Автоматика и телемеханика, № 3, 1997

Автоматы

УДК 517.987

© 1997 г. **В.Н. КОНДРАТЬЕВ,
А.А. ШАЛЫТО, канд. техн. наук
(НПО "АВРОРА", Санкт-Петербург)**

РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С МАСКИРОВАНИЯМИ

Предложен метод реализации систем линейно представимых булевых функций (пороговых, порогово-линейных и линейных функций) одним линейным арифметическим полиномом с маскированиями (ЛАПМ). Изложен более эффективный, чем известный, метод реализации произвольных систем булевых функций (СБФ) двумя ЛАМП. Предлагается метод реализации произвольных СБФ системой ЛАПМ. Изложен метод реализации произвольных СБФ одним линейным арифметическим полиномом с условными маскированиями и операторами присваивания.

1. Введение

При использовании в системах логического управления микропроцессоров и микро-ЭВМ появляется возможность применения нетрадиционных методов реализации систем булевых функций (СБФ), базирующихся на широких арифметических возможностях указанных технических средств. Одним из таких методов является реализация СБФ с помощью арифметических полиномов (АП) [1–15].

В общем случае арифметический полином для СБФ n переменных является нелинейным (НАП) (повторным), содержит 2^n членов, и поэтому с ростом n вычисление полинома значительно усложняется.

Особую важность при этом представляет реализация СБФ с помощью линейных (бесповторных) АП (ЛАП), так как вычисление таких полиномов сводится к суммированию коэффициентов при переменных, значения которых равны единице.

Вопросы реализации СБФ линейными АП исследованы далеко недостаточно.

В [7] определено условие линейности (УЛ), выполнение которого обеспечивает реализацию кортежа булевых функции (БФ) n переменных одним безызбыточным [15] ЛАП тех же переменных. Однако, это условие выполняется лишь для ограниченного класса кортежей функций.

Расширение класса функций, реализуемых ЛАП, обеспечивается при введении избыточности – реализации наряду с заданной СБФ еще и некоторых других функций [1]. При этом ЛАП вычисляет на входном наборе десятичное значение расширенного кортежа функций, при двоичном представлении которого в соответствующих разрядах будут находиться значения функций заданной системы на этом наборе.

Операцию выделения ℓ-го разряда, считая младший разряд первым, в m-разрядном двоичном представлении десятичного числа будем называть маскированием и обозначать r_m^ℓ, а операцию преобразования десятичного числа в двоичное – символом bin.

ЛАП, к которому для выделения разрядов в двоичном представлении вычисленного по нему десятичного числа применяются операции маскирования, будем называть ЛАП с маскированиями.

В [13, 15] предложены методы реализации одним ЛАПМ одиночных БФ, принадлежащих классам пороговых (ПФ), порогово-линейных (ПЛФ) и линейных (ЛФ) функций. Однако, вопрос об эффективной реализации СБФ, принадлежащих указанным классам, линейными арифметическими полиномами с маскированиями остается открытым.

Единственным конструктивным методом реализации с помощью ЛАПМ произвольных СБФ является метод, изложенный в [3]. Метод применим к СБФ, заданной системой булевых формул, каждая из которых представляется в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ).

В [3] доказано, что произвольный кортеж БФ может быть реализован суперпозицией линейных полиномов глубины не более трех. При этом используются три типа линейных полиномов: ЛАПМ конъюнкций, реализующий все различные конъюнкции системы; ЛАПМ дизъюнкций, вычисляющий все дизъюнкции, образующиеся из системы ДНФ после замены буквами соответствующих конъюнкций; ЛАП переключений, осуществляющий формирование разрядов результата в порядке, определяемом кортежем функций.

Из изложенного следует, что если говорить о реализации не кортежа функций, а СБФ, то на основании [3] можно утверждать, что произвольная СБФ всегда может быть реализована суперпозицией двух ЛАПМ, первый из которых является полиномом конъюнкций, а второй – полиномом дизъюнкций.

Достоинством метода, изложенного в [3], является его универсальность, а недостатки состоят в следующем:

используется неудачное обозначение операций маскирования;

одиночные переменные рассматриваются в качестве конъюнкций, что резко увеличивает значения коэффициентов полинома конъюнкций;

не используются формы функций, отличные от ДНФ, что не позволяет реализовать все линейно представимые функции одним ЛАПМ и резко увеличивает значения коэффициентов полинома конъюнкций, а также сложность полинома дизъюнкций. При этом отметим, что число различных конъюнкций в ДНФ, получаемой за счет раскрытия скобок в произвольной формуле в базисе И и ИЛИ из h букв, может достигать величины [16]:

$$S = \begin{cases} 3^{\frac{h}{3}} & \text{при } \bmod_3 h = 0, \\ 4 * 3^{\frac{h-4}{3}} & \text{при } \bmod_3 h = 1, \\ 2 * 3^{\frac{h-2}{3}} & \text{при } \bmod_3 h = 2, \end{cases}$$

где $*$ – символ операции “умножение”;

не позволяет с целью уменьшения вычислительной сложности использовать суперпозиции, состоящие из трех и более ЛАПМ.

Цель настоящей работы состоит в разработке методов реализации произвольной системы БФ, принадлежащих указанным выше классам, одним ЛАПМ, а произвольной СБФ – либо системой ЛАПМ, либо одним ЛАП с условными маскированиями и операторами присваивания. Предлагаемые методы устраняют указанные выше недостатки известного метода.

2. Реализация систем линейно представимых функций одним линейным арифметическим полиномом с маскированиями

2.1. Метод построения линейного полинома. *Булева функция, реализуемая одним ЛАПМ, называется линейно представимой.*

В [13, 15] показано, что ПФ, ПЛФ и ЛФ линейно представимы.

Теорема 1. Произвольная система N линейно представимых функций n переменных также линейно представима полиномом, зависящим от n переменных, то есть всегда может быть реализована одним линейным арифметическим полиномом n переменных и N маскированиями.

Эта теорема доказывается тем, что всегда можно построить один линейный арифметический полином P, маскирования разрядов которого порождают N линейно представимых функций, если

$$(1) \qquad P = 2^{\beta_1+\ldots+\beta_{N-1}} * P^N_{\beta_N} + \ldots + 2^{\beta_1+\beta_2} * P^3_{\beta_3} + 2^{\beta_1} * P^2_{\beta_2} + 2^0 * P^1_{\beta_1},$$

где $P^i_{\beta_i}$ – ЛАПМ i-й булевой функции, двоичное представление результатов вычислений которой занимает β_i разрядов.

Этот результат чрезвычайно ВАЖЕН ДЛЯ ТЕОРИИ ПОРОГОВЫХ ФУНКЦИЙ, так как, в частности, утверждает, что любая система из N указанных функций реализуется одним линейным полиномом с N маскированиями, что по эквивалентной сложности существенно проще, чем N пороговых элементов.

Отметим, что при использовании (1) двоичное представление результатов вычислений по ЛАПМ занимает

$$(2) \qquad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_N$$

разрядов.

При применении предлагаемого подхода полиномы функций могут объединяться в порождающий полином в различном порядке. Это может породить до N факториал различных порождающих полиномов, которые, однако, по вводимому ниже критерию имеют одинаковую сложность.

