Глава 20

Реализация булевых функций с помощью арифметических полиномов

20.1. Реализация булевых функций арифметическими полиномами

20.1.1. Реализация одной булевой формулы

Булева формула (БФ) в базисе $\{\&, \vee, !\}$ преобразуется в арифметический полином (АП) следующим образом:

— в БФ ортогонализуются дизъюнкции;

— знаки $\vee$ заменяются на знаки $+$;

— символы $!x_i$ заменяются выражением $1-x_i$;

— раскрываются скобки и приводятся подобные члены, если они имеются.

Пример 20.1. Построить АП для БФ $f=(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1 x_2$.

Для упрощения ортогонализованной формулы переставим подформулы в заданной БФ:

$$
\begin{aligned}
f &= x_1 x_2 \vee (x_1 x_2 \vee x_3) = x_1 x_2 \vee !(x_1 x_2)(x_1 \vee !x_1 x_2)x_3 = \\
&= x_1 x_2 \vee (!x_1 \vee x_1 !x_2)(x_1 \vee !x_1 x_2)x_3 = \\
&= x_1 x_2 \vee (!x_1 x_2 \vee x_1 !x_2)x_3 = \\
&= x_1 x_2 \vee \big((1-x_1)x_2 + x_1(1-x_2)\big)x_3 = \\
&= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3.
\end{aligned}
$$

Совместное использование рассмотренного подхода и подхода, изложенного в разд. 19.2.4, позволяет получить для заданной БФ следующие арифметические выражения:

$$f=\left[\frac{x_1+x_2}{2}\right]+\left[\frac{x_1+x_3}{2}\right]+\left[\frac{x_2+x_3}{2}\right]-2\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right]=$$

$$=\left[\frac{x_1+x_2}{2}\right]+\left[\frac{x_1+x_3}{2}\right]+\left[\frac{x_2+x_3}{2}\right]-2\left[\frac{\left[\frac{x_1+x_2}{2}\right]+x_3}{3}\right]=$$

$$=\left[\frac{x_1+x_2}{2}\right]+\left[\frac{x_1+x_3}{2}\right]+\left[\frac{x_2+x_3}{2}\right]-2\left[\frac{x_1+x_2+x_3+1}{4}\right].$$

Приведем без доказательства два утверждения [1].

1. Если заданная БФ бесповторна в указанном базисе, то коэффициенты АП равны -1, 0, 1. Обратное утверждение неверно.

2. Если коэффициенты АП равны -1, 0, 1, то соответствующий полином Жегалкина может быть найден по арифметическому полиному заменой знаков плюс и минус на знак $\oplus$.

20.1.2. Реализация одной симметрической функции

Метод, изложенный в предыдущем разделе, применим для произвольных булевых функций (БФУ), в том числе и симметрических функций (СФ), что, в частности, продемонстрировано в примере *20.1*.

Однако специфика СФ позволяет предложить более простой метод для для их реализации. Это объясняется тем, что если произвольная БФУ n переменных реализуется арифметическим полиномом, содержащим до 2^n коэффициентов a_i, то произвольная СФ может быть реализована АП, содержащим только $n+1$ коэффициентов b_j. В этих полиномах a_i и b_j — произвольные целые числа.

Например, при $n = 4$ арифметический полином для произвольной БФУ имеет вид:

$$f=a_0+a_1x_4+a_2x_3+a_3x_3x_4+a_4x_2+a_5x_2x_4+a_6x_2x_3+$$
$$+a_7x_2x_3x_4+a_8x_1+a_9x_1x_4+a_{10}x_1x_3+a_{11}x_1x_3x_4+a_{12}x_1x_2+$$
$$+a_{13}x_1x_2x_4+a_{14}x_1x_2x_3+a_{15}x_1x_2x_3x_4,$$

в то время как АП для произвольной СФ может быть представлен в виде:

$$f=b_0+b_1(x_1+x_2+x_3+x_4)+$$
$$+b_2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)+$$
$$+b_3(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)+b_4x_1x_2x_3x_4.$$

Запишем последнее соотношение более компактно:

$$f = b_0 + b_1 X_1^4 + b_2 X_2^4 + b_3 X_3^4 + b_4 X_4^4.$$

Из приведенных соотношений следует, что

$$b_0 = a_0;\ b_1 = a_1 = a_2 = a_4 = a_8;\ b_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_9 = a_{10} = a_{12};$$
$$b_3 = a_7 = a_{11} = a_{13} = a_{15};\ b_4 = a_{15};$$
$$X_1^4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$$
$$X_2^4 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4;$$
$$X_3^4 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4;$$
$$X_4^4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Сформулируем задачу нахождения арифметического полинома для симметрической функции следующим образом: для симметрической реализации $S^n_{j,\dots,l}$ построить АП, который обозначим символом $F^n_{j,\dots,l}$.

Обозначим символами $F_j^n, \dots, F_l^n$ арифметические полиномы для элементарных симметрических функций $S_j^n, \dots, S_l^n$ соответственно.

При этом для $n = 4$

$$S_0^4 = !x_1 !x_2 !x_3 !x_4;$$
$$S_1^4 = x_1 !x_2 !x_3 !x_4 \vee !x_1 x_2 !x_3 !x_4 \vee !x_1 !x_2 x_3 !x_4 \vee !x_1 !x_2 !x_3 x_4;$$
$$S_2^4 = x_1 x_2 !x_3 !x_4 \vee x_1 !x_2 x_3 !x_4 \vee x_1 !x_2 !x_3 x_4 \vee !x_1 x_2 x_3 !x_4 \vee$$
$$\vee !x_1 x_2 !x_3 x_4 \vee !x_1 !x_2 x_3 x_4;$$
$$S_3^4 = x_1 x_2 x_3 !x_4 \vee x_1 x_2 !x_3 x_4 \vee x_1 !x_2 x_3 x_4 \vee !x_1 x_2 x_3 x_4;$$
$$S_4^4 = x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Так как

$$S^n_{j,\dots,l} = S_j^n \vee \dots \vee S_l^n,$$

то в силу ортогональности элементарных СФ между собой будем использовать соотношение

$$F^n_{j,\dots,l} = F_j^n + \dots + F_l^n.$$

Введем операторное представление для АП рассматриваемого класса.

Сопоставим полиному F_i^n оператор

$$O_i^n = C_n^i x^i (1 - x)^{n-i}, \qquad (20.1)$$

где $i = 0, \dots, n$.

Сопоставим полиному $F^{n}_{j,\dots,l}$ оператор

$$O^{n}_{j,\dots,l} = O^{n}_{j} + \dots + O^{n}_{l}. \qquad (20.2)$$

Введем правило для перехода от оператора к АП:

$$O(bx^{i}) \to F\left(\frac{b}{C^{i}_{n}} X^{n}_{i}\right). \qquad (20.3)$$

На основе соотношения 20.1 перечислим в качестве примера все операторы O^{n}_{i} при $n = 4$:

$$\begin{aligned}
&O^{4}_{0} = C^{0}_{4} x^{0} (1-x)^{4} = 1 - 4x + 6x^{2} - 4x^{3} + x^{4};\\
&O^{4}_{1} = C^{1}_{4} x^{1} (1-x)^{3} = 4x - 12x^{2} + 12x^{3} - 4x^{4};\\
&O^{4}_{2} = C^{2}_{4} x^{2} (1-x)^{2} = 6x^{2} - 12x^{3} + 6x^{4};\\
&O^{4}_{3} = C^{3}_{4} x^{3} (1-x)^{1} = 4x^{3} - 4x^{4};\\
&O^{4}_{4} = C^{4}_{4} x^{4} (1-x)^{0} = x^{4}.
\end{aligned} \qquad (20.4)$$

Пример 20.2. Определить $F^{4}_{2,4}$ для $S^{4}_{2,4}$.

На основе соотношения (20.2) следует, что

$$O^{4}_{2,4} = O^{4}_{2} + O^{4}_{4}.$$

Поэтому из соотношений (20.4) следует, что

$$O^{4}_{2,4} = 6x^{2} - 12x^{3} + 7x^{4}.$$

На основе соотношения (20.3)

$$F^{4}_{2,4} = \frac{6}{C^{2}_{4}} X^{4}_{2} - \frac{12}{C^{3}_{4}} X^{4}_{3} + \frac{7}{C^{4}_{4}} X^{4}_{4} = X^{4}_{2} - 3X^{4}_{3} + 7X^{4}_{4}.$$

Таким образом, в данном случае $b_0 = 0$; $b_1 = 0$; $b_2 = 1$; $b_3 = -3$; $b_4 = 7$.

Пример 20.3. Определить $F_{2,3}$ для $S^{3}_{2,3}$.

На основе соотношения (20.1) следует, что

$$\begin{aligned}
&O^{3}_{2} = C^{2}_{3} x^{2} (1-x)^{1} = 3x^{2} - 3x^{3};\\
&O^{3}_{3} = C^{3}_{3} x^{3} (1-x)^{0} = x^{3}.
\end{aligned} \qquad (20.5)$$

На основе соотношения (20.2) получим

$$O_{2,3}^{3} = O_2^3 + O_3^3.$$

Из соотношения (20.5) следует, что

$$O_{2,3}^{3} = 3x^2 - 2x^3.$$

На основе соотношения (20.3) получим

$$F_{2,3}^{3} = \frac{3}{C_3^2} X_2^3 - \frac{2}{C_3^3} X_3^3 = X_2^3 - 2X_3^3,$$

где $X_2^3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$; $X_3^3 = x_1 x_2 x_3$.

Метод предложен В. Л. Артюховым и автором в [2].

20.1.3. Реализация одной булевой формулы с использованием операции «sign»

Пусть задана нормальная БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$, которую обозначим символом *f*. Выполним в этой формуле следующие замены: $!\,x_i$ на $1 - x_i$; & на $*$; $\vee$ на $+$.

В результате получим арифметическое выражение, которое обозначим символом f_1. При этом

$$f = \operatorname{sign} f_1,$$

где

$$\operatorname{sign} f_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } f_1 > 0; \\ 0 & \text{при } f_1 = 0. \end{cases}$$

Пример 20.4. Реализовать с помощью предлагаемого подхода булеву формулу $f = x_1 \vee !\,x_2 x_3$.

Из изложенного следует, что

$$f = \operatorname{sign}\big(x_1 + (1 - x_2)x_3\big) = \operatorname{sign}(x_1 + x_3 - x_2 x_3).$$

Полученное выражение может быть реализовано следующим образом:

```
f = 0;
if(x1 + x3 — x2x3 > 0) f = 1.
```

Отметим, что АП для данной функции существенно более сложен:

$$f = x_1 + x_3 - x_2 x_3 - x_1 x_3 + x_1 x_2 x_3.$$

Так как заданная БФУ является пороговой, то она может быть реализована также и следующим образом:

```
f = 0;
if(2x1 - x2 + x3 ⩾ 0) f = 1.
```

Описанный в настоящем разделе подход был предложен М. Х. Сахартовым и автором [3].

20.1.4. Реализация одной булевой формулы с использованием операции «абсолютная величина»

Построим арифметический полином для БФ $f = x_1 \oplus x_2$. Исходя из изложенного в разд. 20.1.1, получим:

$$f = x_1 \oplus x_2 = !x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 =$$
$$= (1 - x_1) x_2 + x_1 (1 - x_2) = x_1 - 2 x_1 x_2 + x_2.$$

Проведем дальнейшее преобразование этого выражения

$$f = x_1^2 - 2 x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 = |x_1 - x_2|.$$

Из рассмотренного примера следует, что если формулы f_1 и f_2 являются конъюнкциями, то

$$f_1 \oplus f_2 = |f_1 - f_2|.$$

Если эти формулы конъюнкциями не являются, то

$$f_1 \oplus f_2 = |f_1' - f_2'|,$$

где f_1' и f_2' — АП функций f_1 и f_2 соответственно.

Пример 20.5. Построить арифметическое выражение для булевой формулы $f = (x_1 \vee x_2) \oplus x_3$.

Из изложенного следует, что $f = |x_1 + x_2 - x_1 x_2 - x_3|$. Это выражение существенно проще, чем соответствующий АП.

Построим АП, используя модификацию разложения Шеннона по переменной x_1 и приведенные выше соотношения

$$f = (1 - x_1)|x_2 - x_3| + x_1|1 - x_3| =$$
$$= (1 - x_1)(x_2 + x_3 - 2 x_2 x_3) + x_1 (1 - x_3) =$$
$$= x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 - 2 x_1 x_3 - 2 x_2 x_3 + 2 x_1 x_2 x_3.$$

Представление БФ с помощью операции «абсолютная величина» не является единственным. Покажем это на рассмотренном примере. Для этого ортогонализуем заданную БФ: $f = (x_1 \vee !x_1 x_2) \oplus x_3$. В этом выражении могут быть сделаны следующие замены: $!x$ на $1 - x$; $\vee$ на $\oplus$. При этом

$$f = \big(x_1 \oplus (1 \oplus x_1) x_2 \big) \oplus x_3 = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2) \oplus x_3 .$$

Из изложенного следует, что

$$f = \Big| \big| |x_1 - x_2| - x_1 x_2 \big| - x_3 \Big|.$$

В данном случае можно получить и другое выражение:

$$f = \big| |x_1 + x_2 - 3x_1 x_3| - x_3 \big|.$$

Совместное применение подходов, изложенных в настоящем разделе и в разд. 19.2.4, позволяет получить для заданной БФ следующие арифметические выражения, которые не содержат нелинейных членов:

$$f = \left\| |x_1 - x_2| - \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \right] \right\| - x_3 \Bigg| = \left| x_1 - x_2 \ - 3 \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \right] - x_3 \right|.$$

В заключение раздела получим еще несколько соотношений, использующих операцию «абсолютная величина»:

$$x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2 = x_1 + x_2 - 2 x_1 x_2 + x_1 x_2 = |x_1 - x_2| + x_1 x_2 ;$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2 - x_1 x_2 = \frac{x_1 + x_2 - 2 x_1 x_2 + x_1 + x_2}{2} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + |x_1 + x_2|}{2}.$$

Из соотношения

$$x_1 + x_2 - 2 x_1 x_2 = |x_1 - x_2|$$

следует, что

$$x_1 x_2 = \frac{x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|}{2}.$$

Изложенный подход описан в [1, 4].

