, 6, 7 и 11. Для этих наборов (так как $x_1 = 0$ и, следовательно, $a^2_{16} = 0$) (5) приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_{11} \end{bmatrix}.$$

x_1x_2	$x_3x_4x_5$							
	000	001	011	101	110	111	101	100
00	–	–	1	–	1	1	1	–
01	–	0	1	0	0	–	0	0
11	0	0	–	0	–	–	–	0
10		0	0	0	0	–	0	0

Таблица 6

x_1x_2	$x_3x_4x_5$							
	000	001	011	010	110	111	101	100
00		–	–	–	–	–	–	–
01	–	0	–	0	0	–	0	0
11	0	0	–	1	–	–	–	0
10	–	1	1	1	1	–	0	0

На основе этого соотношения и (7), а также учитывая, что $a_{16}^2 = 0$, получим:

$$(21)\qquad \begin{bmatrix} a_{16}^2 \\ a_8^2 \\ a_4^2 \\ a_2^2 \\ a_1^2 \\ a_0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_{11} \end{bmatrix}.$$

Далее составим карту Карно с прочерками на месте наборов нулевой, первой и второй групп и построим функцию выбора значений третьей группы (табл. 6).

Эта функция реализуется БПФ вида $f_3 = x_1 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 = x_1(x_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3)$ и может быть вычислена с помощью ЛАП $E_3 = 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4$ и предиката $E_3 \geqslant 3$. Таким образом, в качестве наборов третьей группы будем использовать наборы 17, 18, 19, 22, 26.

Полагая, что $y_0 = y_{16}$, и выполняя преобразования, аналогичные проведенным для второй группы, получим:

$$(22)\qquad \begin{bmatrix} a_{16}^3 \\ a_8^3 \\ a_4^3 \\ a_2^3 \\ a_1^3 \\ a_0^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{17} \\ y_{18} \\ y_{19} \\ y_{22} \\ y_{26} \end{bmatrix}.$$

Составим карту Карно с прочерками на месте наборов всех предыдущих групп Выделим единицами наборы четвертой группы, а нулями – пятой (табл. 7).

Таблица 7

x_1x_2	$x_3x_4x_5$							
	000	001	011	010	110	111	101	100
00	–	–	–	–	–	–	–	–
01	–	1	–	0	1	–	1	1
11	0	1	–	–	–	–	–	0
10	–	–	–	–	–	–	0	0

Функция, задаваемая этой таблицей, реализуется БПФ вида $f_4 = x_2 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = x_2(x_5 \vee \bar{x}_1 x_3)$, которая вычисляется с помощью ЛАП $E_4 = -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_5$ и предиката $E_4 \geqslant 4$.

Из изложенного выше следует, что в четвертую группу войдут наборы 9, 12, 13, 14, 25, а в пятую – 10, 20, 21, 24 и 28.

Полагая, что $y_0 = 0$, и выполняя преобразования, аналогичные проведенным для второй группы, получим:

$$\begin{bmatrix} a_{16}^4 \\ a_8^4 \\ a_4^4 \\ a_2^4 \\ a_1^4 \\ a_0^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_9 \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{25} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix} a_{16}^5 \\ a_8^5 \\ a_4^5 \\ a_2^5 \\ a_1^5 \\ a_0^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{21} \\ y_{24} \\ y_{28} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Таким образом, для ЛАП, входящих в УК, можно записать матричное соотношение:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Указанные ЛАП используются в ГС (рис. 4).