Структуры линейных полиномов отличаются друг от друга существенно меньше, чем структура нелинейных АП [1, 7], так как в первом случае она определяется $n+1$ коэффициентами, а во втором – 2^n коэффициентами. В первом случае полином существенно зависит от всех n переменных, если он содержит по крайней мере n ненулевых коэффициентов при одиночных переменных, а во втором – он может существенно зависеть от всех n переменных даже при наличии только одного ненулевого коэффициента с номером $2^n - 1$ [7].

Будем характеризовать каждый полином P, существенно зависящий от n переменных, величиной вычисляемого им максимального десятичного значения, обозначаемого символом $|P|$. При этом считается, что тот полином, существенно зависящий от n переменных, проще, у которого величина $\beta =]\log_2|P|[$ меньше, где $]x[$ – символ округления числа x до ближайшего большего целого.

Отметим также, что из двух ЛАП, существенно зависящих от разного числа переменных, более простым считается тот из них, у которого число переменных меньше.

Пример 1. Проверить линейную представимость функций $f1 = (x1\,|\,x2)\&x3\,|\,|\,x1\&x2$; $f2 = !x1\,|\,!x2\,|\,!x3$; $f3 = (!x1\,|\,!x2)\&!x3$, где !, & и | – символы операций “инверсия”, “конъюнкция” и “дизъюнкция” соответственно, и реализовать эти функции одним ЛАПМ в случае положительных результатов проверки.

Используя методы, изложенные в [13, 15], можно установить, что каждая функция является пороговой и поэтому линейно представимой: $f1 = r^2_2(\mathrm{bin}(x1+x2+x3))$; $f2 = r^3_3(\mathrm{bin}(6 - x1 - x2 - x3))$; $f3 = r^3_3(\mathrm{bin}(5 - x1 - x2 - 2 * x3))$.

Эти функции могут быть порождены полиномами, каждый из которых в результате вычислений формирует восьмиразрядное двоичное число ($\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2 + 3 + 3 = 8$).

Используя соотношение (1), получим: $P1 = 2^6 * (x1 + x2 + x3) + 2^3 * (6 - x1 - x2 - x3) + 2^0 * (5 - x1 - x2 - 2 * x3)) = 53 + 55 * x1 + 55 * x2 + 54 * x3$; $|P1| = 217$; $\beta 1 = 8$; $f1 = r^8_8(\mathrm{bin}\ P1)$; $f2 = r^6_8(\mathrm{bin}\ P1)$; $f3 = r^3_8(\mathrm{bin}\ P1)$.

$x1$	$x2$	$x3$	$P1$	$f1=r_8^8$	r_8^7	$f2=r_8^6$	r_8^5	r_8^4	$f3=r_8^3$	r_8^2	r_8^1
0	0	0	53	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	107	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	108	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	162	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	108	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	162	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	163	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	217	1	1	0	1	1	0	0	1

Приведем программу на языке СИ, реализующую полученные соотношения:

```
lapm (int x1, int x2, int x3, int P1, int f1, int f2, int f3)
   { P1 = 53 + 55 * x1 + 55 * x2 + 54 * x3;
     f1 = P1 >> 7;
     f2 = (P1 >> 5) & 1;
     f3 = (P1 >> 2) & 1},
```

где $\gg L$ – символ операции “сдвиг на L двоичных разрядов вправо”.

Соотношения для полинома $P1$ иллюстрируются табл. 1.

Запишем формулы для БФ, приведенных в табл. 1 : $f1 = r_8^8 = (x1 \mid x2) \& x3 \mid x1\& \& x2$; $r_8^7 = x1 \oplus x2 \oplus x3$; $f2 = r_8^6 = !x1 \mid !x2 \mid !x3$; $r_8^5 = !x1\&!x2\&!x3 \mid x1\&x2\&x3 = ((x1 \mid !x3)\&!x2 \mid x1\&!x3) \oplus x1$; $r_8^4 = x1 \oplus x2 \oplus x3$; $f3 = r_8^3 = (!x1 \mid !x2)\&!x3$; $r_8^2 = !x1\& \&x3 \mid x1\&(!x2\&x3 \mid x2\&!x3) = x1\&x2 \oplus x3$; $r_8^1 = x1 \oplus x2$.

При этом восьмая, шестая и третья функции являются ПФ, пятая и вторая – ПЛФ, а седьмая, четвертая и первая – ЛФ.

Отметим, что для построения формул, реализующих ПЛФ, в общем случае используются соотношения (9) и (10) из [15].

Аналогично рассмотренному могут быть построены ЛАПМ и для других кортежей функций $f1$, $f2$, $f3$. Так, например, для кортежа $f3 \# f1 \# f2$, где $\#$ – символ оператора объединения функций в кортеж, искомый полином имеет вид: $P2 = 166 - 25 * x1 - 25 * x2 - 57 * x3$. При этом $|P2| = 166$; $\beta 2 = 8$; $f3 = r_8^8(\text{bin } P2)$; $f1 = r_8^5(\text{bin } P2)$; $f2 = r_8^3(\text{bin } P2)$.

Пример 2. Реализовать систему линейно представимых функций (СЛПФ): $f1 = x1\&x2\&x3 = r_3^3(\text{bin}(1 + x1 + x2 + x3))$; $f2 = !x1\&!x2\&!x3 = r_3^3(\text{bin}(4 - x1 - x2 - x3))$; $f3 = x1 \mid x2 \mid x3 = r_3^3(\text{bin}(3 + x1 + x2 + x3))$; $f4 = !x1 \mid !x2 \mid !x3 = r_3^3(\text{bin}(6 - x1 - x2 - x3))$, приведенную в примере 1 приложения [3].

Так как все функции СБФ линейно представимы, то: $P = 798 + 455 * x1 + 455 * x2 + 455 * x3$; $f1 = r_{12}^{12}(\text{bin } P)$; $f2 = r_{12}^9(\text{bin } P)$; $f3 = r_{12}^6(\text{bin } P)$; $f4 = r_{12}^3(\text{bin } P)$.

Пример 3. Реализовать СЛПФ $f3 = x1\&!x2\&x3\&!x4 = r_3^3(\text{bin}(2 + x1 - x2 + x3 - x4))$; $f2 = x2 \mid x3\&x4 = r_3^3(\text{bin}(2+2*x2+x3+x4))$; $f1 = x1 \mid x2 = r_2^2(\text{bin}(1+x1+x2))$, приведенную в примере 2 приложения [3].

Так как все функции системы линейно представимы, то, исходя из изложенного, $P = 73 + 33 * x1 - 23 * x2 + 36 * x3 - 28 * x4$; $f3 = r_8^8(\text{bin } P)$; $f2 = r_8^5(\text{bin } P)$; $f1 = r_8^2(\text{bin } P)$.

В [3] эта система реализуется существенно сложнее – двумя ЛАП с семью маскированиями.