20.1.5. Реализация системы булевых функций одним арифметическим полиномом

Введем понятие «обобщенная совершенная дизъюнктивная нормальная форма» (ОСДНФ) для системы булевых функций (СБФУ).

Под ОСДНФ будем понимать выражение вида:

$$
\begin{gathered}
Y = y_0 ! x_1 ! x_2 \ldots ! x_n \vee y_1 ! x_1 ! x_2 \ldots ! x_{n-1} x_n \vee \\
\vee \ldots \vee y_{2^n - 1} x_1 x_2 \ldots x_n,
\end{gathered}
\tag{20.6}
$$

где y_i — десятичный эквивалент значений СБФУ на наборе i.

Справедливость этого соотношения следует из ортогональности конъюнкций в ОСДНФ.

Арифметический полином для ОСДНФ будем искать в виде

$$
Y = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_{n-1} + a_3 x_{n-1} x_n + \ldots + a_{2^n - 1} x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{20.7}
$$

Выражение (20.7) получается из выражения (20.6) заменой коэффициентов y_i на коэффициенты a_i и исключением переменных с инверсиями.

Подставляя 2^n значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ и приравнивая правые части соотношений (20.6) и (20.7), получим 2^n равенств, из которых могут быть найдены выражения для коэффициентов арифметического полинома (АП) через коэффициенты ОСДНФ.

Эти равенства могут быть представлены в матричной форме

$$
|\mathbf{A}| = |\mathbf{P}_n| |\mathbf{Y}|, \tag{20.8}
$$

где $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{Y}|$ — вектор-столбцы коэффициентов АП и ОСДНФ соответственно.

Это соотношение определяет переход от ОСДНФ (и тем самым от СБФУ) к АП. Для матрицы $|\mathbf{P}_n|$ выполняется следующее соотношение:

$$
|\mathbf{P}_n| = \begin{vmatrix} P_{n-1} & 0 \\ -P_{n-1} & P_{n-1} \end{vmatrix}.
$$

Эта матрица является n-й кронекеровской степенью матрицы

$$
|\mathbf{P}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.
$$

При этом отметим, что матрица $|-\mathbf{P}_{n-1}|$ получается из матрицы $|\mathbf{P}_{n-1}|$ путем инвертирования знаков единичных элементов.

При $n = 2$ справедливо соотношение

$$\begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_0 \\ y_1 - y_0 \\ y_2 - y_0 \\ y_0 - y_1 - y_2 + y_3 \end{vmatrix}. \qquad (20.9)$$

Получающийся на основе соотношений (20.7) и (20.8) арифметический полином является единственным и безызбыточным: к а ж д ы й столбец в двоичном представлении результатов вычислений по этому полиному реализует одну из заданных функций.

Пример 20.6. Построить АП для системы булевых формул $f_1 = x_1 x_2$, $f_2 = x_1 \oplus x_2$.

По этой системе может быть записано соотношение

$$Y = f_1 f_2 = |\, y_0 \;\; y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 |^T = |0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2|^T.$$

Так как в этом случае $n = 2$, то

$$Y = 0 ! x_1 ! x_2 \vee 1 ! x_1 x_2 \vee 1 x_1 ! x_2 \vee 2 x_1 x_2;$$
$$Y = a_0 \qquad + a_1 x_2 \quad + a_2 x_1 \quad + a_3 x_1 x_2.$$

Используя соотношение (20.9), определим, что $a_0 = a_3 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$.

Таким образом, $Y = x_1 + x_2$, и поэтому $f_1 f_2 = \text{bin}\,(x_1 + x_2)$.

Приведем без доказательства теорему [1].

Т е о р е м а 20.1. Если система булевых функций определена на g входных наборах, то всегда можно построить АП, содержащий не более g ненулевых коэффициентов.

Пример 20.7. Построить АП для не полностью определенной системы булевых функций

$$Y(x_1, x_2) = |1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; -|^T.$$

Из соотношения (20.9) следует, что, для того чтобы выполнялось соотношение $a_3 = y_0 - y_1 - y_2 + y_3 = 0$, должно быть выполнено соотношение $y_3 = 4$.

При этом $Y = 1 + x_2 + 2x_1$, $f_1 = x_1 x_2$, $f_2 = x_1 \oplus x_2$, $f_3 = !x_2$.

Обратный переход (от АП к ОСДНФ и тем самым к СБФУ) осуществляется на основе соотношения:

$$|\mathbf{Y}| = |\mathbf{Q}_n||\mathbf{A}|, \qquad (20.10)$$

где $|\mathbf{Q}_n|$ — n-я кронекеровская степень матрицы

$$|\mathbf{Q}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В заключение раздела отметим, что изложенный подход, естественно, применим и для отдельных БФУ, который, однако, не столь эффективен, как при его использовании для систем БФУ, некоторые из которых могут быть реализованы линейными АП (ЛАП), в то время как отдельные булевы функции при $n \geqslant 2$ линейными арифметическими полиномами не реализуются (разд. 20.3.1).

При этом отметим, что вычисление СБФУ по арифметическому полиному обеспечивает ее параллельную реализацию.

Алгебраический метод построения АП для системы БФ был предложен в [5]. Матричный метод построения АП для СБФУ предложен в [1] и независимо в [6, 7], что и было отмечено в [1].

20.1.6. Вычисление коэффициентов арифметического полинома на основе метода Гуда

Оценим количество действий в алгоритме, построенном на основе соотношения (20.8).

Матрица $|\mathbf{P}_n|$ содержит 3^n единиц. Поэтому матрица, получаемая в результате умножения матриц $|\mathbf{P}_n|$ и $|\mathbf{Y}|$, будет содержать 3^n элементов y_i. Количество действий, выполняемых в каждой из 2^n строк этой матрицы, на единицу меньше числа единиц в соответствующей строке матрицы $|\mathbf{P}_n|$. При этом количество действий в преобразовании

$$D = 3^n - 2^n.$$

Количество действий можно уменьшить, выполнив факторизацию матрицы $|\mathbf{P}_n|$ по методу Гуда [8]. Матрица $|\mathbf{P}_n|$ может быть записана в виде произведения n слабозаполненных матриц порядка 2^n, имеющих вид:

$$|\mathbf{L}_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

При этом соотношение (20.8) приобретает вид:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{L}_n||\mathbf{L}_n||\mathbf{L}_n| \ldots |\mathbf{L}_n||\mathbf{Y}| \ . \tag{20.11}$$

В матрицах Гуда в верхней половине каждая строка содержит по одной единице, а в нижней половине — две. Следовательно, для верхней половины не требуется действий, а для обработки каждой строки нижней половины требуется по одному действию. Так как нижняя половина каждой матрицы Гуда содержит 2^{n-1} строк, а вся процедура преобразования требует n матриц Гуда, то количество действий в этом случае

$$D_1 = n \cdot 2^{n-1}.$$

Так как $D_1 < D$, то преобразование (20.11) называется быстрым. Это преобразование было предложено в [7, 9].

Программы вычисления коэффициентов АП в соответствии с соотношениями (20.8) и (20.11), написанные на ассемблере MACRO-11 [10], приведены в [11].

20.1.7. Условие представимости системы булевых функций линейным арифметическим полиномом — условие линейности

Условие представимости СБФУ линейным АП, которое называется условием линейности, определяется из соотношения (20.8) приравниванием нулю коэффициентов в нелинейных членах соотношения (20.7) и представлением их через базовые значения y_i, где $i = 0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$.

В [1] показано, что это условие имеет вид:

$$|\mathbf{Y}_k| = |\mathbf{D}\ \mathbf{C}||\mathbf{Y}_b|, \tag{20.12}$$

где $|\mathbf{Y}_k|$ — вектор-столбец небазовых значений ОСДНФ; $|\mathbf{Y}_b|$ — вектор-столбец базовых значений ОСДНФ; $\mathbf{D}$ — подматрица, каждая строка которой равна двоичному представлению числа k, обозначаемому как bin k; $\mathbf{C}$ — вектор-столбец, каждое значение которого равно единице минус сумма единиц в bin k.

Для $n = 3$ условие линейности имеет вид:

$$\begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 + y_1 - y_0 \\ y_4 + y_1 - y_0 \\ y_4 + y_2 - y_0 \\ y_4 + y_2 - y_1 - 2y_0 \end{vmatrix}. \tag{20.13}$$

Пример 20.8. Определить, представима ли система булевых формул $f_1 = x_1 x_2$; $f_2 = x_1 \vee x_2$; $f_3 = x_1 \oplus x_2$ с помощью линейного АП.

Эта система формул может быть представлена в виде:

$$Y(x_1, x_2) = |0 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 6|^T .$$

Условие линейности при $n = 2$ имеет вид:

$$|y_3| = |1 \;\; 1 \;\; -1| \begin{vmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = |y_2 + y_1 - y_0|.$$

Это условие для рассматриваемого примера выполняется. Из соотношения (20.9) следует, что

$$f_1 f_2 f_3 = \text{bin}\,(3x_1 + 3x_2).$$

20.1.8. Арифметические полиномы и полиномы Жегалкина

Возможность представления произвольной БФУ булевой формулой в базисе {0, 1, ⊕, &} была установлена Жегалкиным [12] и переоткрыта Ридом [13].

Полином Жегалкина (ПЖ) для произвольной БФУ n переменных, заданной СДНФ, может быть построен матричным методом, использующим матрицу $|\mathbf{Q}_n|$ из соотношения (20.10). При этом коэффициенты ПЖ определяются с помощью соотношения

$$|\mathbf{G}| = |\mathbf{Q}_n| * |\mathbf{Y}| . \qquad (20.14)$$

Справедливо также и обратное преобразование (построение СДНФ по ПЖ), выполняемое на основе соотношения

$$|\mathbf{Y}| = |\mathbf{Q}_n| * |\mathbf{G}| . \qquad (20.15)$$

В этих выражениях применяются следующие обозначения: $|\mathbf{G}|$, $|\mathbf{Y}|$ — вектор-столбцы коэффициентов ПЖ и СДНФ соответственно; $*$ — символ операции умножения матриц, в которой арифметическая сумма заменяется суммой по модулю два [14].

Из соотношений (20.10) и (20.14) следует, что

$$|\mathbf{G}| = |\mathbf{Q}_n| * |\mathbf{Q}_n||\mathbf{A}| ,$$

а из соотношений (20.8) и (20.15) —

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{P}_n||\mathbf{Q}_n| * |\mathbf{G}| .$$

Эти соотношения приведены в [1, 7, 9]. В [1] определено также условие линейности для ПЖ, которое имеет вид:

$$|\mathbf{Y}_k| = |\mathbf{D}\ \mathbf{B}| * |\mathbf{Y}_b|,$$

где **B** — вектор-столбец, каждое значение которого равно сумме по модулю два единицы и единиц в bin k.

При $n = 3$ это условие выражается соотношением вида:

$$\begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 \oplus y_1 \oplus y_0 \\ y_4 \oplus y_1 \oplus y_0 \\ y_4 \oplus y_2 \oplus y_0 \\ y_4 \oplus y_2 \oplus y_1 \end{vmatrix}.$$

20.1.9. Арифметические полиномы и спектральные представления булевых функций

Переход от арифметических выражений, использующих функции Радемахера (разд. 19.4), к арифметическим полиномам может быть выполнен на основе соотношения

$$(-1)^{x_i} = 1 - 2x_i.$$

При этом арифметическое выражение для двоичного одноразрядного сумматора, полученное в указанном выше разделе на основе спектрального метода, преобразуется к виду:

$$Y = \frac{1}{2}[3 - \left((-1)^{x_3} + (-1)^{x_2} + (-1)^{x_1}\right)] =$$

$$= \frac{1}{2}[3 - (1 - 2x_3 + 1 - 2x_2 + 1 - 2x_1)] = x_1 + x_2 + x_3.$$

В разд. 19.4 получены также арифметические выражения для функций, образующих сумматор.

Построим АП для функции «голосование два и более из трех» по соответствующему арифметическому выражению:

$$f_2 = \frac{1}{4}\left(2 - \left((-1)^{x_1} + (-1)^{x_2} + (-1)^{x_3} + (-1)^{x_1 + x_2 + x_3}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}[2 - \left((-1)^{x_1} + (-1)^{x_2} + (-1)^{x_3} - (-1)^{x_1}(-1)^{x_2}(-1)^{x_3}\right)] =$$

$$=\frac{1}{4}[2-\big(1-2x_1+1-2x_2+1-2x_3-$$

$$-(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)\big)]=$$

$$=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3-2x_1x_2x_3.$$

Построим также АП для функции «нечетность трех переменных»:

$$f_1=\frac{1}{2}\Big(1-(-1)^{x_1+x_2+x_3}\Big)=\frac{1}{2}\Big(1-(-1)^{x_1}(-1)^{x_2}(-1)^{x_3}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\big(1-(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)\big)=$$

$$=x_1+x_2+x_3-2x_1x_2-2x_2x_3-2x_1x_3+4x_1x_2x_3.$$

Обратный переход от АП к арифметическим выражениям рассматриваемого вида может быть выполнен на основе соотношения

$$x_i=\frac{1}{2}\Big(1-(-1)^{x_i}\Big).$$

При этом справедливы соотношения

$$f_3=x_1x_2=\frac{1}{4}\Big(1-(-1)^{x_1}\Big)\Big(1-(-1)^{x_2}\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(1-(-1)^{x_2}-(-1)^{x_1}+(-1)^{x_1+x_2}\Big),$$

$$|S_3|=\frac{1}{4}|1,-1,-1,1|;$$

$$f_4=x_1\vee x_2=x_1+x_2-x_1x_2=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(1-(-1)^{x_1}\Big)+\frac{1}{2}\Big(1-(-1)^{x_2}\Big)-\frac{1}{4}\Big(1-(-1)^{x_1}\Big)\Big(1-(-1)^{x_2}\Big)=$$

$$=\frac{1}{4}\Big(3-(-1)^{x_2}-(-1)^{x_1}-(-1)^{x_1+x_2}\Big),$$

$$|S_4|=\frac{1}{4}|3,-1,-1,-1|.$$

20.2. Реализация системы булевых функций с использованием линейных арифметических полиномов

Если условие линейности выполняется, то система БФУ n переменных реализуется одним линейным арифметическим полиномом (ЛАП), который строится по значениям системы БФУ только на базовых входных наборах. Такой ЛАП будем называть базовым.