Следовательно, можно утверждать, что произвольная СБФ пяти переменных может быть реализована с помощью десяти ЛАП и пяти предикатов. Полученный результат имеет важное значение для теории ПФ, так как он утверждает, что любую СБФ пяти переменных можно реализовать в некотором смысле проще, чем на десяти "пороговых элементах", каждый из которых представляет собой ЛАП и предикат. Анализ ГС (рис. 4) показывает, что приведение всех предикатов к виду

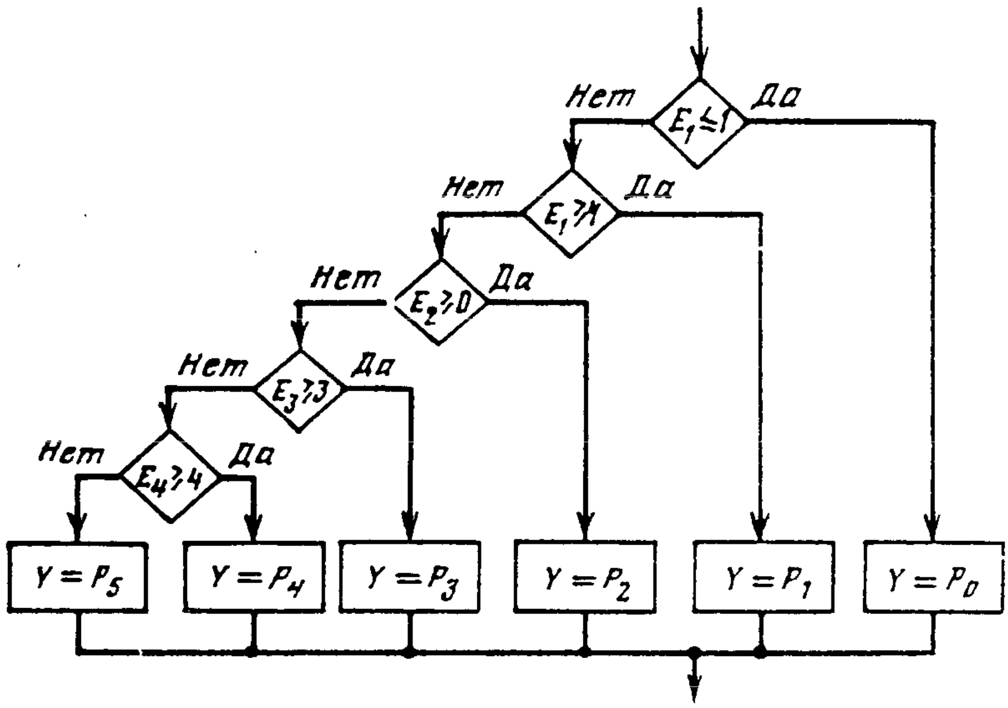

Рис. 4

$E_i' \geqslant 0$ также позволяет использовать циклическую ГС (рис. 3 при $n = 5$). При этом

$$(26)\qquad \begin{bmatrix} E_0' \\ E_1' \\ E_2' \\ E_3' \\ E_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Построить на основании указанных выше соотношений ЛАП для СБФ, транспонированный столбец значений которой имеет вид: $[Y]^T = [2, 4, 4, 7, 5, 7, 7, 5, 4, 6, 6, 5, 7, 5, 5, 7, 4, 6, 6, 5, 7, 5, 5, 7, 6, 4, 4, 7, 5, 7, 7, 13]$.

В матричной форме найденные ЛАП записываются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ -17 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 11 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -1 & -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Эти ЛАП совместно с (25) используются в ГС рис. 4, а совместно с (26) – в ГС рис. 3.

7. Реализация систем булевых функций n переменных

При $n \geqslant 6$ нахождение соотношений для реализации СБФ с помощью минимального числа ЛАП весьма трудоемко. Поэтому при $n \geqslant 6$ предлагается использовать разложение Шеннона с целью представления заданной СБФ в виде совокупности остаточных СБФ, каждая из которых зависит не более чем от пяти переменных. При этом построение ЛАП для реализации каждой из полученных СБФ осуществляется на основе соотношений, приведенных в предыдущих разделах.