2.2. Оптимизация полинома. Первый подход. Если полиномы при объединении “не портят” разрядов порождающего полинома, в которых формируются значения

Таблица 2

$x1$	$x2$	$x3$	$P2$	$2^3*(1+3*x1-x2+x3)$			$2^0*(x1+x2+2*x3)$		
				r_6^6	$f2=r_6^5$	r_6^4	r_6^3	$f1=r_6^2$	r_6^1
0	0	0	8	0	0	1	0	0	0
0	0	1	18	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	11	0	0	1	0	1	1
1	0	0	33	1	0	0	0	0	1
1	0	1	43	1	0	1	0	1	1
1	1	0	26	0	1	1	0	1	0
1	1	1	36	1	0	0	1	0	0

Таблица 3

$x1$	$x2$	$x3$	$P3$	r_5^5	$f2=r_5^4$	r_5^3	$f1=r_5^2$	r_5^1
0	0	0	4	0	0	1	0	0
0	0	1	10	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	7	0	0	1	1	1
1	0	0	17	1	0	0	0	1
1	0	1	23	1	0	1	1	1
1	1	0	14	0	1	1	1	0
1	1	1	20	1	0	1	0	0

заданных функций, то последний может быть построен таким образом, чтó ему будет соответствовать число разрядов меньшее, чем в соответствии с $(1, 2)$.

Пример 4. Реализовать СЛПФ $f1 = x1\&x2 \oplus x3 = r_3^2(\text{bin}(x1 + x2 + 2*x3))$; $f2 = !x1\&!x2\&x3 \,|\, x1\&x2\&!x3 = r_3^2(\text{bin}(1 + 3*x1 - x2 + x3))$ простейшим ЛАПМ.

Используя (1), можно получить два ЛАПМ: $P1 = 2^3*(x1+x2+2*x3)+2^0*(1+3*x1-x2+x3) = 1+11*x1+7*x2+17*x3$; $|P1| = 36$; $\beta 1 = 6$; $f1 = r_6^5(\text{bin } P1)$, $f2 = r_6^2(\text{bin } P1)$; $P2 = 2^3*(1+3*x1-x2+x3)+2^0*(x1+x2+2*x3) = 8+25*x1-7*x2+10*x3$; $|P2| = 43$; $\beta 2 = 6$; $f2 = r_6^5(\text{bin } P2)$, $f1 = r_6^2(\text{bin } P2)$.

Соотношения для полинома $P2$ иллюстрируются табл. 2.

Запишем формулы для БФ, приведенных в табл. 2: $r_6^6 = x1\&(!x2 \,|\, x3)$; $r_6^5 = f2 = !x1\&!x2\&x3 \,|\, x1\&x2\&!x3 = ((x1 \,|\, x2)\&x3 \,|\, x1\&x2) \oplus x3$; $r_6^4 = 1 \oplus x1 \oplus x2 \oplus x3$; $r_6^3 = x1\&x2\&x3$; $r_6^2 = f1 = x1\&x2 \oplus x3$; $r_6^1 = x1 \oplus x2$. При этом шестая и третья функции являются пороговыми, пятая и вторая – порогово-линейными, а четвертая и первая – линейными.

В силу того, что арифметическое сложение значений "младшей" функции (r_6^4), порождаемой ЛАП для $f2$, и "старшей" функции (r_6^3), порождаемой ЛАП для $f1$, не образует переносов при всех входных наборах, то полиномы для $f2$ и $f1$ могут быть объединены "плотнее", чем в соответствии с (1): $P3 = 2^2*(1+3*x1-x2+x3)+2^0*(x1+x2+2*x3) = 4+13*x1-3*x2+6*x3$; $|P3| = 23$; $\beta 3 = 5$; $f2 = r_5^4(\text{bin } P3)$; $f1 = r_5^2(\text{bin } P3)$.

Полученные соотношения иллюстрируются табл. 3.

Запишем формулы для БФ, приведенных в табл. 3: $r_5^5 = x1\&(!x2 \,|\, x3)$; $r_5^4 = f2 = ((x1 \,|\, x2)\&x3 \,|\, x1\&x2) \oplus x3$; $r_5^3 = S_{0,2,3}^3 = !x1\&!x2\&!x3 \,|\, (x1 \,|\, x2)\&x3 \,|\, x1\&x2 =$

$= (!x1\&!x2 \mid x1\&x2\&!x3) \oplus x3 = (x1\&x3 \mid !x2) \oplus x1 \oplus x3$; $r_5^2 = f1 = x1\&x2 \oplus x3$; $r_5^1 = x1 \oplus x2$. При этом пятая функция является пороговой, четвертая, третья и вторая – порогово-линейными, а первая – линейной.

Приведенные примеры, а также ряд других, рассмотренных авторами, позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза. Линейный арифметический полином порождает только пороговые, порогово-линейные и линейные функции, причем крайняя слева функция в двоичном представлении результатов вычислений по этому полиному всегда пороговая, а крайняя справа – всегда линейная функция.

Авторы также предполагают, что при $n \geqslant 3$, $\beta \geqslant 3$, в двоичном представлении результатов вычислений по ЛАП с маскированием, построенному с помощью методов, изложенных в [15], для реализации одной булевой функции указанных классов, в средних разрядах размещаются только порогово-линейные функции.

Такими ЛАПМ, в частности, являются полиномы для формул $f2$ и $f3$ из примера 1 и полиномы для формул $f1$ и $f2$ из примера 4.

Вновь возвращаясь к предлагаемому методу оптимизации полиномов, рассмотрим еще один пример.

Пример 5. Реализовать СЛПФ $f1 = x1\&!x3 \mid x2 = r_3^3(\text{bin}(3 + x1 + 2 * x2 - x3))$; $f2 = x1\&!x3 \oplus x2 = r_3^2(\text{bin}(1 + x1 + 2 * x2 - x3))$ простейшим ЛАПМ.

В силу того, что и в этом случае отсутствуют переносы при "наложении" полиномов, то объединим их более "плотно", чем в соответствии с (1): $P = 2^2 * (3 + x1 + {}$ $+2 * x2 - x3) + 2^0 * (1 + x1 + 2 * x2 - x3) = 13 + 5 * x1 + 10 * x2 - 5 * x3$; $f1 = r_5^5(\text{bin } P)$; $f2 = r_5^2(\text{bin } P)$.

2.3. Оптимизация полинома. Второй подход. Изложенный подход для рассматриваемых классов функций универсален, однако, не всегда эффективен. Продемонстрируем это на примере.

Пример 6. Реализовать СЛПФ $f1 = x1 \mid x2 = r_2^2(\text{bin}(1+x1+x2))$; $f2 = x1 \oplus x2 = {}$ $= r_2^1(\text{bin}(x1 + x2))$.

Используя предложенный метод, получим: $P = 2^2 * (1 + x1 + x2) + 2^0 * (x1 + x2) = {}$ $= 4 + 5 * x1 + 5 * x2$; $f1 = r_4^4(\text{bin } P)$; $f2 = r_4^1(\text{bin } P)$.

С другой стороны, анализируя, какой кортеж функций реализует первый из заданных полиномов, можно установить, что он порождает и вторую функцию, и поэтому объединять полиномы нет необходимости.