Коэффициенты этого ЛАП определяются матричным соотношением

$$\begin{vmatrix} a_{2^{n-1}} \\ a_{2^{n-2}} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{2^{n-1}} \\ y_{2^{n-2}} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}, \qquad (20.16)$$

получаемым из соотношения (20.8) вычеркиванием строк и столбцов матрицы P_n и элементов из вектор-столбцов **A** и **Y**, соответствующих нелинейным членам АП.

Эта матрица имеет размерность $(n+1)\times(n+1)$.

20.2.1. Реализация систем булевых функций двух и трех переменных

Пусть задана система булевых функций двух переменных, для которой из четырех входных наборов три являются базовыми, при этом она может быть реализована двумя ЛАП:

$$P_0 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_1,\ P_1 = y_3.$$

Коэффициенты полинома P_0 определяются из соотношения (20.16) при $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_2^0 \\ a_1^0 \\ a_0^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Например, система функций $Y(x_1, x_2) = |3\ \ 4\ \ 2\ \ 5|^T$ реализуется с помощью двух ЛАП: $P_0 = 3 + x_2 - x_1, P_1 = 5$.

Объединим построенные ЛАП с помощью управляющей конструкции (УК), определяющей область действия каждого полинома. При этом используется тот факт, что каждый базовый входной набор содержит не более одной единицы (рис. 20.1).

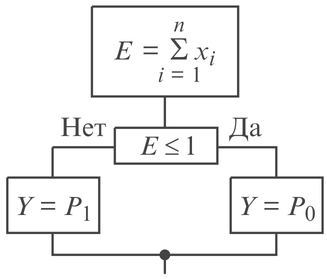

Рис. 20.1

Перейдем к рассмотрению случая $n = 3$. Для этого представим столбец значений Y заданной системы БФУ в виде двух не полностью определенных БФУ, первая из которых Y_0 образуется значениями системы на базовых наборах, а вторая (Y_1) — из всех остальных значений.

Коэффициенты нулевого ЛАП определяются из соотношения (20.16) при $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a_4^0 \\ a_2^0 \\ a_1^0 \\ a_0^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}. \tag{20.17}$$

При этом недоопределенные значения функции Y_0 приобретают значения, определяемые ЛАП.

Столбец функции Y_1 доопределим значениями системы булевых функций на базовых наборах таким образом, чтобы АП, реализующий этот столбец, стал линейным.

Для этого применим соотношение, вытекающее из условия линейности (20.12):

$$|\mathbf{Y}_b| = |\mathbf{D\ C}|^{-1} |\mathbf{Y}_k|. \tag{20.18}$$

В [15, 16] показано, что при $n = 3$

$$|\mathbf{D\ C}|^{-1} = |\mathbf{D\ C}|,$$

и поэтому из соотношения (20.13) следует, что

$$\begin{vmatrix} y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{vmatrix}.$$

При $n = 3$, подставляя в соотношение (20.16) найденное матричное равенство, получим:

$$\begin{vmatrix} a_4^1 \\ a_2^1 \\ a_1^1 \\ a_0^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{vmatrix}. \qquad (20.19)$$

ЛАП, которые могут быть построены с помощью полученных соотношений, объединяются управляющей конструкцей, как показано на рис. 20.1.

Пример 20.9. Реализовать СБФУ, представленную в виде:

$$Y(x_1, x_2, x_3) = |0\ \ 3\ \ 3\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 2\ \ 7|^T.$$

Используя соотношения (20.17) и (20.19), получим:

$$P_0 = 3x_3 + 3x_2 + 3x_1,\ P_1 = -8 + 5x_3 + 5x_2 + 5x_1.$$

Для компактного представления линейных АП введем матричную форму их записи:

$$\begin{vmatrix} P_0 \\ P_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ -8 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{vmatrix}.$$

Применяя результаты разд. 20.1.5, заданная СБФУ может быть реализована одним АП, который является нелинейным и весьма сложным:

$$Y = 3x_3 + 3x_2 - 4x_2x_3 + 3x_1 - 4x_1x_3 - 4x_1x_2 + 10x_1x_2x_3.$$

Предложим табличную форму для записи нелинейных АП (НАП) [16]. Для рассматриваемого примера НАП записан в виде табл. 20.1.

Таблица 20.1

	1	x_3	x_2	x_2x_3
1	0	3	3	– 4
x_3	3	– 4	– 4	10

20.2.2. Формирование групп значений системы булевых функций, реализуемых одним линейным полиномом

Значения системы БФУ на базовых наборах могут быть реализованы линейными арифметическими полиномами. Предложим подход к реализации системы булевых функций с помощью ЛАП на остальных наборах.

Разобьем эти наборы на минимальное число групп таким образом, чтобы каждая из них содержала не более $n + 1$ наборов, а значения системы БФУ, входящие в группу, реализовались бы одним ЛАП. Последнее условие выполняется, если для рассматриваемой группы наборов матрица $|\mathbf{D}\ \mathbf{C}|$ имеет обратную, что позволяет вычислять коэффициенты ЛАП на основе соотношений (20.16) и (20.18). Обратимость матрицы $|\mathbf{D}\ \mathbf{C}|$ для группы, содержащей $n + 1$ набор, обеспечивается линейной независимостью [17] системы уравнений, задаваемой соотношением (20.12) на этой группе.

В [15, 16] показано, что линейная независимость указанной системы уравнений достигается при формировании каждой группы входных наборов на основе одного из следующих соотношений:

$$X_{i+1} = X_i + F_i; \tag{20.20}$$

$$X_{i+1} = X_i - F_i, \tag{20.21}$$

где X_i — номер в таблице истинности i-го набора, входящего в группу ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$); F_i — обобщенное число Фибоначчи [18], определяемое соотношениями

$$F_i = F_{i-1} + F_j, \quad F_1 = F_2 = 1, \quad j = i - 1 \text{ или } i - 2.$$

При $j = i - 1$

$$F_i = 2F_{i-1}; \tag{20.22}$$

при $j = i - 2$

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}. \tag{20.23}$$

Пример 20.10. Пусть задана система БФУ четырех переменных, реализованная на базовых наборах линейным АП. Из оставшихся наборов необходимо выделить группу из $n + 1$ элементов, значения системы БФУ на которых можно реализовать другим ЛАП.

Выбирая номера наборов, например в соответствии с соотношением (20.20), получим:

$$X_2 = X_1 + F_1,\ X_3 = X_2 + F_2,\ X_4 = X_3 + F_3,\ X_5 = X_4 + F_4.$$

Используя соотношение (20.23), определим, что $F_3 = 2$, $F_4 = 3$. Тогда при $X_1 = 5$ получим: $X_2 = 6$, $X_3 = 7$, $X_4 = 9$, $X_5 = 12$.

Проверим обратимость матрицы $|D\ C|$ для выбранной группы наборов. Для этого сначала запишем условие линейности (20.12) для сформированной группы:

$$\begin{vmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_9 \\ y_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_9 \\ y_{12} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, в данном случае обратная матрица существует, и поэтому, применяя последнее соотношение и соотношение (20.16), можно построить ЛАП для найденной группы наборов.

Нахождение обратной матрицы в общем случае весьма трудоемко, однако в [15, 16] установлено, что при формировании группы из $n + 1$ наборов в соответствии с соотношениями (20.21) и (20.23) выполняется равенство

$$|\mathbf{D\ C}|^{-1} = |\mathbf{D\ C}|.$$

20.2.3. Реализация систем булевых функций четырех переменных

Нулевая группа состоит из значений СБФУ на базовых наборах. При этом из соотношения (20.16) следует, что

$$\begin{vmatrix} a_8^0 \\ a_4^0 \\ a_2^0 \\ a_1^0 \\ a_0^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Первую группу сформируем на основании соотношений (20.21) и (20.22). Полагая $X_1 = 15$, получим $X_2 = 14$, $X_3 = 13$, $X_4 = 11$, $X_5 = 7$. Для этих наборов условие линейности приобретает вид:

$$\begin{vmatrix} y_7 \\ y_{11} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

В силу того что при этом $|\mathbf{D}\,\mathbf{C}|^{-1} = |\mathbf{D}\,\mathbf{C}|$, то

$$\begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_7 \\ y_{11} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{vmatrix}.$$

Подставляя в соотношение (20.16) при $n = 4$ найденное равенство, получим:

$$\begin{vmatrix} a_8^1 \\ a_4^1 \\ a_2^1 \\ a_1^1 \\ a_0^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_7 \\ y_{11} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{vmatrix}.$$

Разобьем оставшиеся шесть наборов на две группы и определим для каждой из них ЛАП. В силу того что в 3-, 5-, 6-м наборах старшие разряды ноль, а в 9-, 10-, 12-м наборах — единица, сформируем вторую и третью группы по этому признаку: (3-, 5-, 6-й) и (9-, 10-, 12-й). Запишем условие линейности для каждой из этих групп:

$$\begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Так как в рассматриваемых системах число переменных превышает количество уравнений, то эти системы могут иметь множество решений. В качестве одного из них получим:

$$\begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{vmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в соотношение (20.16) при $n = 4$, получим:

$$\begin{vmatrix} a_8^2 \\ a_4^2 \\ a_2^2 \\ a_1^2 \\ a_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_8^3 \\ a_4^3 \\ a_2^3 \\ a_1^3 \\ a_0^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_9 \\ y_{10} \\ y_{12} \end{vmatrix}.$$

Полученные линейные АП объединяются с помощью управляющей конструкции (рис. 20.2), которая основана на следующих особенностях выделенных групп: наборы нулевой группы содержат не более одной единицы; наборы первой группы содержат не менее трех единиц; наборы, образующие вторую и третью группы, разделяются по значению старшей переменной x_1.

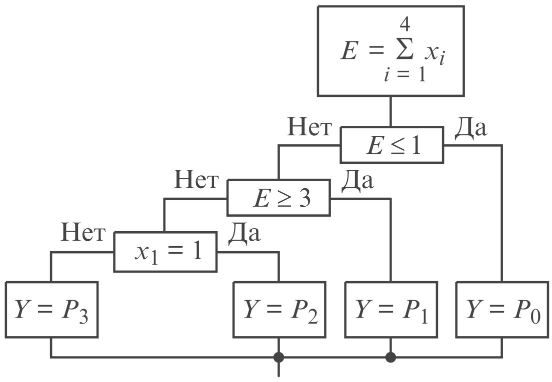

Рис. 20.2

Пример 20.11. Реализовать систему булевых функций, представленную в виде:

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4) = |1\ 3\ 2\ 0\ 0\ 1\ 1\ 3\ 1\ 2\ 2\ 0\ 1\ 1\ 1\ 3|^T.$$

Используя найденные соотношения, получим:

$$\begin{vmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{vmatrix}.$$

Нелинейный арифметический полином, получаемый для этой системы БФУ, задается табл. 20.2.

Таблица 20.2

	1	x_4	x_3	x_3x_4
1	1	2	1	– 4
x_2	– 1	– 1	0	5
x_1	0	– 1	0	1
x_1x_2	1	0	– 1	0

В [16] приведены условия линейности второго и третьего порядков, при выполнении которых системы БФУ четырех переменных реализуются более простой граф-схемой по сравнению с приведенной на рис. 20.2.

20.2.4. Реализация систем булевых функций пяти и более переменных

Применяя подход, изложенный в разд. 20.2.2, удается все входные наборы при $n = 5$ разбить на шесть групп: 0, 1, 2, 4, 8, 16; 15, 23, 27, 29, 30, 31; 10, 18, 22, 24, 25, 26; 5, 13, 17, 19, 20, 21; 3, 7, 9, 11; 6, 12, 14, 28.

Для каждой из этих групп в [15, 16] найдено матричное соотношение для построения ЛАП. Однако при этом управляющая конструкция, объединяющая ЛАП, получается весьма сложной.

Рассмотрим другой подход к формированию групп, при котором управляющая конструкция также будет состоять из ЛАП и условных вершин, в которых производится сравнение значений этих полиномов с константами.

При этом нулевая и симметричная ей (первая) группы выделяются на основе метода, изложенного в разд. 20.2.2. Выбор этих групп осуществляется с помощью ЛАП вида:

$$E = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

и предикатов с условиями $E \leqslant 1$ и $E \geqslant n - 1$ соответственно.

Исходя из соотношения (20.16), получим соотношение для определения коэффициентов ЛАП на базовых наборах. Для первой группы воспользуемся подходом, изложенным в разд. 20.2.2. При этом

$$\begin{vmatrix} a_{16}^{0} \\ a_{8}^{0} \\ a_{4}^{0} \\ a_{2}^{0} \\ a_{1}^{0} \\ a_{0}^{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{16} \\ y_{8} \\ y_{4} \\ y_{2} \\ y_{1} \\ y_{0} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{16}^{1} \\ a_{8}^{1} \\ a_{4}^{1} \\ a_{2}^{1} \\ a_{1}^{1} \\ a_{0}^{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_{15} \\ y_{23} \\ y_{27} \\ y_{29} \\ y_{30} \\ y_{31} \end{vmatrix}.$$

Формирование следующих групп будем выполнять с помощью построения карт Карно, определяющих функции выбора каждой группы. При этом в карте на месте наборов, входящих в выделенные ранее группы, ставятся прочерки. На остальных позициях карты будем пытаться разместить не более $n + 1$ единиц, соответствующих наборам выделяемой группы (оставшиеся позиции карты заполним нулями), таким образом, чтобы функция выбора была пороговой и обеспечивалась линейная независимость системы уравнений, задаваемой условием линейности для этой группы. Пороговость функции позволяет реализовать ее одним ЛАП и одной условной вершиной.