Разложение Шеннона, естественно, может использоваться и при $n < 6$. На рис. 5

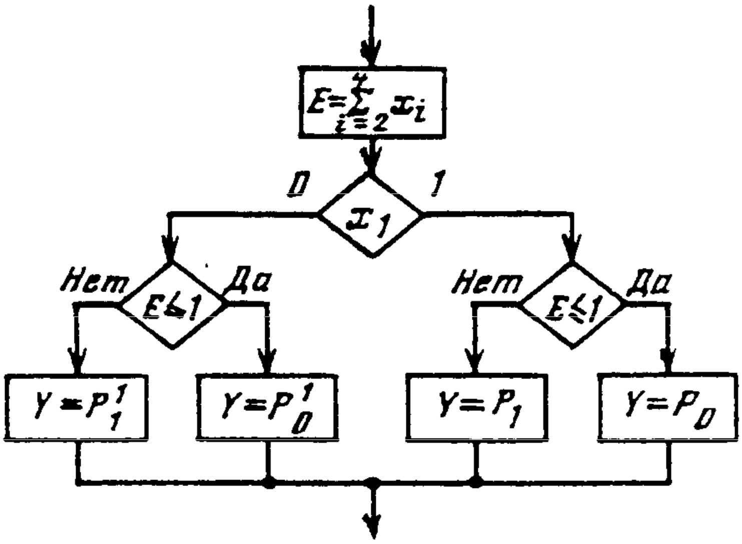

Рис. 5

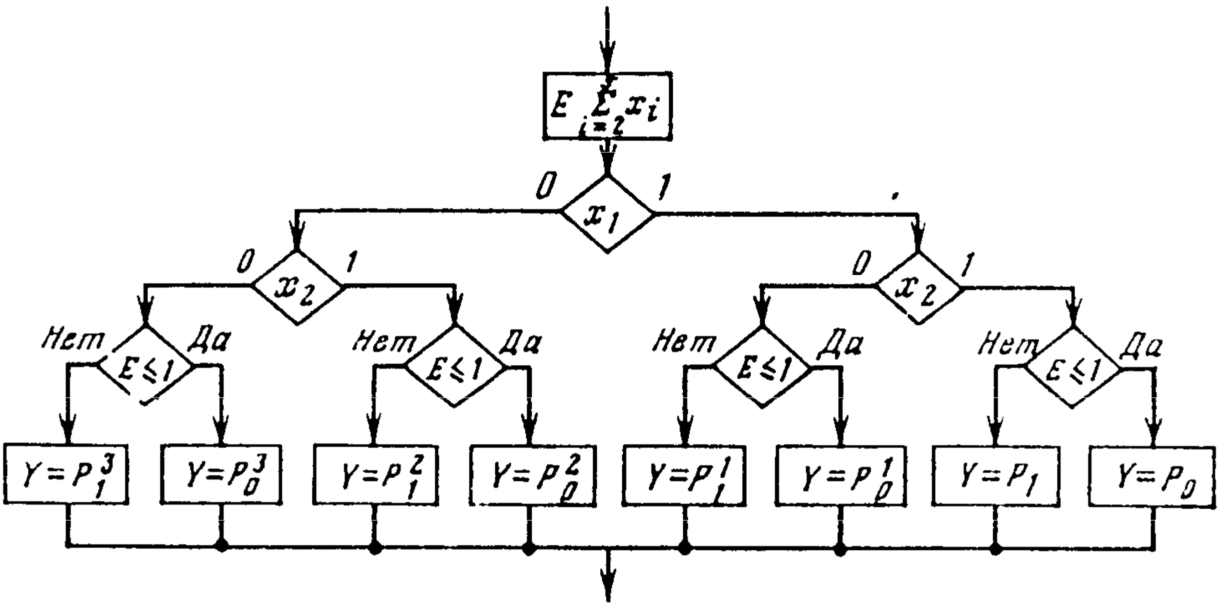

Рис. 6

приведена ГС, реализующая произвольную СБФ при $n = 4$, остаточными в которой являются СБФ трех переменных. Сравнение ациклических ГС, представленных на рис. 2 и 5, показывает, что их сложность совпадает, но последняя более однородна. Использование разложения Шеннона с остаточными СБФ трех переменных при $n = 5$ приводит к построению ГС с общим числом ЛАП, равным девяти, и семью УВ (рис. 6), в то время как ГС (рис. 4) содержит десять ЛАП и пять УВ. Отметим при этом, что первый вариант ГС содержит существенно меньшее число коэффициентов (35 вместо 53).