Учитывая изложенное, предложенный подход можно усовершенствовать:

реализовать ЛАПМ каждую из заданных функций;

для каждого ЛАПМ определить, какие функции он реализует;

определить, не реализуются ли какие-либо другие функции системы полиномом, реализующим одну из функций системы, и в случае, если это имеет место, исключить из состава системы "поглощаемые" функции;

в ЛАПМ объединяются поглощающие ЛАПМ и ЛАПМ, соответствующие функциям, которые не поглощены.

Пример 7. Реализовать СЛПФ $f1 = x1\&x2 = r_2^2(\text{bin}(x1 + x2))$; $f2 = x1 \mid x2 = {}$ $= r_2^2(\text{bin}(1 + x1 + x2))$; $f3 = x1 \oplus x2 = r_2^1(\text{bin}(x1 + x2))$.

Используя (1), получим: $P1 = 2^4 * (x1 + x2) + 2^2 * (1 + x1 + x2) + 2^0 * (x1 + x2) = {}$ $= 4 + 21 * x1 + 21 * x2$; $f1 = r_6^6(\text{bin } P1)$; $f2 = r_6^4(\text{bin } P1)$; $f3 = r_6^1(\text{bin } P1)$.

Применяя второй метод оптимизации, получим: $P2 = 2^2 * (x1 + x2) + 2^0 * (1 + {}$ $+x1 + x2) = 1 + 5 * x1 + 5 * x2$; $f1 = r_4^4(\text{bin } P2)$; $f2 = r_4^2(\text{bin } P2)$; $f3 = r_4^3(\text{bin } P2)$.

Пример 8. Реализовать СЛПФ $f1 = (x1 \mid x2)\&x3 \mid x1\&x2 = r_2^2(\text{bin}(x1+x2+x3))$; $f2 = x1 \oplus x2 \oplus x3 = r_2^1(\text{bin}(x1 + x2 + x3))$.

Из описания заданных функций следует: $P = x1 + x2 + x3$; $f1 = r_2^2(\text{bin } P)$; $f2 = {}$ $= r_2^1(\text{bin } P)$.

В разделе 2.1 первый ЛАПМ был реализован программой-компилятором. Последние соотношения, приведенные в настоящем примере, реализуем программой-интерпретатором, также записанной на языке СИ, которая настраивается на реализацию ЛАП, существенно зависящего от n переменных, заданием только $(n+1)$-го коэффициентов, а на реализацию N маскирований – заданием $m = N$ коэффициентов:

```
lapmi (int x[ ])
{ int y = 0, yk, i, n = 3, m = 2;
  /* ms – маски каждой функции */
  int ms[2] = {2, 1};
  /* коэффициенты линейного полинома */
  int ya[4] = {0, 1, 1, 1};
  yk = ya[0];
  for (i = 0; i < n; i++)
     if (x[i])
       yk += ya[i + 1];
  for (i = 0; i < m; i++)
     if (yk & ms[i]) y |= 1 << (m - i - 1); }.
```

2.4. Сравнение с известными методами. Достоинства предлагаемого подхода изложены в предыдущих разделах.

Покажем теперь, что в отдельных случаях он менее эффективен, чем методы [1, 7], ориентированные на объединение НАП.

Например, кортеж функций $f1$ # $f2$ # $f3$, рассмотренных в примере 7, реализуется с помощью методов [1, 7] линейным безызбыточным полиномом, более простым, чем приведенные в указанном примере полиномы: $P3 = 2^2 * x1 * x2 + 2^1 * (x1 + x2 - x1 * {}* x2) + 2^0 * (x1 + x2 - 2 * x1 * x2) = 3 * x1 + 3 * x2$; $f1 = r_3^3(\text{bin } P3)$; $f2 = r_3^2(\text{bin } P3)$; $f3 = r_3^1(\text{bin } P3)$.

В этом случае получился ЛАП, так как для заданного кортежа выполняется УЛ. При этом отметим, что если для рассматриваемого кортежа УЛ не выполняется, то оно может выполняться для другого кортежа (порядка расположения) этих же функций. Например, УЛ несправедливо в данном случае для кортежа $f1$ # $f3$ # # $f2$, и поэтому этот кортеж не может быть реализован ЛАП. УЛ весьма "жестко" и выполняется сравнительно редко, в то время как предлагаемый метод для рассматриваемых классов функций универсален.

Иногда вместо использования ЛАПМ бывает целесообразно применять НАП, сложность которого, однако, априори не предсказуема. Так, например, в [6] показано, что кортеж $f1$ # $f2$ # $f3$, где $f1 = x1\&(x2 \,|\, x3)$; $f2 = x1\&!x3 \,|\, x2$; $f3 = {} = x1\&!x3 \oplus x2$, реализуется простым НАП $P1 = 3 * x1 + 3 * x2 + x1 * x3$, в то время как простейший ЛАПМ, полученный "наложением" полиномов для функций $f2$ и $f3$, существенно более сложен: $P2 = 45 + 69 * x1 + 42 * x2 + 27 * x3$; $f1 = r_8^8(\text{bin } P2)$; $f2 = r_8^5(\text{bin } P2)$; $f3 = r_8^2(\text{bin } P2)$.

Несмотря на высказанные замечания, в целом можно утверждать, что авторами для рассматриваемого класса СБФ (линейно представимых булевых функций) решена задача, поставленная в [1]: для заданной СБФ определить количество, вид и место расположения дополнительных функций, упрощающих полином, реализующий эту систему. Более того, решена и другая задача: каким образом для рассматриваемого класса СБФ, если условие линейности не выполняется, без перебора определить количество, вид и место расположения дополнительных функций таких, чтобы указанное условие выполнялось. При этом метод не требует введения этих функций при синтезе полинома в явном виде, а они могут быть определены в результате его анализа.

3. Реализация систем произвольных булевых функций системой линейных арифметических полиномов с маскированием

На основе подхода, изложенного в разделе 2, предложим метод реализации систем произвольных БФ системой ЛАПМ, состоящий в следующем.

В каждой функции СБФ, заданной формулой, выделяются пороговые, пороговолинейные и линейные фрагменты.

Каждый новый фрагмент обозначается соответствующей буквой, и в исходной системе осуществляется замена выделенных фрагментов буквами.

В результате формируется расширенная СБФ, состоящая из этих фрагментов и преобразованной исходной системы.

Все формулы новой СБФ принадлежат классам пороговых, порогово-линейных и линейных функций, и поэтому их группы могут быть реализованы соответствующими ЛАПМ, число которых не ограничено и зависит от способа выделения фрагментов.

Предлагаемый подход является универсальным, так как произвольная СБФ всегда может быть заменена новой с требуемыми свойствами. Важная особенность предлагаемого подхода состоит в том, что для полиномов, зависящих от одних и тех же переменных, СЛОЖНОСТЬ КАЖДОГО ИЗ НИХ (с точностью до величины коэффициентов) СОВПАДАЕТ СО СЛОЖНОСТЬЮ ОБЪЕДИНЯЮЩЕГО ИХ ПОЛИНОМА, и поэтому объединение, если оно возможно, всегда целесообразно.

Предлагаемый подход обеспечивает возможность параллельной, последовательной или смешанной реализации в зависимости от свойств заданной СБФ.