В случае если функция выбора, удовлетворяющая указанным выше условиям, найдена, то в карте Карно нули удаляются, а единицы заменяются прочерками. Тем самым повышается степень неопределенности функции выбора следующей группы, что увеличивает вероятность доопределения этой функции до пороговой. Приведенная процедура повторяется многократно, причем ввиду увеличения степени неопределенности шансы получения пороговой функции увеличиваются с каждым шагом.

Разобьем оставшиеся двадцать наборов на четыре группы (по пять в каждой). Для определения функции выбора наборов второй группы проставим в карте Карно прочерки на позициях, соответствующих наборам нулевой и первой групп. На остальных позициях попытаемся разместить пять единиц и пятнадцать нулей таким образом, чтобы функция выбора наборов этой группы была пороговой, а соответствующая система уравнений обладала линейной независимостью.

Это решение, найденное эвристически в [15, 16], имеет вид:

$$f_2 = !x_1(!x_2 \vee x_4 x_5).$$

При этом

$$E_2 = -3x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5, \; E_2 \geqslant 0,$$

а вторая группа состоит из наборов 3, 5, 6, 7, 11. Для этих наборов (в силу того что $x_1 = 0$ и, следовательно, $a_{16}^2 = 0$) соотношение (20.8) приобретает вид:

$$\begin{Vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{Vmatrix}.$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{Vmatrix} y_8 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_{11} \end{Vmatrix}.$$

На основе этого соотношения и соотношения (20.16) с учетом того, что $a_{16}^2 = 0$, получим:

$$\begin{Vmatrix} a_{16}^2 \\ a_8^2 \\ a_4^2 \\ a_2^2 \\ a_1^2 \\ a_0^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_3 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_{11} \end{Vmatrix}.$$

Далее составим карту Карно с прочерками на месте наборов нулевой, первой и второй групп и построим функцию выбора значений третьей группы. В [15, 16] показано, что

$$f_3 = x_1(x_4 \vee !x_2!x_3),\ E_3 = 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4,\ E_3 \geqslant 3,$$

а наборами третьей группы являются: 17-, 18-, 19-, 22-, 26-й.

Полагая, что $y_0 = y_{16}$, и выполняя преобразования, аналогичные проведенным для второй группы, получим:

$$\begin{Vmatrix} a_{16}^3 \\ a_8^3 \\ a_4^3 \\ a_2^3 \\ a_1^3 \\ a_0^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_{17} \\ y_{18} \\ y_{19} \\ y_{22} \\ y_{26} \\ \end{Vmatrix}.$$

Составим карту Карно с прочерками на месте наборов всех предшествующих групп. Выделим единицами наборы четвертой группы, а нулями — пятой. В [15, 16] показано, что функция выбора наборов четвертой группы имеет вид:

$$f_4 = x_2(x_5 \vee !x_1x_3),\ E_4 = -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_5,\ E_3 \geqslant 4.$$

При этом в четвертую группу войдут 9-, 12-, 13-, 14-, 15-й наборы, а в пятую — 10-, 20-, 21-, 24-, 28-й наборы.

Полагая, что $y_0 = 0$, и выполняя преобразования, аналогичные приведенным для второй группы, получим:

$$\begin{Vmatrix} a_{16}^4 \\ a_8^4 \\ a_4^4 \\ a_2^4 \\ a_1^4 \\ a_0^4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_9 \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{25} \\ \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} a_{16}^5 \\ a_8^5 \\ a_4^5 \\ a_2^5 \\ a_1^5 \\ a_0^5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ y_{21} \\ y_{24} \\ y_{28} \\ \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, произвольная систем БФУ пяти переменных может быть реализована граф-схемой, приведенной на рис. 20.3.

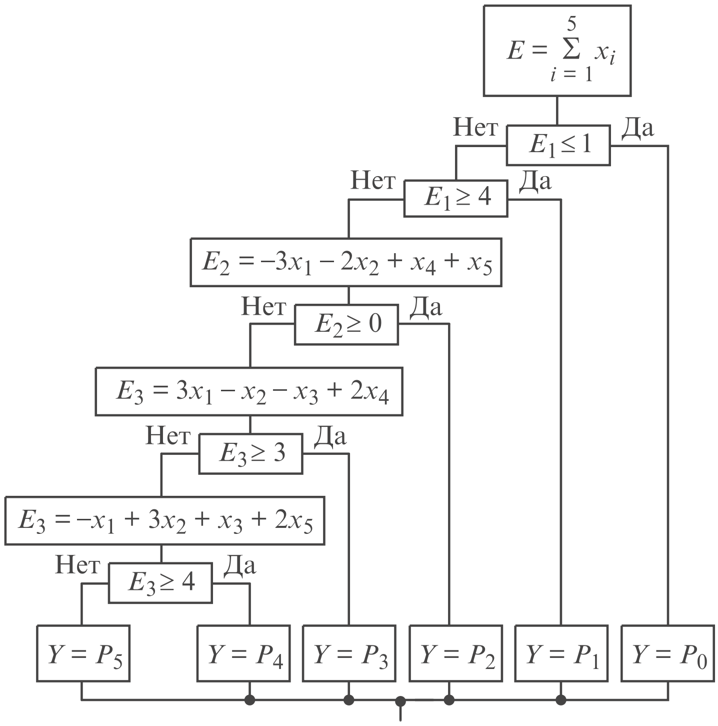

Рис. 20.3

Поэтому можно утверждать, что п р о и з в о л ь н а я с и с т е м а БФУ п я т и п е р е м е н н ы х м о ж е т б ы т ь р е а л и з о в а н а с помощью десяти ЛАП и пяти предикатов, что по эквивалентной сложности м е н ь ш е, ч е м д е с я т ь п о р о г о в ы х э л е м е н т о в. Следовательно, предлагаемый подход позволил получить п р и н ц и п и а л ь н о новый результат, относящийся к области реализации систем БФУ в базисе пороговых элементов.

Реализация систем БФУ при $n > 5$ может выполняться, как показано в [16], на основе разложения Шеннона, используя результаты, приведенные выше при $n \leqslant 5$.

Изложенный в настоящем разделе подход был впервые опубликован в [19].

20.2.5. Реализация алгоритма управления посадкой плавучей полупогружной буровой установки

При проектировании системы управления посадкой плавучей полупогружной буровой установки (ППБУ) возможно применение различных алгоритмов. В настоящей работе предлагается использовать ЛАП для реализации алгоритма управления, предложенного ЦКБ-проектантом ППБУ и основанного на применении факторов E_t.

Фактор E_t это функция, определяющая необходимость изменения количества балласта в *t*-й группе цистерн (t = 1, … , 4) ППБУ в зависимости от заданных оператором знаков изменения осадки (pT), крена (pQ) и дифферента ($p\Phi$). При необходимости откачки балласта $E_t = -1$, при отсутствии необходимости его изменения $E_t = 0$, при приеме балласта $E_t = 1$. Троичными (с теми же значениями – 1, 0, 1) являются и значения аргументов pT, pQ, $p\Phi$.

При этом заданный алгоритм можно представить троичной таблицей истинности. Построенная ТИ преобразуется в таблицу с аргументом X и функцией E за счет представления каждого набора значений аргументов (функций) исходной таблицы в десятичной системе счисления. Для новой таблицы характерно, что

$$E(-X) = -E(X). \tag{20.24}$$

Поэтому будем рассматривать функцию E только при $X \geqslant 0$ (табл. 20.3).

Таблица 20.3

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
E	0	– 32	6	– 20	– 26	– 1	– 10	– 9	– 4	– 40	– 36	– 3	– 30	– 27

Представим значения X в виде четырехразрядных двоичных чисел $x_1 x_2 x_3 x_4$ и реализуем приведенную таблицу нелинейным АП и выделим в нем линейную часть: $P_0 = -4x_1 - 26x_2 - 6x_3 - 32x_4$. Этот полином реализует значения функции E при X = 0, 1, 2, 4, 8. Оставшиеся девять наборов разобьем, используя условие линейности (20.12), на две группы так, чтобы значения функции E на наборах группы реализовывались ЛАП: (5, 9, 11, 12, 13) и (3, 6, 7, 10). При этом

$$P_1 = -17 - 26x_1 + 13x_2 + 37x_3 + 3x_4,$$
$$P_2 = -21 - 15x_1 + 11x_2 + x_4.$$

Сформируем управляющую конструкцию для выбора полиномов P_0, P_1, P_2, применяя другие ЛАП и условные операторы. Базовый ЛАП выделяется с помощью линейного арифметического полинома $P_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и предиката с условием $P_3 \leqslant 1$. Для различения полиномов P_1 и P_2 формируется карта Карно с прочерками на базовых и неопределенных наборах, единицами на наборах второй группы и нулями на наборах третьей группы. Функция выбора в этом случае является пороговой и реализуется формулой $P_4 = x_1 x_4 \vee !\, x_3$, и поэтому $P_4 = x_1 - 2x_3 + x_4$ и $P_4 \geqslant 0$.

Таким образом, заданная таблица реализуется пятью ЛАП и двумя предикатами. Если $X < 0$, то используется соотношение (20.24).

Следовательно, заданный алгоритм реализуется за счет:

— преобразования троичных входных наборов в двоичные;

— вычисления десятичных значений фактора E с помощью ЛАП и предикатов;

— преобразования этих значений в троичную систему счислений.

При этом отметим, что в настоящей работе первый и третий этапы реализации алгоритма не рассматриваются.

Предложенная реализация [15, 20] является оптимальной по числу операторов для вычислительных устройств, в которых один ЛАП реализуется одной командой [21].

20.3. Реализация одной булевой функции одним линейным арифметическим полиномом с маскированием

20.3.1. Реализация булевой функции безызбыточным линейным арифметическим полиномом

Т е о р е м а 20.2. Линейным арифметическим полиномом безызбыточно можно реализовать лишь булеву функцию, существенно зависящую не более чем от одной переменной: 0, 1, $!x$, x [22].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждое значение булевой функции должно быть равно 0 или 1, а коэффициенты ЛАП (кроме $a_0 = 0, 1$) могут принимать только следующие значения: -1, 0, 1. Если $a_0 = 0$ ($a_0 = 1$), то не более одного из оставшихся коэффициентов может быть равно единице (минус единице), в то время как остальные коэффициенты должны быть равны нулю. В противном случае хотя бы на одном входном наборе значение полинома не будет равно ни нулю, ни единице, что и доказывает сформулированную теорему.

Из этой теоремы следует, что одна булева функция, существенно зависящая от двух и более переменных, не может быть реализована безызбыточным линейным арифметическим полиномом, и поэтому рассмотрим вопрос о реализации одной БФУ избыточным ЛАП, который наряду с заданной реализует еще и другие функции. Так как при этом значение заданной БФУ выделяется из двоичного представления избыточного ЛАП с помощью операции маскирования, то такие полиномы будем называть ЛАП с маскированием (ЛАПМ).

20.3.2. Реализация пороговых функций линейным арифметическим полиномом с маскированием

В настоящем разделе рассматриваются два метода реализации пороговых функций (ПФ), первый из которых строит ЛАПМ n переменных по пороговому представлению функции n переменных, а второй — по ЛАПМ пороговой функции, зависящей от $n - 1$ переменных.

Первый метод. Известно [23], что пороговая функция f может быть реализована ЛАП

$$p = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

и условным оператором

```
if(p ⩾ T) then f = 1 else f = 0,
```

где p_i — вес переменной x_i, T — порог функции.

В настоящем разделе ставится задача нахождения для функции f другого ЛАП:

$$P = p_0 + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n,$$

такого чтобы вычисление соотношения

$$f = r_m^m(\operatorname{bin} P) \tag{20.25}$$

было проще, чем пороговая реализация. В этом выражении нижний индекс равен числу разрядов в двоичном представлении максимального значения полинома P, а верхний — номеру выделяемого маскированием разряда.

Следовательно, задача реализации одной пороговой функции (ПФ) сводится к определению и добавлению к ней справа $m - 1$ булевых функций таким образом, чтобы выполнялось соотношение (20.25).

При этом отметим, что если $T = 2^a$ ($a = 0, 1, 2, \ldots$), то наличие единицы хотя бы в одном разряде двоичного представления значений выражения

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i,$$

начиная с разряда с номером $a + 1$ (при нумерации разрядов с единицы), свидетельствует о том, что вычисленное значение достигло или превысило величину T.

Если $T \neq 2^a$, то задача сводится к рассмотренной за счет увеличения порога до величины, равной ближайшей целой степени двух. Для этого необходимо добавить к левой и правой части неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant T,$$

входящего в определение ПФ, величину $(2^{]\log T[} - T)$:

$$2^{]\log T[} - T + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geqslant 2^{]\log T[}. \qquad (20.26)$$

При этом новым порогом будет величина $T_1 = 2^a = 2^{]\log T[}$.

Пусть b — число разрядов в двоичном представлении максимального значения величины P.

Рассмотрим случай, когда $b = a + 1$. В этом случае превышение порога происходит только в одном разряде двоичного представления значения величины P. Для этого величина b не должна превышать число разрядов двоичного представления величины порога T_1.

Сформулированное условие можно записать в виде:

$$P_{\max} < 2T, \qquad (20.27)$$

где $P_{\max}$ — максимальное значение полинома P.