Из изложенного следует, что использование ЛАП для $n = 4$ и $n = 5$ в ациклических ГС не дает особых преимуществ по сравнению со структурами, использующими разложение Шеннона и ЛАП для $n = 3$.

Однако, как следует из рис. 3, циклическая реализация делает весьма эффективным применение найденных выше соотношений для вычисления коэффициентов ЛАП при $n = 4$ и $n = 5$.

Построение ЛАП для СБФ четырех переменных

Нулевая группа состоит из значений СБФ на БВН. Значения коэффициентов ЛАП для этой группы вычисляются на основе (15).

Первую группу сформируем на основании (12) и (13). Полагая $X_1 = 15$, получим, что $X_2 = 14$, $X_3 = 13$, $X_4 = 11$, $X_5 = 7$. Для этих наборов (5) приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} y_7 \\ y_{11} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

В силу того, что при этом $[DC]^{-1} = [DC]$,

$$\text{(П.1)} \quad \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_7 \\ y_{11} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (7) для $n = 4$ найденное равенство, получим (16).

Разобьем оставшиеся шесть наборов на две группы и определим для каждой из них ЛАП. В силу того, что в наборах 3, 5, 6 старший разряд равен нулю, а в наборах 9, 10, 12 – единице, сформируем вторую и третью группы по указанному признаку: (3, 5, 6) и (9, 10, 12). Запишем УЛ для каждой из этих групп:

$$\text{(П.2)} \quad \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

$$\text{(П.3)} \quad \begin{bmatrix} y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Так как в рассматриваемых системах число переменных превышает количество уравнений, то эти системы могут иметь множество решений. В качестве одного из них (для (II.2) и (II3) соответственно) получим:

$$\begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{bmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в (7) при $n = 4$, получим (17) и (18).

Использование условий лииейности для упрощения реализации (на примере СБФ четырех переменных)

Предложенная в настоящей работе алгоритмическая структура (рис. 2) универсальна при указанном числе переменных.

Однако до использования этой структуры целесообразно проверить УЛ (5) при $n = 4$:

$$\text{(II.4)} \qquad \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

выполнение которого обеспечивает реализацию СБФ одним ЛАП (P_0). Если УЛ не проверять, а сразу применять соотношения для вычисления коэффициентов ЛАП, то ГС будет содержать более одного полинома.

Так, например, для СБФ $[Y]^T = [5, 7, 6, 8, 2, 4, 3, 5, 6, 8, 7, 9, 3, 5, 4, 6]$ УЛ выполняется и поэтому $P_0 = 5 + 2x_4 + x_3 - 3x_2 + x_1$.

Если УЛ (II.4) не выполняется (как это имеет место для СБФ (табл. 3)), то целесообразно определить менее жесткие ограничения (УЛ второго порядка – УЛ2), позволяющие реализовать СБФ с помощью ГС (рис. 1), содержащей лишь два ЛАП: P_0 и P_1.

Сформулируем УЛ2 для $n = 4$. Для этого запишем УЛ (П.4) для шести наборов, не вошедших в нулевую и первую группы (раздел 5):

$$(\Pi.5)\qquad \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения условия, при выполнении которого ЛАП, реализующий значения СБФ на наборах первой группы, также обеспечивает вычисление значений СБФ на искомых шести наборах, подставим (П.1) в (П.5):

$$(\Pi.6)\qquad \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_7 \\ y_{11} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{bmatrix}.$$

Это соотношение является искомым УЛ2.

Например, для СБФ вида $[Y]^T = [3, 5, 4, 11, 0, 10, 11, 12, 4, 6, 7, 8, 6, 7, 8, 9]$ УЛ не выполняется, в то время как УЛ2 реализуется.

При этом $P_0 = 3 + 2x_4 + x_3 - 3x_2 + x_1$, $P_1 = 8 + x_4 + 2x_3 + x_2 - 3x_1$.

В случае, если УЛ2 не выполняется, необходимо проверить УЛ третьего порядка (УЛ3), обеспечивающее реализацию СБФ с использованием трех ЛАП. Сформулируем это условие.