Из изложенного следует, что метод, предложенный в [3], может рассматриваться как частный случай предлагаемого, во-первых, потому, что фиксирует метод выделения фрагментов и ограничивает число ЛАПМ двумя, а во-вторых, так как позволяет выделять лишь конъюнкции, являющиеся, наряду с формируемыми дизъюнкциями, только малой частью класса линейно представимых функций.

Перейдем к рассмотрению методов выделения фрагментов в СБФ.

3.1. Реализация систем произвольных функций двумя полиномами с маскированиями.

Теорема 2. *Произвольная СБФ всегда может быть реализована не более чем двумя ЛАПМ, первый из которых реализует все разнотипные линейно представимые фрагменты, а второй – все дизъюнкции, формируемые в результате замены в исходной или преобразованной системе формул указанных фрагментов новыми буквами.*

Нижняя оценка числа ЛАПМ относится к классу СБФ, состоящих из линейно представимых функций, а доказательство верхней оценки следует из результатов раздела 2.

Метод, определяемый этой теоремой, строит в общем случае то же число ЛАПМ, что и метод [3], но получающиеся при этом полиномы существенно проще – первый из них имеет меньшие значения коэффициентов, а второй – кроме меньших значений коэффициентов, содержит еще и меньшее число переменных.

Пример 9. Реализовать функцию, описываемую формулой

$$f = (x1 \mid x2)\&(x3 \mid x4) \mid (x5 \mid x6)\&(x7 \mid x8).$$

Так как формула не является линейно представимой, то она не может быть записана одним ЛАПМ. Для реализации функции в виде двух ЛАПМ преобразуем формулу за счет частичного раскрытия скобок. При этом

$$f1 = (x1 \mid x2)\&x3 = r_3^3(\mathrm{bin}(1 + x1 + x2 + 2 * x3));$$
$$f2 = (x1 \mid x2)\&x4 = r_3^3(\mathrm{bin}(1 + x1 + x2 + 2 * x4));$$

$f3 = (x5 \mid x6) \& x7 = r_3^3(\mathrm{bin}(1 + x5 + x6 + 2 * x7))$;
$f4 = (x5 \mid x6) \& x8 = r_3^3(\mathrm{bin}(1 + x5 + x6 + 2 * x8))$;
$f = f1 \mid f2 \mid f3 \mid f4 = r_3^3(\mathrm{bin}(3 + f1 + f2 + f3 + f4))$.

Используя метод, изложенный в разделе 2, реализуем ЛАПМ формулы первого яруса. В результате получим:

$P = 585+576*x1+576*x2+1024*x3+128*x4+9*x5+9*x6+16*x7+2*x8$;
$f1 = r_{12}^{12}(\mathrm{bin}\ P)$; $f2 = r_{12}^{9}(\mathrm{bin}\ P)$; $f3 = r_{12}^{6}(\mathrm{bin}\ P)$; $f4 = r_{12}^{3}(\mathrm{bin}\ P)$;
$f = r_3^3(\mathrm{bin}(3 + f1 + f2 + f3 + f4))$.

Пример 10. Реализовать СБФ $f1 = x1\&x2 \mid x3\&x4$; $f2 = x1\&x2 \mid !x3\&!x4$.

Преобразуем заданную систему к требуемому виду: $f3 = x1\&x2 = r_2^2(\mathrm{bin}(x1 + x2))$; $f4 = x3\&x4 = r_2^2(\mathrm{bin}(x3 + x4))$; $f5 = !x3\&!x4 = r_2^2(\mathrm{bin}(2 - x3 - x4))$; $f1 = f3 \mid f4 = r_2^2(\mathrm{bin}(1 + f3 + f4))$; $f2 = f3 \mid f5 = r_2^2(\mathrm{bin}(1 + f3 + f5))$.

Реализуем формулы $f3$, $f4$, $f5$ одним полиномом, а формулы $f1$ и $f2$ – другим:

$P1 = 2 + 16 * x1 + 16 * x2 + 3 * x3 + 3 * x4$;
$f3 = r_6^6(\mathrm{bin}\ P1)$; $f4 = r_6^4(\mathrm{bin}\ P1)$; $f5 = r_6^2(\mathrm{bin}\ P1)$;
$P2 = 5 + 5 * f3 + 4 * f4 + f5$;
$f1 = r_4^4(\mathrm{bin}\ P2)$; $f2 = r_4^2(\mathrm{bin}\ P2)$.

3.2. “Ярусная” реализация систем булевых функций. В ряде случаев бывает целесообразно реализовать заданную СБФ более чем двумя ЛАПМ. Для этого реализуем заданную СБФ М-ярусной схемой из элементов, описываемых линейно представимыми функциями. Тогда эта схема может быть реализована М-линейными полиномами с маскированиями, причем в один полином могут быть объединены все элементы, отнесенные к одному ярусу схемы.

Пример 11. Реализовать формулу, рассмотренную в примере 9.

Эта формула реализуется трехъярусной схемой, для которой

$f1 = x1 \mid x2$; $f2 = x3 \mid x4$; $f3 = x5 \mid x6$; $f4 = x7 \mid x8$;
$f5 = f1\&f2$; $f6 = f3\&f4$;
$f = f5 \mid f6$.

Реализуем все формулы каждого яруса одним ЛАПМ. При этом

$P1 = 85 + 64 * x1 + 64 * x2 + 16 * x3 + 16 * x4 + 4 * x5 + 4 * x6 + x7 + x8$;
$f1 = r_8^8(\mathrm{bin}\ P1)$; $f2 = r_8^6(\mathrm{bin}\ P1)$; $f3 = r_8^4(\mathrm{bin}\ P1)$; $f4 = r_8^2(\mathrm{bin}\ P1)$;
$P2 = 4 * f1 + 4 * f2 + f3 + f4$;
$f5 = r_4^4(\mathrm{bin}\ P2)$; $f6 = r_4^2(\mathrm{bin}\ P2)$;
$f = r_2^2(\mathrm{bin}(1 + f5 + f6))$.

3.3. “Каскадная” реализация систем булевых функций. Во многих случаях бывает целесообразно применять не “ярусную”, а “каскадную” реализацию.

Каскадом будем называть фрагмент схемы (формулы), реализующий линейно представимую функцию. Частным случаем каскада является схема из двухвходовых элементов И и ИЛИ, соединенных последовательно, так как в [17] показано, что любой каскад из таких элементов реализует бесповторную пороговую формулу. Каскадом также является последовательная схема из элементов И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ. Таким образом, каждый каскад может быть реализован ЛАПМ.

Одним ЛАПМ могут быть также реализованы каскады, входящие в схемы для различных функций СБФ.

Пример 12. Реализовать формулу, рассмотренную в предыдущем примере.

Реализуем формулу четырехкаскадной схемой, каскады которой описываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&f1 = x7 \mid x8 &&= r_2^2(\text{bin}(1 + x7 + x8));\\
&f2 = (x5 \mid x6) \& f1 &&= r_3^3(\text{bin}(1 + x5 + x6 + 2 * f1));\\
&f3 = x3 \mid x4 &&= r_2^2(\text{bin}(1 + x3 + x4));\\
&f = (x1 \mid x2) \& f3 \mid f2 &&= r_4^4(\text{bin}(5 + x1 + x2 + 3 * f2 + 2 * f3)).
\end{aligned}$$

Сопоставляя результаты примеров 9, 11, 12, можно утверждать, что с увеличением числа полиномов при реализации одной и той же задачи значения коэффициентов уменьшаются. Полиномы из последнего примера могут рассматриваться как декомпозиция полиномов, найденных в двух других примерах.