Если для пороговой функции условие (20.27) не выполняется, то необходимо увеличить величину T_1 в два раза. Для этого требуется добавить к левой и правой части неравенства (20.26) величину T_1. Если и при этом условие (20.27) не выполняется, указанная процедура повторяется до его выполнения.

Таким образом, можно добиться выполнения условия (20.27) для любой пороговой функции, так как при увеличении левой и правой части неравенства (20.26) правая часть неравенства (20.27) возрастает в два раза быстрее левой.

Следовательно, доказано, что произвольная пороговая функция может быть вычислена следующим образом:

$$f = r_b^b(\operatorname{bin} P).$$

Программная реализация этого соотношения на языке высокого уровня, например СИ, чрезвычайно проста и состоит в вычислении на заданном входном наборе значения полинома P, в сдвиге полученного результата на $b - 1$ разрядов вправо и считывании полученного результата, равного значению ПФ на этом наборе.

Для того чтобы воспользоваться предложенным подходом для заданной пороговой функции, необходимо предварительно определить ее пороговую реализацию (ПР).

Процедура определения весов переменных и порога для пороговой функции весьма трудоемка [23], и поэтому укажем три более простых подхода к нахождению пороговой реализации. Первый подход строит ПР непосредственно по описанию ПФ, второй основан на использовании для произвольных пороговых функций шести и менее переменных каталогов оптимальных ПР (например, [24]), а третий, изложенный в разд. 15.2, применим для бесповторных пороговых формул (БПФ), имеющих важное практическое и теоретическое значение [22, 25—27].

Пример 20.12. Реализовать ПФ «два и более из трех», которая описывается формулой $f = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 x_2$.

Из словесного описания функции следует, что $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2$. Так как в этом случае $T = 2^a$, а соотношение (20.27) выполняется, то

$$f = r_2^2 \left(\text{bin}\,(x_1 + x_2 + x_3) \right).$$

Проиллюстрируем полученное соотношение табл. 20.4.

Таблица 20.4

x_1	x_2	x_3	$x_1+x_2+x_3$	bin $(x_1+x_2+x_3)$	
				r_2^2	r_2^1
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	2	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	2	1	0
1	1	0	2	1	0
1	1	1	3	1	1

Из этой таблицы следует, что введение избыточности (реализация полиномом двух функций вместо одной) и применение операции маскирования позволило построить ЛАПМ вместо безызбыточного (по числу объединяемых функций), но более сложного нелинейного арифметического полинома:

$$f = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2 x_1 x_2 x_3 .$$

Таким образом, повторной булевой формуле соответствует бесповторный арифметический полином с маскированием, что является основной предпосылкой использования последнего для эффективной программной реализации. Для бесповторной булевой формулы ее непосредственная программная реализация всегда более эффективна, чем реализация на основе ЛАПМ. Однако для систем пороговых формул, даже бесповторных, применение ЛАПМ может обеспечить минимальную по объему памяти программную реализацию (разд. 20.4.1).

При использовании языка СИ найденный ЛАПМ реализуется следующей программой:

```
 laps (int x1, int x2, int x3)
{int f;
 f = (x1 + x2 + x3) >> 1;
 return (f);},
```

где >> L — символ операции «сдвиг на L двоичных разрядов вправо».

Эта программа, как уже было отмечено в разд. 18.6, является наилучшей, как по объему памяти, так и по быстродействию, по сравнению с другими шестьюдесятью программами, приведенными в [3], вычисляющими эту функцию в предположении, что i-я входная переменная находится в крайнем правом разряде i-го слова.

Пример 20.13. Реализовать ПФ «семь и более из десяти».

Из описания функции следует, что

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \geqslant 7.$$

Увеличим порог функции до величины 2^a. При этом

$$1+\sum_{i=1}^{10} x_i \geqslant 8.$$

Так как при этом неравенство (20.27) выполняется, то

$$f = r_4^4\left(\text{bin}\left(1+\sum_{i=1}^{10} x_i\right)\right).$$

Этот пример демонстрирует возможность высокой эффективности применения ЛАПМ, так как таблица истинности, булева формула или нелинейный АП в этом случае чрезвычайно громоздки и поэтому программируются с большими затратами памяти.

Пример 20.14. Реализовать пороговую функцию

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee x_1 x_2 x_3.$$

В этом случае из [24] следует, что $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 3$.

В силу того что в этом случае $T \neq 2^a$, увеличим порог функции:

$$1 + x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geqslant 4.$$

Так как при этом соотношения (20.26) и (20.27) выполняются, то

$$f = r_3^3\left(\text{bin}\,(1 + x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)\right).$$

Пример 20.15. Реализовать БПФ $f = x_1 x_2$.

Используя метод, изложенный выше, получим, что $x_1 + x_2 \geqslant 2$. Так как при этом $T = 2^a$, а соотношение (20.27) выполняется, то

$$f = r_2^2\left(\text{bin}\,(x_1 + x_2)\right).$$

Пример 20.16. Реализовать БПФ $f = x_1 \vee x_2$.

Применяя метод, изложенный выше, получим, что $x_1 + x_2 \geqslant 1$.

Так как в этом случае $T = 2^a$, но условие (20.27) не выполняется, увеличим порог функции:

$$1 + x_1 + x_2 \geqslant 2.$$

Ввиду того что при этом оба условия выполняются, то

$$f = r_2^2\left(\text{bin}\,(1 + x_1 + x_2)\right).$$

Пример 20.17. Реализовать БПФ $f = x_1 x_2 x_3$.

В этом случае $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3$. Так как $T \,!= 2^a$, увеличим порог функции до ближайшей степени двух:

$$1 + x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 4.$$

Ввиду того что при этом условие (20.27) выполняется, то

$$f = r_3^3\left(\text{bin}\,(1 + x_1 + x_2 + x_3)\right).$$

Пример 20.18. Реализовать БПФ $f = x_1 x_2 \vee x_3$.

В этом случае $x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 2$ и $T = 2^a$, и так как соотношение (20.27) не выполняется ($P_{\max} = 2T$), то увеличим порог до следующей величины, равной степени двух: $2 + x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 4$. Так как при этом соотношение (20.27) выполняется, то

$$f = r_3^3\left(\text{bin}\,(2 + x_1 + x_2 + 2x_3)\right).$$

Второй метод. Метод основан на теореме, приведенной в [28].

Т е о р е м а 20.3. Если кортеж N булевых функций n переменных

$$f_N f_{N-1} \dots f_1$$

реализуется линейным арифметическим полиномом P_N, то кортеж из $(N+1)$-й функций

$$(f_N \,\&\, x_{n+1})(f_N \oplus x_{n+1}) f_{N-1} \dots f_1 \tag{20.28}$$

реализуется ЛАП вида $P_{N+1} = P_N + 2^{N-1} x_{n+1}$, а кортеж из того же числа функций

$$(f_N \vee x_{n+1})(f_N \oplus x_{n+1} \oplus 1) f_{N-1} \dots f_1 \tag{20.29}$$

реализуется ЛАП вида $P_{N+1} = P_N + 2^{N-1} x_{n+1} + 2^{N-1}$.

В силу установленного в [15, 16] факта, что ЛАП реализует лишь такие кортежи функций, в которых крайняя левая функция f_N является пороговой (в [23] показано, что если f_N — пороговая функция n переменных, то и функции $f_N \,\&\, x_{n+1}$ и $f_N \vee x_{n+1}$ также являются пороговыми), приведенная теорема определяет:

— рекурсивный метод построения ЛАПМ для БПФ;

— простой метод реализации ПФ вида $f_N \,\&\, x_n$ и $f_N \vee x_n$ для случая, когда ЛАПМ для функции f_N уже найден.

Пример 20.19. Реализовать пороговую функцию $f = x_1 x_2 x_3$.

Из примера *20.15* следует, что для $f = x_1 x_2$ $n = 2$, $N = 2$, и поэтому из соотношения (20.28) получим:

$$f = r_3^3 \left(\text{bin}\,(x_1 + x_2 + 2 x_3) \right).$$

Из сопоставления этого соотношения с приведенным в примере *20.17* следует, что представление булевых формул с помощью ЛАПМ в отличие от их представления АП не является единственным.

Пример 20.20. Реализовать пороговую функцию

$$f = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_4.$$

Из примера *20.12* следует, что для $f_1 = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 x_2$ $n = 2$, $N = 2$, и поэтому, исходя из соотношения (20.29), получим:

$$f = r_3^3 \left(\text{bin}\,(2 + x_1 + x_2 + x_3 + 2 x_4) \right).$$

Методы, рассмотренные выше, применимы к пороговым функциям, представимым формулами без инверсий. При наличии в реализуемой формуле переменных типа $!x_i$ первоначально ЛАПМ строится для *PN*-однотипной с ней ПФ без инверсий, а затем в ЛАПМ переменная x_i заменяется соотношением $1 - x_i$.

Пример 20.21. Реализовать пороговую функцию $f = x_1 \vee ! x_2$.

Из изложенного и примера *20.16* следует, что

$$f = r_2^2 \left(\text{bin} \, (2 + x_1 - x_2) \right).$$

Пример 20.22. Реализовать пороговую функцию

$$f = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 x_2 \vee ! x_4.$$

Из изложенного и примера *20.20* следует, что

$$f = r_3^3 \left(\text{bin} \, (4 + x_1 + x_2 + x_3 - 2 x_4) \right).$$

20.3.3. Реализация линейных булевых функций линейным арифметическим полиномом с маскированием

Линейной называется булева формула, представимая формулой

$$f = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus \ldots \oplus c_n x_n,$$

где $c_i = 0, 1$.

Линейная функция реализуется ЛАПМ вида

$$f = r_{1+[\log n]}^1 \left(\text{bin} \left(c_0 (1 - x_n) + \ldots + c_k x_k \right) \right).$$

Поэтому

$$f_1 = x_1 \oplus x_2 = r_2^1 \left(\text{bin} \, (x_1 + x_2) \right);$$
$$f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = r_2^1 \left(\text{bin} \, (x_1 + x_2 + x_3) \right).$$

Вторая из этих функций реализуется на языке СИ следующей программой:

```
 mod (int x1, int x2, int x3)
{int f2;
 f2 = (x1 + x2 + x3) & 1;
 return (f2);}.
```

Рассмотренные функции реализуются теми же ЛАПМ, что и функции $f_{11} = x_1 x_2$, $f_{21} = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 x_2$ соответственно, как и должно быть для двоичных одноразрядных полусумматора и сумматора.

20.3.4. Реализация порогово-линейных функций линейным арифметическим полиномом с маскированием

Порогово-линейной функцией (ПЛФ) будем называть булеву функцию, представимую формулой вида:

$$f = f_1(x_1, \ldots, x_n) \oplus \tilde{x}_i \oplus \ldots \oplus \tilde{x}_j,$$

где f_1 — пороговая функция; i, j — целые числа; $\tilde{x}_i = \{!x_i, x_i\}$.

Рассмотрим методы построения ЛАПМ для БФУ, заданных в порогово-линейной форме.

Использование теоремы 20.3 позволяет реализовать ПЛФ, для которых $i, j > n$, а ЛАПМ для функции f_1 найден с помощью методов, изложенных в разд. 20.3.2.

Пример 20.23. Реализовать ПЛФ $f = x_1 x_2 x_3 \oplus !x_4$.

Из примера *20.17* следует, что

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 = r_3^3\left(\operatorname{bin}(1 + x_1 + x_2 + x_3)\right).$$

Поэтому из соотношения (20.29) следует, что

$$f = x_1 x_2 x_3 \oplus !x_4 = x_1 x_2 x_3 \oplus x_4 \oplus 1 =$$
$$= r_4^3\left(\operatorname{bin}(5 + x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4)\right).$$

Эта булева функция может быть реализована и другим ЛАПМ. Из соотношения (20.28) и разд. 20.3.2 следует, что

$$f = x_1 x_2 x_3 \oplus !x_4 = r_4^3\left(\operatorname{bin}(5 + x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4)\right).$$

Это соотношение реализуется на языке СИ следующей программой:

```
 plf (int x1, int x2, int x3, int x4)
{int f;
 f = ((5 + x1 + x2 + x3 - 4*x4) >> 2) & 1;}.
```

Недостаток теоремы 20.3 состоит в том, что ее нельзя использовать для случая, когда $i, j \leqslant n$. Этот недостаток устраняется применением следующей теоремы [29].

Т е о р е м а 20.4. Если $f_1 = r_m^k(\operatorname{bin} P_N)$, то $f = f_1 \oplus x_i$ реализуется в k-м разряде полинома $P_N + 2^{k-1} x_i$, где $i = \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Пример 20.24. Реализовать ПЛФ $f = x_1 \oplus x_2(!x_3 \vee x_4)$.

Из примера *20.21* следует, что $f_1 = !x_3 \vee x_4 = r_2^2\left(\operatorname{bin}(2 - x_3 + x_4)\right)$.

Используя соотношение (20.28), получим:

$$f_2 = x_2(!x_3 \vee x_4) = r_3^3\left(\operatorname{bin}(2 + 2x_2 - x_3 + x_4)\right).$$

Применяя теорему 20.4, находим:

$$f = r_4^3\left(\mathrm{bin}\,(2 + 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4)\right).$$

При этом отметим, что в [5] эта формула реализуется существенно более сложным нелинейным АП:

$$f = 1 - x_1 - x_2 - x_3 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3x_4 -$$
$$- 4x_1x_2x_3 - 2x_1x_3x_4 - 2x_2x_3x_4 + 4x_1x_2x_3x_4.$$

Пример 20.25. Реализовать ПЛФ $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \oplus x_3$.