Для его выполнения необходимо, чтобы значения СБФ на наборах третьей группы могли быть реализованы ЛАП, найденным для второй группы. В разделе 5 вторая группа была сформирована из наборов с номерами 3, 5, 6, и поэтому, подставляя (П.6) в соотношение (П.4), получим УЛ3:

$$(\Pi.7)\qquad \begin{bmatrix} y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}.$$

Например, для СБФ вида $[Y]^T = [3, 4, 5, 5, 4, 5, 6, 13, 4, 4, 5, 12, 5, 13, 6, 14]$ УЛ и УЛ2 не выполняется, но удовлетворяется УЛ3. При этом $P_0 = 3 + x_4 + 2x_3 + x_2 + x_1$, $P_1 = 2 + 8x_4 + x_3 + 2x_2 + x_1$; $P_2 = 4 + x_3 + x_2$. В ГС (рис. 2) исключается УВ $x_1 \leqslant 0$ и четвертый полином.

Необходимо отметить, что при ином способе формирования групп могут быть получены другие УЛ второго и третьего порядков.

Таким образом, можно утверждать, что после выполнения УЛ j-го порядка в канонической алгоритмической структуре (рис. 2) могут быть исключены ЛАП (и соответствующие УВ), начиная с номера j.

Аналогичные УЛ, включая УЛ четвертого порядка, могут быть получены и для $n = 5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюгин В.Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1982. № 4. С. 84–93.
2. *Малюгин В.Д.* О полиномиальной реализации кортежа булевых функций // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 6. С. 1338–1341.

3. *Малюгин В.Д.* Реализация кортежей булевых функций посредством линейных арифметических полиномов // АиТ. 1984. № 2. С. 114–122.
4. *Ефремов В.Д., Кузьмин А.А., Степанов В.А.* Вычисление логических функций с использованием преобразований Радемахера // АиТ. 1984. № 2. С. 105–113.
5. *Малюгин В.Д., Кухарев Г.А., Шмерко В.П.* Преобразования полиномиальных форм булевых функций. Препринт. М.: Ин-т проблем управления. 1986.
6. *Малюгин В.Д.* Реализация систем логических функций посредством арифметических полиномов // Computers and Artificial Inteligence. 1987. № 6. С. 541–552.
7. *Артюхов В.Л., Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1988. № 4. С. 138–147.
8. *Осипов В.А., Шалыто А.А., Кондратьев В.Н.* Программная реализация алгоритмов логического управления в судовых системах. Методические разработки. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1988.
9. *Шалыто А.А.* Реализация алгоритмов судовых управляющих логических систем при использовании микропроцессорной техники. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1988.
10. *Шмерко В.П.* Синтез арифметических форм булевых функций посредством преобразования Фурье // АиТ. 1989. № 5. С. 134–142.
11. *Артюхов В.Л., Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Использование линейных арифметических полиномов при реализации систем логического управления // XI Всесоюз. совещ. по проблемам управления. Тез. докл. М.: АН СССР, 1989. С. 495–496.
12. *Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Реализация алгоритма управления посадкой плавучей полупогружной буровой установкой линейными арифметическими полиномами // Тез. докл. VIII Всесоюз. научно-техн. конф. "Проблемы комплексной автоматизации технических средств". Л.: ВНТО им. академика А.Н. Крылова, 1989. С. 79.
13. *Головина Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985.
14. *Шалыто А.А., Кондратьев В.Н.* Методы программной реализации алгоритмов логического управления для судовых микропроцессорных систем. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1990.
15. *Поспелов Д.А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.
16. *Muroga S., Toda I., Kondo M.* Majority desision function of up to six variables // Mathematics of Computation. 1962. V. 16. Oct. № 80. P. 132–150.
17. *Дертоузос М.* Пороговая логика. М.: Мир, 1967.
18. *Бутаков Е.А.* Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М.: Энергия, 1970.

Поступила в редакцию 22.05.92

Российская академия наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

3
МАРТ

·Наука·Москва
1993