Пример 13. Реализовать функцию, заданную формулой $f = (!x1\&x2 \mid x1\&!x2\& \&x3)\&x4 \oplus x5$.

Фрагмент в скобках является порогово-линейным. После замены его буквой заданная формула также становится порогово-линейной: $f1 = !x1\&x2 \mid x1\&!x2\&x3 = = x1\&(x2 \mid x3) \oplus x2 = r_4^3(\text{bin}(1+2*x1+5*x2+x3))$; $f = f1\&x4 \oplus x5 = r_3^2(\text{bin}(f1 + x4 + +2 * x5))$.

Пример 14. Реализовать СБФ из примера 10.

Эта СБФ после преобразования к требуемому виду ($f3 = x1\&x2$; $f1 = f3 \mid x3\&x4$; $f2 = f3 \mid !x3\&!x4$) может быть реализована тремя ЛАП с тремя маскированиями:

$$\begin{aligned}
&f3 = r_2^2(\text{bin}(x1 + x2));\\
&f1 = r_3^3(\text{bin}(2 + 2 * f3 + x3 + x4));\\
&f2 = r_3^3(\text{bin}(4 + 2 * f3 - x3 - x4))
\end{aligned}$$

или при объединении каскадов, соответствующих разным формулам – двумя ЛАП также с тремя маскированиями:

$$\begin{aligned}
&f3 = r_2^2(\text{bin}(x1 + x2));\\
&P = 20 + 18 * f3 + 7 * x3 + 7 * x4;\\
&f1 = r_6^6(\text{bin } P); \quad f2 = r_6^3(\text{bin } P).
\end{aligned}$$

Последняя реализация существенно более эффективна, чем рассмотренная в примере 10.

Пример 15. Реализовать СБФ $f1 = (!x1\&x2 \mid x1\&!x2\&x3)\&x4 \oplus x5$; $f2 = (x1 \oplus \oplus x2 \oplus x3)\&x4$.

Эта СБФ после преобразования принимает вид:

$$\begin{aligned}
&f3 = !x1\&x2 \mid x1\&!x2\&x3 = (x1\&!x3 \mid x2) \oplus x1;\\
&f1 = f3\&x4 \oplus x5;\\
&f4 = x1 \oplus x2 \oplus x3; \quad f2 = f4\&x4
\end{aligned}$$

и поэтому может быть реализована четырьмя ЛАП с четырьмя маскированиями

$$\begin{aligned}
&f3 = r_4^3(\text{bin}(1 + 2 * x1 + 5 * x2 + x3)); &&f1 = r_3^2(\text{bin}(f3 + x4 + 2 * x3));\\
&f4 = r_2^2(\text{bin}(x1 + x2 + x3)); &&f2 = r_2^2(\text{bin}(f4 + x4))
\end{aligned}$$

или двумя ЛАП также с четырьмя маскированиями

$$\begin{aligned}
&P1 = 4 + 9 * x1 + 21 * x2 + 5 * x3; &&f3 = r_6^6(\text{bin } P1); &&f4 = r_6^1(\text{bin } P1);\\
&P2 = 4 * f3 + f4 + 5 * x4 + 8 * x5; &&f1 = r_5^4(\text{bin } P2); &&f2 = r_5^2(\text{bin } P2).
\end{aligned}$$

3.4. "Ярусно-каскадная" реализация систем булевых функций. В ряде случаев бывает целесообразно использовать смешанную реализацию, при которой каскады одного яруса вычисляются параллельно.

Пример 16. Реализовать формулу, рассмотренную в примере 13.

Построим по этой формуле схему из двух пороговых (каскады первого яруса) и одного порогово-линейного (каскад второго уровня) элементов:

$$f1 = !x1\&x2; \quad f2 = x1\&!x2\&x3; \quad f = (f1 \,|\, f2)\&x4 \oplus x5.$$

Каскады первого яруса реализуются параллельно следующим ЛАПМ:

$$P = 2^3 * (1 - x1 + x2) + 2^0 * (2 + x1 - x2 + x3) =$$
$$= 10 - 7 * x1 + 7 * x2 + x3; \quad f1 = r_5^5(\text{bin } P); \quad f2 = r_5^3(\text{bin } P),$$

а каскад второго уровня – полиномом вида:

$$f = r_4^3(\text{bin}(1 + f1 + f2 + 2 * x4 + 4 * x5)).$$

Таким образом, формула в этом случае реализуется двумя ЛАП с тремя маскированиями, в то время как учет того факта, что фрагмент $!x1\&x2 \,|\, x1\&!x2\&x3$ является порогово-линейным, позволяет реализовать формулу существенно проще – двумя более простыми ЛАП с двумя маскированиями (пример 13).

4. Реализация систем произвольных булевых функций одним линейным полиномом с условными маскированиями и операторами присваивания

В предыдущих разделах было показано, что только системы из линейно представимых БФ могут быть реализованы одним линейным полиномом с маскированиями.

Покажем, что, расширяя базис используемых операций, можно обеспечить линейную представимость и для системы произвольных БФ.

Будем называть условным маскированием запись вида $\text{if}\,(r_m^\ell(\text{bin } P))$.

При этом справедлива теорема, доказанная А.А. Шалыто.

Теорема 3. Произвольная система N булевых функций, каждая из которых зависит не более, чем от n переменных, всегда может быть реализована либо ОДНИМ линейным арифметическим полиномом n переменных с N маскированиями, либо ОДНИМ линейным арифметическим полиномом, N операторами $fi = 0$, $M1$ операторами $fi = 1$ $(i = 1, \ldots, N)$ и $M2$ условными маскированиями, где $M1$ и $M2$ – число линейно представимых фрагментов и число различных линейно представимых фрагментов в исходной или преобразованной системе формул.

Доказательство первой части теоремы, справедливой для систем линейно представимых функций, следует из материала раздела 2, а второй части – из изложенного в разделе 3.1 и отличается от последнего заменой второго ЛАП с N маскированиями на N операторов $fi = 0$, $M1$ операторов $fi = 1$ и $M2$ условных маскирований.

При этом фрагмент реализации, состоящий из условных маскирований и операторов присваивания, предлагается строить с помощью метода независимых фрагментов (МНФ), предложенного Б.П. Кузнецовым и А.А. Шалыто, для построения структурированных бинарных программ, реализующих системы булевых формул в базисе И, ИЛИ, НЕ [9].

Пример 17. Реализовать СБФ, приведенную в примере 10.

Применяя МНФ к преобразованной СБФ $f1 = f3 \,|\, f4$; $f2 = f3 \,|\, f5$, построим обобщенную логическую формулу (ОЛФ):

$$F = !f1 \;||\; !f2 \;||\; f3f1 \;||\; f4f1 \;||\; f3f2 \;||\; f5f2,$$

которая минимизируется следующим образом:

$$F = !f1 \,||\, !f2 \,||\, f3(f1 \,||\, f2) \,||\, f4f1 \,||\, f5f2.$$

В этих формулах $||$ – символ последовательного соединения "блоков".