В силу того что

$$f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = r_3^3\left(\mathrm{bin}\,(3 + x_1 + x_2 + x_3)\right),$$

то из теоремы 20.4 следует, что

$$f = r_4^3\left(\mathrm{bin}\,(3 + x_1 + x_2 + 5x_3)\right).$$

С другой стороны, так как

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \oplus x_3 = (x_1 \vee x_2)x_3$$

является ПФ, то, используя результаты разд. 20.3.2, получим:

$$f = r_3^3\left(\mathrm{bin}\,(3 + x_1 + x_2 - 2x_3)\right).$$

Пример 20.26. Реализовать ПЛФ $f = x_1x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5$.

В данном случае

$$f_1 = x_1x_2 = r_2^2\left(\mathrm{bin}\,(x_1 + x_2)\right).$$

Двукратно применяя теорему 20.4, получим:

$$f_2 = x_1x_2 \oplus x_3 = r_3^2\left(\mathrm{bin}\,(x_1 + x_2 + 2x_3)\right);$$
$$f_3 = x_1x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 = r_3^2\left(\mathrm{bin}\,(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4)\right).$$

Таким образом,

$$f = r_4^2\left(\mathrm{bin}\,(x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5)\right).$$

Интересным является тот факт, что в этом примере в отличие от предыдущих реализуемая функция «сдвинулась» в середину двоичного представления.

Перейдем к рассмотрению случая, когда ПЛФ задана в форме, отличной от порогово-линейной. Поиск такой формы предлагается проводить на основе соотношений, приведенных в разд. 1.7:

$$f = \big(!x_i f(0) \vee x_i! f(1)\big) \oplus x_i; \qquad (20.30)$$

$$f = \big(!x_i\, ! f(0) \vee x_i f(1)\big) \oplus !x_i. \qquad (20.31)$$

Пример 20.27. Реализовать ПЛФ $f = !x_1 x_2 \vee x_1 ! x_2 x_3$.

На основе соотношения (20.30) получим:

$$f = f_1 \oplus x_1 = (x_1 ! x_3 \vee x_2) \oplus x_1.$$

Для пороговой функции

$$f_1 = r_3^3 \big(\mathrm{bin}\,(3 + x_1 + 2x_2 - x_3)\big).$$

Поэтому, используя теорему 20.4, получим:

$$f = r_4^3 \big(\mathrm{bin}\,(3 + x_1 + 2x_2 - x_3)\big).$$

Эта функция реализована в [29] с помощью алгоритма Балаша более сложным ЛАПМ:

$$f = r_6^4 \big(\mathrm{bin}\,(5 + 12x_1 + 6x_2 + 14x_3)\big).$$

Пример 20.28. Реализовать булеву формулу

$$f = (!x_1 \vee !x_2 \vee !x_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Применяя соотношение (20.30), получим:

$$f = f_1 \oplus x_1 = \big(!x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3\big) \oplus x_1.$$

Для пороговой функции

$$f_1 = r_2^2 \big(\mathrm{bin}\,(1 - x_1 + x_2 + x_3)\big).$$

Поэтому, используя теорему 20.4, получим:

$$f = r_3^2 \big(\mathrm{bin}\,(1 + x_1 + x_2 + x_3)\big).$$

Пример 20.29. Реализовать функцию

$$f = x_1 ! x_2 ! x_3 x_4 \vee !x_1 x_2 x_3 x_4 \vee !x_1 ! x_2 ! x_4 \vee x_1 x_3 ! x_4 \vee x_2 ! x_3 ! x_4.$$

Из соотношения (20.30) при $i = 4$ следует, что

$$f = f_1 \oplus x_4 = (!x_1 ! x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 ! x_3) \oplus x_4.$$

Применяя соотношение (20.31) к функции f_1, получим:

$$f = f_2 \oplus !x_1 \oplus x_4 = \big((x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 x_2 \big) \oplus !x_1 \oplus x_4 .$$

Из примера *20.12* следует, что

$$f_2 = r_2^2 \big(\text{bin} \, (x_1 + x_2 + x_3) \big).$$

Поэтому, используя теорему 20.4, получим:

$$f_1 = r_3^2 \big(\text{bin} \, (2 - x_1 + x_2 + x_3) \big).$$

Повторно применяя теорему 20.4, окончательно получим:

$$f = r_3^2 \big(\text{bin} \, (2 - x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4) \big).$$

Найденное соотношение в отличие от других форм представления этой функции является бесповторным, что обеспечивает более простую программную реализацию.

Вид и сложность ЛАПМ, получаемого по ПЛФ, зависят от того, какое из этих соотношений применяется и какая переменная используется в качестве x_i.

Пример 20.30. Реализовать ПЛФ $f = !x_1 ! x_2 x_3 \vee x_1 x_2 ! x_3$.

Полагая в соотношении (20.30) $x_i = x_1$, получим:

$$f = f_1 \oplus x_1 = \big(!x_1 (!x_2 x_3) \vee x_1 !(x_2 ! x_3) \big) \oplus x_1 =$$
$$= \big((x_1 \vee x_3) ! x_2 \vee x_1 x_3 \big) \oplus x_1 .$$

При этом, так как

$$f_2 = (x_1 \vee x_3) x_2 \vee x_1 x_3 = r_2^2 \big(\text{bin} \, (x_1 + x_2 + x_3) \big),$$
$$f_1 = r_2^2 \big(\text{bin} \, (1 + x_1 - x_2 + x_3) \big).$$

Используя теперь теорему 20.4, находим:

$$f = r_3^2 \big(\text{bin} \, (1 + 3x_1 - x_2 + x_3) \big).$$

Применяя в качестве x_i переменные $!x_1$, x_2, $!x_2$, x_3, $!x_3$, получим соответственно следующие соотношения

$$f = r_3^2 \big(\text{bin} \, (4 - 3x_1 + x_2 - x_3) \big) = r_3^2 \big(\text{bin} \, (1 - x_1 + 3x_2 + x_3) \big) =$$
$$= r_3^2 \big(\text{bin} \, (4 + x_1 - 3x_2 - x_3) \big) = r_3^2 \big(\text{bin} \, (x_1 + x_2 + 3x_3) \big) =$$
$$= r_3^2 \big(\text{bin} \, (5 - x_1 - x_2 - 3x_3) \big).$$

Таким образом, простейшая реализация обеспечивается при $x_i = x_3$. Вопросы принадлежности функции классу ПЛФ и выбора переменной x_i в соотношениях (20.29), (20.30) остаются открытыми. Изложенный подход описан в [15, 22].

20.3.5. Реализация симметрических функций линейным арифметическим полиномом с маскированием

Рассмотрим класс ЛАП вида:

$$P = \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Эти ЛАП описывают работу комбинационных счетчиков, для построения которых требуется определить систему из 1 + [log *n*] булевых функций. Эти функции относятся к классу симметрических и реализуются следующим образом.

Запишем матрицу-столбец размерности $(n+1)\times 1$, все элементы которой принимают значения 0, 1, ... , *n*. Эта матрица преобразуется в двоичную матрицу размерности $(n + 1) \times (1+[\log n])$, *i*-я (*i* = 0, 1, … , *n*) строка которой является двоичным представлением *i*-го элемента матрицы-столбца. При этом *j*-й столбец двоичной матрицы является характеристическим числом *j*-й функции, единица в *i*-м разряде которого указывает на наличие рабочего числа в этой функции.

Пример 20.31. Определить симметрические функции (СФ), реализуемые линейным арифметическим полиномом

$$P = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 .$$

Выполняя указанные построения и преобразования, получим

$$P = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S_4^4 S_{2,3}^4 S_{1,3}^4 .$$

Рассмотрим более широкий класс ЛАП:

$$P_1 = c_1 + c_2 \sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad (20.32)$$

где c_1, c_2 — положительные целые числа.

Этот класс ЛАП реализует СФ так же, как рассмотрено выше.

Пример 20.32. Определить СФ, реализуемые ЛАП

$$P_1 = 3 + 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

Искомые функции определяются следующим образом:

$$P_1 = 3 + 5\begin{vmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3\\8\\13\\18\\23\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\\1&0&0&1&0\\1&0&1&1&1\end{vmatrix} =$$

$$= S^4_{3,4} S^4_{1,2} S^4_{2,4} S^4_{0,3,4} S^4_{0,2,4}.$$

Из изложенного следует, например, что

$$f = S^4_{2,4} = r^3_5[\operatorname{bin}\left(3 + 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\right)].$$

Такая реализация существенно более эффективна, чем непосредственное построение АП для СФ, так как, используя результаты разд. 20.1.2, можно получить, что $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = -3$, $b_4 = 7$, и поэтому

$$f = S^4_{2,4} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 -$$

$$- 3(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + 7x_1x_2x_3x_4.$$

Из изложенного следует, что выражение (20.32) может рассматриваться в качестве эффективного генератора симметрических функций. Исследование показало, что все СФ двух переменных порождаются пятью линейным АП при $c_1 = 0, \ldots, 4$, $c_2 = 1$, а все СФ трех переменных — одиннадцатью линейными АП, в которых $c_1 = 0, \ldots, 5$, $c_2 = 1$; $c_1 = 7$, $c_2 = 1$; $c_1 = 0$, $c_2 = 3$; $c_1 = 2$, $c_2 = 3$; $c_1 = 4$, $c_2 = 3$; $c_1 = 5$, $c_2 = 5$.

Рассмотренный метод является переборным и не гарантирует реализацию с помощью ЛАПМ произвольной СФ n переменных. Конструктивные методы реализации СФ, являющихся пороговыми, порогово-линейными и линейными, рассмотрены в предыдущих разделах. Например, с помощью ЛАПМ представимы следующие СФ:

$$S^3_{0,2,3} = (x_1x_3 \vee !x_2) \oplus x_1 \oplus x_3 = r^3_4\left(\operatorname{bin}(4 + 5x_1 - 2x_2 + 5x_3)\right);$$

$$S^3_1 = (!x_1 \vee !x_3)x_2 \oplus x_1 \oplus x_3 = r^3_4\left(\operatorname{bin}(3 + 3x_1 + 2x_2 + 3x_3)\right).$$

Вопрос о принадлежности произвольной СФ n переменных одному из перечисленных классов остается открытым. Изложенный подход описан в [22].

20.4. Реализация системы булевых функций линейными арифметическими полиномами с маскированиями

20.4.1. Реализация системы линейно представимых функций одним линейным полиномом с маскированиями

Булева функция, реализуемая одним ЛАПМ, называется линейно представимой. В предыдущих разделах показано, что пороговые, линейные и порогово-линейные функции линейно представимы.

Т е о р е м а 20.5. Произвольная система N линейно представимых функций n переменных также линейно представима полиномом, зависящим от n переменных, т. е. всегда может быть реализована одним линейным арифметическим полиномом n переменных с N маскированиями.

Эта теорема доказывается тем, что всегда можно построить один линейный арифметический полином, маскирование разрядов которого порождает N линейно представимых функций, если

$$\begin{gathered} P = 2^{g_1 + \dots + g_{N-1}} \cdot P^N_{g_N} + \ldots + \\ + 2^{g_1 + g_2} \cdot P^3_{g_3} + 2^{g_1} \cdot P^2_{g_2} + 2^0 \cdot P^1_{g_1}, \end{gathered} \tag{20.33}$$

где $P^i_{g_i}$ — ЛАПМ i-й булевой функции, двоичное представление результатов вычислений которой занимает g_i разрядов.

Этот результат чрезвычайно в а ж е н д л я т е о р и и п о р о г о в ы х ф у н к ц и й, так как, в частности, утверждает, что любая система из N указанных функций реализуется одним линейным полиномом с N маскированиями, что по эквивалентной сложности существенно проще, чем N пороговых элементов.

Отметим, что при использовании соотношения (20.33) двоичное представление результатов вычислений по ЛАПМ занимает

$$g = g_1 + g_2 + \ldots + g_N \tag{20.34}$$

разрядов.

При применении предлагаемого подхода полиномы, соответствующие заданным функциям, могут объединяться в порождающий полином в различном порядке. Это может привести к построению до $N!$ различных порождающих полиномов, которые, однако, по вводимому ниже критерию имеют одинаковую сложность.

Структуры этих полиномов отличаются друг от друга существенно меньше, чем структуры нелинейных АП, так как в первом случае они определяются $n + 1$ коэффициентами, а во втором — 2^n коэффициентами. В первом случае полином существенно зависит от всех n переменных, если он содержит по крайней мере n ненулевых коэффициентов при одиночных переменных, а во втором — он может существенно зависеть от всех n переменных даже при наличии только одного ненулевого коэффициента с номером $2^n - 1$.

Будем характеризовать каждый полином P, существенно зависящий от n переменных, величиной вычисляемого им максимального десятичного значения, обозначаемого символом $|P|$. При этом считается, что тот полином, существенно зависящий от n переменных, проще, у которого величина

$$g =]\log |P|[$$

меньше.

Пример 20.33. Проверить линейную представимость функций:

$$f_1 = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1 x_2,\ f_2 = !x_1 \vee !x_2 \vee !x_3,$$
$$f_3 = (!x_1 \vee !x_2)!x_3,$$

и реализовать эти функции одним ЛАПМ в случае положительных результатов проверки.

Так как каждая из заданных функций является пороговой и поэтому линейно представимой, то:

$$f_1 = r_2^2\left(\text{bin}\,(x_1 + x_2 + x_3)\right);\ f_2 = r_3^3\left(\text{bin}\,(6 - x_1 - x_2 - x_3)\right);$$
$$f_3 = r_3^3\left(\text{bin}\,(5 - x_1 - x_2 - 2x_3)\right).$$

Эти функции могут быть порождены полиномами, каждый из которых в результате вычислений формирует восьмиразрядное двоичное число

$$g = g_1 + g_2 + g_3 = 2 + 3 + 3 = 8.$$

Используя соотношение (20.33), получим:

$$P_1 = 2^6(x_1 + x_2 + x_3) + 2^3(6 - x_1 - x_2 - x_3) +$$
$$+ 2^0(5 - x_1 - x_2 - 2x_3) = 53 + 55x_1 + 55x_2 + 54x_3;$$
$$f_1 = r_8^8(\text{bin}\,P_1);\ f_2 = r_8^6(\text{bin}\,P_1);\ f_3 = r_8^3(\text{bin}\,P_1).$$

При этом $|P_1| = 217$.

Приведем программу на языке СИ, реализующую полученные соотношения:

```
  lapm (int 1, int x2, int x3, int P1, int f1,
  int f2, int f3)
 {P1 = 53 + 55*x1 + 55*x2 + 54*x3;
  f1 =  P1 >> 7;
  f2 = (P1 >> 5) & 1;
  f3 = (P1 >> 2) & 1}.
```

Проиллюстрируем найденное соотношение табл. 20.5.

Т а б л и ц а 20.5

x_1	x_2	x_3	P_1	$f_1=r_8^8$	r_8^7	$f_2=r_8^6$	r_8^5	r_8^4	$f_3=r_8^3$	r_8^2	r_8^1
0	0	0	53	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	107	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	108	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	162	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	108	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	162	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	163	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	201	1	1	0	1	1	0	0	1

Запишем формулы для БФУ, приведенных в таблице:

$$f_1=r_8^8=(x_1\vee x_2)x_3\vee x_1x_2,\ r_8^7=x_1\oplus x_2\oplus x_3,$$

$$f_2=r_8^6=!x_1\vee !x_2\vee !x_3,$$

$$r_8^5=!x_1!x_2!x_3\vee x_1x_2x_3=\big((x_1\vee !x_3)!x_2\vee x_1!x_3\big)\oplus x_1,$$

$$r_8^4=x_1\oplus x_2\oplus x_3,\ f_3=r_8^3=(!x_1\vee !x_2)!x_3,$$

$$r_8^2=x_1x_2\oplus x_3,\ r_8^1=x_1\oplus x_2.$$

При этом восьмая, шестая и третья функции являются пороговыми, пятая и вторая — порогово-линейными, а седьмая, четвертая и первая — линейными.

Аналогично рассмотренному могут быть построены ЛАПМ и для других кортежей функций f_1, f_2, f_3. При этом простейшим по введенному критерию будет полином $P_2=166-25x_1-25x_2-57x_3$, полученный для кортежа $f_3f_1f_2$. При использовании этого полинома $f_3=r_8^8(\text{bin }P_2)$, $f_1=r_8^5(\text{bin }P_2)$, $f_2=r_8^3(\text{bin }P_2)$. В этом случае $|P_2|=166$.

Пример 20.34. Реализовать систему линейно представимых функций:

$$f_1=x_1x_2x_3=r_3^3\big(\text{bin }(1+x_1+x_2+x_3)\big);$$
$$f_2=!x_1!x_2!x_3=r_3^3\big(\text{bin }(4-x_1-x_2-x_3)\big);$$
$$f_3=x_1\vee x_2\vee x_3=r_3^3\big(\text{bin }(3+x_1+x_2+x_3)\big);$$
$$f_4=!x_1\vee !x_2\vee !x_3=r_3^3\big(\text{bin }(6-x_1-x_2-x_3)\big),$$

приведенную в примере *1* Приложения в [30].

Так как все функции этой системы линейно представимы, то

$$P = 798 + 455(x_1 + x_2 + x_3),\ f_1 = r_{12}^{12}(\text{bin}\,P),$$

$$f_2 = r_{12}^{9}(\text{bin}\,P),\ f_3 = r_{12}^{6}(\text{bin}\,P),\ f_4 = r_{12}^{3}(\text{bin}\,P).$$

В [30] функции этой системы реализуются раздельно.

Пример 20.35. Реализовать систему линейно представимых функций

$$f_3 = x_1 ! x_2 x_3 ! x_4 = r_3^3\big(\text{bin}\,(2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\big);$$
$$f_2 = x_2 \vee x_3 x_4 = r_3^3\big(\text{bin}\,(2 + 2x_2 + x_3 + x_4)\big);$$
$$f_1 = x_1 \vee x_2 = r_2^2\big(\text{bin}\,(1 + x_1 + x_2)\big),$$

приведенную в примере *2* Приложения в [30].

Так как все функции системы линейно представимы, то, исходя из изложенного, $P = 73 + 33x_1 - 23x_2 + 36x_3 - 28x_4$, $f_3 = r_8^8(\text{bin}\,P)$, $f_2 = r_8^5(\text{bin}\,P)$, $f_1 = r_8^2(\text{bin}\,P)$. В [30] эта система реализуется существенно сложнее — двумя ЛАП с семью маскированиями.

Оптимизация полинома. Если полиномы при объединении «не портят» разрядов порождающего полинома, в которых формируются значения заданных функций, то последний может быть построен таким образом, что ему будет соответствовать число разрядов, меньшее, чем определяемое соотношениями (20.33), (20.34).

Пример 20.36. Реализовать простейшим ЛАПМ систему линейно представимых функций:

$$f_1 = x_1 x_2 \oplus x_3 = r_3^2\big(\text{bin}\,(x_1 + x_2 + 2x_3)\big);$$
$$f_2 = ! x_1 ! x_2 x_3 \vee x_1 x_2 ! x_3 = r_3^2\big(\text{bin}\,(1 + 3x_1 - x_2 + x_3)\big).$$

Используя соотношение (20.33), можно получить два ЛАПМ с $g = 6$:

$$P_1 = 2^3(x_1 + x_2 + 2x_3) + 2^0(1 + 3x_1 - x_2 + x_3) =$$
$$= 1 + 11x_1 + 7x_2 + 17x_3,$$
$$f_1 = r_6^5(\text{bin}\,P_1),\ f_2 = r_6^2(\text{bin}\,P_1),\ |P_1| = 36;$$

$$P_2 = 2^3(1 + 3x_1 - x_2 + x_3) + 2^0(x_1 + x_2 + 2x_3) =$$
$$= 8 + 25x_1 - 7x_2 + 10x_3,$$
$$f_2 = r_6^5(\text{bin}\,P_2),\ f_1 = r_6^2(\text{bin}\,P_2),\ |P_2| = 43.$$

Последнее соотношение иллюстрируется табл. 20.6.

Т а б л и ц а 20.6

x_1	x_2	x_3	P_2	$2^3(1+3x_1-x_2+x_3)$			$2^0(x_1+x_2+2x_3)$		
				r_6^6	$f_2=r_6^5$	r_6^4	r_6^3	$f_1=r_6^2$	r_6^1
0	0	0	8	0	0	1	0	0	0
0	0	1	18	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	11	0	0	1	0	1	1
1	0	0	33	1	0	0	0	0	1
1	0	1	43	1	0	1	0	1	1
1	1	0	26	0	1	1	0	1	0
1	1	1	36	1	0	0	1	0	0

Запишем формулы для БФУ, приведенных в табл. 20.6:

$$r_6^6 = x_1(!x_2 \vee x_3),$$

$$r_6^5 = f_2 = !x_1!x_2x_3 \vee x_1x_2!x_3 = \big((x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2\big) \oplus x_3,$$

$$r_6^4 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\ r_6^3 = x_1x_2x_3,$$

$$r_6^2 = f_1 = x_1x_2 \oplus x_3,\ r_6^1 = x_1 \oplus x_2.$$

При этом шестая и третья функции являются пороговыми, пятая и вторая — порогово-линейными, а четвертая и первая — линейными.

В силу того что арифметическое сложение значений «младшей» функции (r_6^4), порождаемой ЛАП для f_2, и «старшей» функции (r_6^3), порождаемой ЛАП для f_1, не образует переносов при всех входных наборах, полиномы для f_2 и f_1 могут быть объединены «плотнее», чем в соответствии с соотношением (20.33):

$$P_3 = 2^2(1+3x_1-x_2+x_3)+2^0(x_1+x_2+2x_3) =$$

$$= 4+13x_1-3x_2+6x_3,$$

$$f_2 = r_5^4(\operatorname{bin} P_3),\ f_1 = r_5^2(\operatorname{bin} P_3),\ |P_3| = 23.$$

Полученное соотношение иллюстрируется табл. 20.7.

Запишем формулы для БФУ, приведенных в табл. 20.7:

$$r_5^5 = x_1(!x_2 \vee x_3),\ r_5^4 = f_2 = \big((x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2\big) \oplus x_3,$$

$$r_5^3 = S^3_{0,2,3} = !x_1!x_2!x_3 \vee (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2 =$$

$$= (!x_1!x_2 \vee x_1x_2!x_3) \oplus x_3 = (x_1x_3 \vee !x_2) \oplus x_1 \oplus x_3,$$

$$r_5^2 = f_1 = x_1x_2 \oplus x_3,\ r_5^1 = x_1 \oplus x_2.$$

Таблица 20.7

x_1	x_2	x_3	P_3	r_5^5	$f_2=r_5^4$	r_5^3	$f_1=r_5^2$	r_5^1
0	0	0	4	0	0	1	0	0
0	0	1	10	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	7	0	0	1	1	1
1	0	0	17	1	0	0	0	1
1	0	1	23	1	0	1	1	1
1	1	0	14	0	1	1	1	0
1	1	1	20	1	0	1	0	0

При этом пятая функция является пороговой, четвертая, третья и вторая — порогово-линейными, а первая — линейной.

Пример 20.37. Реализовать простейшим ЛАПМ систему линейно представимых функций:

$$f_1=x_1!x_3 \vee x_2=r_3^3\big(\operatorname{bin}(3+x_1+2x_2-x_3)\big);$$
$$f_2=x_1!x_3 \oplus x_2=r_3^2\big(\operatorname{bin}(1+x_1+2x_2-x_3)\big).$$

В силу того что и в этом случае отсутствуют переносы при «наложении» полиномов, объединим их более «плотно», чем в соответствии с соотношением (20.33):

$$P=2^2(3+x_1+2x_2-x_3)+2^0(1+x_1+2x_2-x_3)=$$
$$=13+5x_1+10x_2-5x_3,$$
$$f_1=r_5^5(\operatorname{bin}P),\ f_2=r_5^2(\operatorname{bin}P).$$

Приведенные примеры, а также ряд других, рассмотренных автором, позволяют сформулировать следующие гипотезы [31].

Гипотеза 20.1. Линейный арифметический полином порождает только пороговые, порогово-линейные и линейные функции, причем крайняя левая функция в двоичном представлении результатов вычислений по этому полиному всегда пороговая, а крайняя правая — всегда линейная функция.

Гипотеза 20.2. При $n \geqslant 3$, $g \geqslant 3$ в двоичном представлении результатов вычислений по ЛАПМ, построенному с помощью методов, изложенных в разд. 20.3, для реализации одной БФУ, принадлежащей одному из рассмотренных классов, в средних разрядах размещаются только порогово-линейные функции.

Вторую гипотезу иллюстрируют полиномы для функций f_2 и f_3 из примера *20.33* и полиномы для функций f_1 и f_2 из примера *20.36*.

Еще один подход к оптимизации полиномов описан в [31].

Изложенный подход для рассматриваемых классов функций универсален, однако не всегда эффективен. Продемонстрируем это на примере.

Пример 20.38. Реализовать систему линейно представимых функций:

$$f_1 = x_1 \vee x_2 = r_2^2\left(\text{bin}\,(1 + x_1 + x_2)\right),$$

$$f_2 = x_1 \oplus x_2 = r_2^1\left(\text{bin}\,(x_1 + x_2)\right).$$

Используя предлагаемый метод, получим:

$$P = 2^2(1 + x_1 + x_2) + 2^0(x_1 + x_2) = 4 + 5x_1 + 5x_2,$$

$$f_1 = r_4^4(\text{bin}\,P),\ \ f_2 = r_4^1(\text{bin}\,P).$$

С другой стороны, анализируя, какой кортеж функций реализует первый из заданных полиномов, можно установить, что он порождает и вторую функцию, и поэтому объединять полиномы нет необходимости.

Учитывая изложенное, предложенный подход может быть усовершенствован. При этом необходимо:

— реализовать линейным арифметическим полиномом с маскированием (ЛАПМ) каждую из заданных функций;

— для каждого ЛАПМ определить, какие функции он реализует;

— определить, не реализуются ли какие-либо другие функции системы полиномом, реализующим одну из функций системы, и в случае, если это имеет место, исключить из состава системы «поглощаемые» функции;

— объединить в один поглощающие ЛАПМ и ЛАПМ, соответствующие функциям, которые не поглощены.

Пример 20.39. Реализовать систему линейно представимых функций:

$$f_1 = x_1 x_2 = r_2^2\left(\text{bin}\,(x_1 + x_2)\right),$$

$$f_2 = x_1 \vee x_2 = r_2^2\left(\text{bin}\,(1 + x_1 + x_2)\right),$$

$$f_3 = x_1 \oplus x_2 = r_2^1\left(\text{bin}\,(x_1 + x_2)\right).$$

Используя соотношение (20.33), получим:

$$P_1 = 2^4(x_1 + x_2) + 2^2(1 + x_1 + x_2) + 2^0(x_1 + x_2) = 4 + 21(x_1 + x_2),$$

$$f_1 = r_6^6(\text{bin}\,P_1),\ \ f_2 = r_6^4(\text{bin}\,P_1),\ \ f_3 = r_6^1(\text{bin}\,P_1).$$

Применяя усовершенствованный метод оптимизации, получим:

$$P_2 = 2^2(x_1 + x_2) + 2^0(1 + x_1 + x_2) = 1 + 5x_1 + 5x_2,$$
$$f_1 = r_4^4(\operatorname{bin} P_2),\ f_2 = r_4^2(\operatorname{bin} P_2),\ f_3 = r_4^3(\operatorname{bin} P_2).$$

При этом отметим, что, используя методы построения НАП, получим:

$$f_1 f_2 f_3 = \operatorname{bin}(3x_1 + 3x_2).$$

Пример 20.40. Реализовать систему линейно представимых функций:

$$f_1 = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1 x_2 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(x_1 + x_2 + x_3)\big);$$
$$f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = r_2^1\big(\operatorname{bin}(x_1 + x_2 + x_3)\big).$$

Из описания заданных функций следует, что

$$P = x_1 + x_2 + x_3,\ f_1 = r_2^2(\operatorname{bin} P),\ f_2 = r_2^1(\operatorname{bin} P).$$

Иногда вместо линейного АП с маскированиями целесообразно применить нелинейный АП, сложность которого, однако, априори не предсказуема. Так, например, кортеж $f_1 f_2 f_3$, где $f_1 = x_1(x_2 \vee x_3)$, $f_2 = x_1! x_3 \vee x_2$, $f_3 = x_1! x_3 \oplus x_2$, реализуется простым нелинейным арифметическим полиномом $P_1 = 3x_1 + 3x_2 + x_1 x_3$, в то время как простейший линейный АП с маскированиями, полученный «наложением» полиномов для функций f_2 и f_3, существенно более сложен:

$$P_2 = 45 + 69x_1 + 42x_2 + 27x_3,$$
$$f_1 = r_8^8(\operatorname{bin} P_2),\ f_2 = r_8^5(\operatorname{bin} P_2),\ f_3 = r_8^2(\operatorname{bin} P_2).$$

Несмотря на высказанные замечания, в целом можно утверждать, что в настоящем разделе для класса линейно представимых функций решена задача, поставленная в [5]: для заданной системы БФУ определить количество, вид и месторасположение дополнительных функций, упрощающих полином, реализующий эту систему.