Полученная ОЛФ однозначно задает структуру фрагмента реализации с условными маскированиями.

Используя последнюю формулу и результаты примера 10, получим

$$\begin{aligned}
&P = 2 + 16 * x1 + 16 * x2 + 3 * x3 + 3 * x4;\\
&f1 = 0; \quad f2 = 0;\\
&\text{if}\,(r_6^6(\text{bin}\ P)) \qquad \{f1 = 1;\ f2 = 1;\}\\
&\text{if}\,(r_6^4(\text{bin}\ P)) \qquad f1 = 1;\\
&\text{if}\,(r_6^2(\text{bin}\ P)) \qquad f2 = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, заданную СБФ вместо двух ЛАП и пяти маскирований (пример 10) удалось реализовать двумя операторами $fi = 0$, одним ЛАП, тремя условными маскированиями и четырьмя операторами $fi = 1$.

Из изложенного следует, что реализация СБФ, определяемая этой теоремой, является весьма элегантной и достаточно стандартной, а кроме того определяет ВОЗМОЖНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СБФ КАК БЫ ОДНИМ ПОРОГОВЫМ ЭЛЕМЕНТОМ С "ДОБАВКОЙ". Для рассмотренного примера эта "добавка" составляет маскирование, операцию bin, один оператор $fi = 0$, три оператора $fi = 1$ и два условных маскирования. При этом отметим, что при реализации этой системы на пороговых элементах требуется три таких элемента. Это эквивалентно трем ЛАП, зависящим от двух и трех переменных, трем операторам $fj = 0$, трем операторам $fj = 1$ и трем выражениям вида if $(Pj \geqslant 0)$, где $j \geqslant N$.

Применение МНФ позволяет в ряде случаев получать реализации, использующие один ЛАП, более простые по сравнению со "стандартной" реализацией.

Пример 18. Показать, что СБФ $f1 = (x1 \,|\, x2)\&(x3 \,|\, x4)$; $f2 = (x1 \,|\, x2)\&(!x3 \,|\, !x4)$ может быть реализована более просто, чем при непосредственном применении теоремы 3.

Для использования теоремы 3 преобразуем заданную СБФ:

$$(3) \qquad \begin{cases} f1 = (x1 \,|\, x2)\&x3 \,|\, (x1 \,|\, x2)\&x4 = f3 \,|\, f4;\\ f2 = (x1 \,|\, x2)\&!x3 \,|\, (x1 \,|\, x2)\&!x4 = f5 \,|\, f6. \end{cases}$$

Исходя из результатов [15], получим:

$$\begin{aligned}
&f3 = r_3^3(\text{bin}(1 + x1 + x2 + 2 * x3)); \quad f4 = r_3^3(\text{bin}(1 + x1 + x2 + 2 * x4));\\
&f5 = r_3^3(\text{bin}(3 + x1 + x2 - 2 * x3)); \quad f6 = r_3^3(\text{bin}(3 + x1 + x2 - 2 * x4)).
\end{aligned}$$

Используя результаты раздела 2.1, получим:

$$P1 = 603 + 585 * x1 + 585 * x2 + 1008 * x3 + 126 * x4.$$

При этом

$$f3 = r_{12}^{12}(\text{bin}\ P1); \quad f4 = r_{12}^{9}(\text{bin}\ P1); \quad f5 = r_{12}^{6}(\text{bin}\ P1); \quad f6 = r_{12}^{3}(\text{bin}\ P1).$$

Применяя МНФ к СБФ (3), построим ОЛФ для этого случая

$$F1 = !f1 \,||\, !f2 \,||\, f3f1 \,||\, f4f1 \,||\, f5f2 \,||\, f6f2.$$

Исходя из изложенного на основании теоремы 3, получим:

$$
\begin{aligned}
&P1 = 603 + 585 * x1 + 585 * x2 + 1008 * x3 + 126 * x4;\\
&f1 = 0; \quad f2 = 0;\\
&\text{if}\,(r_{12}^{12}(\text{bin } P1)) \qquad f1 = 1;\\
&\text{if}\,(r_{12}^{9}(\text{bin } P1)) \qquad f1 = 1;\\
&\text{if}\,(r_{12}^{6}(\text{bin } P1)) \qquad f2 = 1;\\
&\text{if}\,(r_{12}^{3}(\text{bin } P1)) \qquad f2 = 1.
\end{aligned}
$$

Реализацию, аналогичную по структуре с получаемой при применении теоремы 3, можно построить, если в данном случае МНФ использовать не для заданных формул, а для их инверсий:

$$
(4) \qquad \begin{cases} !f1 = !x1\&!x2 \,|\, !x3\&!x4 = f7 \,|\, f8;\\ !f2 = !x1\&!x2 \,|\, x3\&x4 = f7 \,|\, f9. \end{cases}
$$

Исходя из результатов [15], получим:

$$
f7 = r_2^2(\text{bin}(2-x1-x2)); \quad f8 = r_2^2(\text{bin}(2-x3-x4)); \quad f9 = r_2^2(\text{bin}(x3+x4)).
$$

Используя результаты раздела 2.1, получим:

$$
P2 = 10 - x1 - x2 + 12 * x3 + 12 * x4.
$$

При этом

$$
f7 = r_6^2(\text{bin } P2); \quad f8 = r_6^4(\text{bin } P2); \quad f9 = r_6^6(\text{bin } P2).
$$

Применяя МНФ к СБФ (4), построим ОЛФ

$$
F2 = f1 \,||\, f2 \,||\, f7!f1 \,||\, f8!f1 \,||\, f7!f2 \,||\, f9!f2,
$$

которая минимизируется следующим образом:

$$
F2 = f1 \,||\, f2 \,||\, f7(!f1 \,||\, !f2) \,||\, f8!f1 \,||\, f9!f2.
$$

Исходя из изложенного, может быть предложена более простая реализация исходной СБФ по сравнению с получаемой при непосредственном применении теоремы 3

$$
\begin{aligned}
&P2 = 10 - x1 - x2 + 12 * x3 + 12 * x4;\\
&f1 = 1; \quad f2 = 1;\\
&\text{if}\,(r_6^2(\text{bin } P2)) \qquad \{f1 = 0;\ f2 = 0;\}\\
&\text{if}\,(r_6^4(\text{bin } P2)) \qquad f1 = 0;\\
&\text{if}\,(r_6^6(\text{bin } P2)) \qquad f2 = 0.
\end{aligned}
$$

Дальнейшее упрощение реализации (за счет уменьшения числа присваиваний без изменения числа ЛАПМ и условных маскирований) получается, если СБФ не преобразовывать, а излагаемый подход применять к исходной системе:

$$
(5) \qquad \begin{cases} f1 = (x1 \,|\, x2)\&(x3 \,|\, x4) = f10\&f11;\\ f2 = (x1 \,|\, x2)\&(!x3 \,|\, !x4) = f10\&f12. \end{cases}
$$

Исходя из результатов [15], получим:

$$f10 = r_2^2(\text{bin}(1 + x1 + x2)); \quad f11 = r_2^2(\text{bin}(1 + x3 + x4));$$
$$f12 = r_2^2(\text{bin}(3 - x3 - x4)).$$

Используя результаты раздела 2.1, получим:

$$P3 = 23 + 16 * x1 + 16 * x2 + 3 * x3 + 3 * x4.$$

При этом

$$f10 = r_6^6(\text{bin } P3); \quad f11 = r_6^4(\text{bin } P3); \quad f12 = r_6^2(\text{bin } P3).$$

Применяя МНФ к СБФ (5), построим ОЛФ

$$F3 = !f1 \mid\mid !f2 \mid\mid f10f11f1 \mid\mid f10f12f2,$$

которая минимизируется следующим образом:

$$F3 = !f1 \mid\mid !f2 \mid\mid f10(f11f1 \mid\mid f12f2).$$

Исходя из изложенного, предложена следующая реализация исходной СБФ:

$$
\begin{array}{ll}
 & P3 = 23 + 16 * x1 + 16 * x2 + 3 * x3 + 3 * x4; \\
 & f1 = 0; \quad f2 = 0; \\
(6) & \text{if}\,(r_6^6(\text{bin } P3)) \\
 & \quad \{ \text{ if}\,(r_6^4(\text{bin } P3)) \;\; f1 = 1; \\
 & \quad\;\; \text{if}\,(r_6^2(\text{bin } P3)) \;\; f2 = 1; \; \},
\end{array}
$$

которая в указанном смысле проще предыдущей реализации.

В заключение раздела отметим, что полученные реализации занимают промежуточное положение между "чисто" арифметической реализацией заданной СБФ с помощью безызбыточного НАП [7]

$$
\begin{array}{ll}
(7) & P4 = x2 + 2*x2*x4 + 2*x2*x3 - 3*x2*x3*x4 + x1 + 2*x1*x4 + 2*x1*x3 - \\
 & - 3*x1*x3*x4 - x1*x2 - 2*x1*x2*x4 - 2*x1*x2*x3 + 3*x1*x2*x3*x4; \\
 & f1 = r_2^2(\text{bin } P4); \quad f2 = r_2^1(\text{bin } P4)
\end{array}
$$

и "чисто" бинарной ее реализацией на основе МНФ, применяемого к инверсиям заданных формул

$$
\begin{array}{lll}
 & f1 = 1; \quad f2 = 1; & \\
 & \text{if}\,(!x1) & \\
 & \quad \text{if}\,(!x2) & \{f1 = 0;\ f2 = 0;\} \\
(8) & \text{if}\,(!x3) & \\
 & \quad \text{if}\,(!x4) & f1 = 0; \\
 & \text{if}\,(x3) & \\
 & \quad \text{if}\,(x4) & f2 = 0.
\end{array}
$$

Таким образом в примере рассмотрены принципиально различные реализации одной и той же СБФ в четырех базисах:

булевыми формулами (соотношения 5);

нелинейным арифметическим полиномом с маскированиями (соотношения 7);

линейным арифметическим полиномом с условными маскированиями и присваиваниями констант 0 и 1 (соотношения 6);

структурированной бинарной программой (соотношения 8).

Естественно, что для данной СБФ могут быть предложены и другие реализации, например, интерпретация ее таблицы истинности или реализация двумя линейными арифметическими полиномами с маскированиями, построенными на основе метода, изложенного в разделе 3.1.

Несмотря на то, что в данном случае булевы формулы или бинарная программа, видимо, "проще", чем ЛАП с условными маскированиями и присваиваниями, для других СБФ результат может быть прямо противоположным. Разнообразие подходов позволяет проводить обоснованный выбор базиса при программной реализации заданной СБФ в зависимости от используемых ограничений.

5. Заключение

Предложенные в настоящей работе методы имеют существенное теоретическое значение, так как устанавливают связь между двумя важными классами математических объектов – системами булевых формул и линейными арифметическими полиномами. Они имеют также значение для теории пороговых функций, теории нейронных сетей и теории параллельных вычислений.

Практическая ценность методов состоит в том, что они в ряде случаев позволяют получать наилучшие по памяти и(или) времени программные реализации, как, например, это имеет место при реализации компилятивной программой, записанной на языке СИ, параллельного одноразрядного сумматора, рассмотренного в примере 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малюгин В.Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1982. № 4. С. 84–93.
2. *Малюгин В.Д.* О полиномиальной реализации кортежа булевых функций // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265. № 6. С. 1338–1341.
3. *Малюгин В.Д.* Реализация кортежей булевых функций посредством линейных арифметических полиномов // АиТ. 1984. № 2. С. 114–122.
4. *Ефремов В.Д., Кузьмин А.А., Степанов В.А.* Вычисление логических функций с использованием преобразований Радемахера // АиТ. 1984. № 2. С. 105–113.
5. *Малюгин В.Д., Кухарев Г.А., Шмерко В.П.* Преобразования полиномиальных форм булевых функций. Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1986.
6. *Малюгин В.Д.* Реализация систем логических функций посредством арифметических полиномов // Computers and Artificial Inteligence. 1987. № 6. С. 541–552.
7. *Артюхов В.Л., Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // АиТ. 1988. № 4. С. 138–147.
8. *Осипов В.А., Шалыто А.А., Кондратьев В.Н.* Программная реализация алгоритмов логического управления в судовых системах. Методические разработки. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1988.
9. *Шалыто А.А.* Реализация алгоритмов судовых управляющих логических систем при использовании микропроцессорной техники. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1988.
10. *Шмерко В.П.* Синтез арифметических форм булевых функций посредством преобразования Фурье // АиТ. 1989. № 5. С. 134–142.
11. *Артюхов В.Л., Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Использование линейных арифметических полиномов при реализации систем логического управления // XI Всесоюз. совещ. по проблемам управления. Тез. докл. М.: АН СССР. 1989. С. 495-496.

12. *Артюхов В.Л., Беляев Н.С., Шалыто А.А.* Методы программной реализации симметрических булевых функций // Проблемы комплексной автоматизации судов. ВНТО им. ак. А.Н. Крылова. Вып. 19. Л.: Судостроение, 1989. С. 37–51.
13. *Шалыто А.А., Кондратьев В.Н.* Методы программной реализации алгоритмов логического управления для судовых микропроцессорных систем. Л.: Ин-т повышения квалификации руководящих работников и специалистов судостроительной промышленности, 1990.
14. *Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Реализация систем булевых функций с использованием линейных арифметических полиномов // АиТ. 1993. № 3. С. 135–151.
15. *Кондратьев В.Н., Шалыто А.А.* Реализация булевых функций одним линейным арифметическим полиномом с маскированием // АиТ. 1996. № 1. С. 158–170.
16. *Артюхов В.Л., Шалыто А.А., Кузнецова О.С.* Оценка функциональных возможностей программируемых логических матриц // Автоматика и вычислительная техника. 1985. № 2. С. 58–65.
17. *Артюхов В.Л., Розенблюм Л.Я., Шалыто А.А.* Логические возможности некоторых типов каскадных структур // Сети связи и дискретные устройства управления. М.: Наука, 1976. С. 138–144.

Поступила в редакцию 20.03.95

Автоматика

ISSN 0005-2310

·Наука·