Более того, для рассматриваемого класса функций решена и другая задача: каким образом для систем линейно представимых функций, если условие линейности не выполняется, без перебора определить количество, вид и месторасположение дополнительных функций, таких чтобы указанное условие выполнялось. При этом метод не требует введения этих функций при синтезе полинома в явном виде, а они могут быть определены в результате его анализа.

20.4.2. Реализация системы произвольных булевых функций системой линейных арифметических полиномов с маскированиями

Предлагаемый метод состоит в следующем.

В каждой функции системы, заданной формулой, выделяются пороговые, порогово-линейные и линейные фрагменты. Каждый новый фрагмент обозначается соответствующей буквой, и в исходной системе осуществляется замена выделенных фрагментов буквами. В результате формируется расширенная система булевых формул, состоящая из выделенных фрагментов и преобразованной исходной системы.

Все формулы новой системы БФ линейно представимы, и поэтому их группы могут быть реализованы соответствующими ЛАПМ, число которых не ограничено и зависит от способа выделения фрагментов.

Предлагаемый метод является универсальным, так как произвольная система БФУ всегда может быть заменена новой системой с требуемыми свойствами. Важная особенность предлагаемого подхода состоит в том, что сложность каждого из полиномов, зависящих от одних и тех же переменных (с точностью до величины коэффициентов) совпадает со сложностью объединяющего их полинома, и поэтому объединение, если оно возможно, всегда целесообразно.

Предлагаемый подход обеспечивает возможность параллельной, последовательной или смешанной реализации в зависимости от свойств заданной системы булевых формул.

Таким образом, метод, предложенный в [30], может рассматриваться как частный случай излагаемого ниже метода, во-первых, потому что фиксирует метод выделения фрагментов и ограничивает число ЛАПМ двумя, а во-вторых, так как позволяет выделять в качестве фрагментов формул, заданных в дизъюнктивных нормальных формах, лишь конъюнкции, являющиеся наряду с формируемыми дизъюнкциями только малой частью класса линейно представимых функций.

Перейдем к рассмотрению методов выделения фрагментов в системе булевых формул.

Рассмотрим вопрос о реализации системы произвольных функций двумя полиномами с маскированиями.

Теорема 20.6. Произвольная система булевых формул всегда может быть реализована не более чем двумя линейными арифметическими полиномами с маскированиями, первый из которых реализует все разнотипные линейно представимые фрагменты заданных формул, а второй — все дизъюнкции, формируемые в результате замены в исходной или преобразованной системе формул указанных фрагментов новыми буквами [31].

Нижняя оценка числа ЛАПМ (единица) относится к классу систем БФ, состоящих только из линейно представимых функций, а доказательство верхней оценки следует из результатов предыдущего раздела.

Метод, определяемый этой теоремой, строит либо меньшее число ЛАПМ по сравнению с методом, изложенным в [30], либо при одинаковом количестве ЛАПМ (два) строит более простые полиномы: первый из них имеет меньшие значения коэффициентов, а второй кроме меньших значений коэффициентов содержит еще и меньшее число переменных.

Пример 20.41. Реализовать формулу

$$f = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \vee (x_5 \vee x_6)(x_7 \vee x_8).$$

Так как формула не является линейно представимой, то она не может быть записана одним ЛАПМ. Для реализации функции в виде двух ЛАПМ преобразуем формулу за счет частичного раскрытия скобок. При этом

$$f_1 = (x_1 \vee x_2) x_3 = r_3^3\big(\operatorname{bin}(1 + x_1 + x_2 + 2x_3)\big);$$

$$f_2 = (x_1 \vee x_2) x_4 = r_3^3\big(\operatorname{bin}(1 + x_1 + x_2 + 2x_4)\big);$$

$$f_3 = (x_5 \vee x_6) x_7 = r_3^3\big(\operatorname{bin}(1 + x_5 + x_6 + 2x_7)\big);$$

$$f_4 = (x_5 \vee x_6) x_8 = r_3^3\big(\operatorname{bin}(1 + x_5 + x_6 + 2x_8)\big);$$

$$f = f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee f_4 = r_3^3\big(\operatorname{bin}(3 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4)\big).$$

Используя метод, изложенный в предыдущем разделе, реализуем ЛАПМ формулы первого яруса. В результате получим:

$$P = 585 + 576x_1 + 576x_2 + 1024x_3 + 128x_4 +$$
$$+9x_5 + 9x_6 + 16x_7 + 2x_8,$$
$$f_1 = r_{12}^{12}(\operatorname{bin} P),\ f_2 = r_{12}^{9}(\operatorname{bin} P),$$
$$f_3 = r_{12}^{6}(\operatorname{bin} P),\ f_4 = r_{12}^{3}(\operatorname{bin} P),$$
$$f = r_3^3\big(\operatorname{bin}(3 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4)\big).$$

Пример 20.42. Реализовать систему булевых формул

$$f_1 = x_1 x_2 \vee x_3 x_4,\ f_2 = x_1 x_2 \vee !x_3 !x_4.$$

Преобразуем заданную систему к требуемому виду:

$$f_3 = x_1 x_2 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(x_1 + x_2)\big),\ f_4 = x_3 x_4 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(x_3 + x_4)\big),$$

$$f_5 = !x_3 !x_4 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(2 - x_3 - x_4)\big),$$

$$f_1 = f_3 \vee f_4 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(1 + f_3 + f_4)\big),$$

$$f_2 = f_3 \vee f_5 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(1 + f_3 + f_5)\big).$$

Реализуем формулы f_3, f_4, f_5 одним полиномом, а формулы f_1 и f_2 — другим:

$$P_1 = 2 + 16x_1 + 16x_2 + 2x_3 + 2x_4,$$
$$f_3 = r_6^6(\text{bin}\, P_1),\ f_4 = r_6^4(\text{bin}\, P_1),\ f_5 = r_6^2(\text{bin}\, P_1);$$
$$P_2 = 5 + 5f_3 + 4f_4 + f_5,$$
$$f_1 = r_4^4(\text{bin}\, P_2),\ f_2 = r_4^2(\text{bin}\, P_2).$$

«Ярусная» реализация систем булевых функций. В ряде случаев бывает целесообразно реализовать заданную систему булевых формул более чем двумя линейными арифметическими полиномами с маскированиями. Для этого реализуем заданную систему булевых формул *M*-ярусной схемой из элементов, описываемых линейно представимыми функциями. Тогда эта схема может быть реализована *M* линейными полиномами с маскированиями, причем в один полином могут быть объединены все элементы, отнесенные к одному ярусу схемы.

Пример 20.43. Реализовать формулу, рассмотренную в примере *20.41*.

Эта формула реализуется трехъярусной схемой, для которой

$$f_1 = x_1 \vee x_2,\ f_2 = x_3 \vee x_4,\ f_3 = x_5 \vee x_6,\ f_4 = x_7 \vee x_8;$$
$$f_5 = f_1 \& f_2,\ f_6 = f_3 \& f_4;$$
$$f = f_5 \vee f_6.$$

Реализуем все формулы каждого яруса одним ЛАПМ. При этом

$$P_1 = 85 + 64x_1 + 64x_2 + 16x_3 + 16x_4 + 4x_5 + 4x_6 + x_7 + x_8,$$
$$f_1 = r_8^8(\text{bin}\, P_1),\ f_2 = r_8^6(\text{bin}\, P_1),$$
$$f_3 = r_8^4(\text{bin}\, P_1),\ f_4 = r_8^2(\text{bin}\, P_1);$$
$$P_2 = 4f_1 + 4f_2 + f_3 + f_4,$$
$$f_5 = r_4^4(\text{bin}\, P_2),\ f_6 = r_4^2(\text{bin}\, P_2);$$
$$f = r_2^2\big(\text{bin}\,(1 + f_5 + f_6)\big).$$

«Каскадная» реализация систем булевых функций. Во многих случаях бывает целесообразно применять не «ярусную», а «каскадную» реализацию.

К а с к а д о м будем называть фрагмент схемы (формулы), реализующий линейно представимую функцию. Частным случаем каскада является схема из двухвходовых элементов И и ИЛИ, соединенных последовательно, так как в [25] показано, что любой каскад из таких элементов реализует бесповторную пороговую формулу. Каскадом также является последовательная схема из элементов НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ. Таким образом, каждый каскад может быть реализован одним линейным арифметическим полиномом с маскированиями. Одним ЛАПМ могут быть также реализованы каскады, входящие в схемы для различных функций системы.

Пример 20.44. Реализовать формулу, рассмотренную в предыдущем примере.

Реализуем формулу четырехкаскадной схемой, каскады которой описываются следующим образом:

$$f_1 = x_7 \vee x_8 = r_2^2\big(\text{bin}\,(1 + x_7 + x_8)\big);$$
$$f_2 = (x_5 \vee x_6)\, f_1 = r_3^3\big(\text{bin}\,(1 + x_5 + x_6 + 2 f_1)\big);$$
$$f_3 = x_3 \vee x_4 = r_2^2\big(\text{bin}\,(1 + x_3 + x_4)\big);$$
$$f = (x_1 \vee x_2)\, f_3 \vee f_2 = r_4^4\big(\text{bin}\,(5 + x_1 + x_2 + 3 f_2 + 2 f_3)\big).$$

Сопоставляя результаты примеров *20.41*, *20.43*, *20.44*, можно утверждать, что с увеличением числа полиномов при реализации одной и той же задачи значения коэффициентов уменьшаются. Полиномы из последнего примера могут рассматриваться как декомпозиция полиномов, найденных в двух предыдущих примерах.

Пример 20.45. Реализовать формулу

$$f = (!x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 x_3)\, x_4 \oplus x_5 .$$

Фрагмент в скобках является порогово-линейным. После замены его буквой заданная формула также становится порогово-линейной:

$$f_1 = !x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 x_3 = x_1 (x_2 \vee x_3) \oplus x_2 =$$
$$= r_4^3\big(\text{bin}\,(1 + 2x_1 + 5x_2 + x_3)\big);$$

$$f = f_1 x_4 \oplus x_5 = r_3^2\big(\text{bin}\,(f_1 + x_4 + 2x_5)\big).$$

Пример 20.46. Реализовать систему БФ из примера 20.42.

Эта система формул после преобразования к требуемому виду:

$$f_3 = x_1 x_2,\ \ f_1 = f_2 \vee x_3 x_4,\ \ f_2 = f_3 \vee !x_3 !x_4,$$

может быть реализована тремя линейными арифметическими полиномами с тремя маскированиями:

$$f_3 = r_2^2\big(\text{bin}\,(x_1 + x_2)\big);$$
$$f_1 = r_3^3\big(\text{bin}\,(2 + 2 f_3 + x_3 + x_4)\big);$$
$$f_2 = r_3^3\big(\text{bin}\,(4 + 2 f_3 - x_3 - x_4)\big),$$

или при объединении каскадов, соответствующих разным формулам, — двумя ЛАП также с тремя маскированиями:

$$f_3 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(x_1 + x_2)\big),$$
$$P = 20 + 18 f_3 + 7x_3 + 7x_4,$$
$$f_1 = r_6^6(\operatorname{bin} P),\ \ f_2 = r_6^3(\operatorname{bin} P).$$

Последняя реализация существенно более эффективна, чем рассмотренная в примере *20.42*.

Пример 20.47. Реализовать систему булевых формул

$$f_1 = (!x_1 x_2 \vee x_1 ! x_2 x_3)x_4 \oplus x_5,\ \ f_2 = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)x_4.$$

Эта система формул после преобразования принимает вид:

$$f_3 = !x_1 x_2 \vee x_1 ! x_2 x_3 = (x_1 ! x_3 \vee x_2) \oplus x_1,$$
$$f_1 = f_3 x_4 \oplus x_5,$$
$$f_4 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\ \ f_2 = f_4 x_4,$$

и поэтому может быть реализована четырьмя линейными арифметическими полиномами с четырьмя маскированиями:

$$f_3 = r_4^3\big(\operatorname{bin}(1 + 2x_1 + 5x_2 + x_3)\big),$$
$$f_1 = r_3^2\big(\operatorname{bin}(f_3 + x_4 + 2x_3)\big),$$
$$f_4 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(x_1 + x_2 + x_3)\big),$$
$$f_2 = r_2^2\big(\operatorname{bin}(f_4 + x_4)\big),$$

или двумя ЛАП также с четырьмя маскированиями:

$$P_1 = 4 + 9x_1 + 21x_2 + 5x_3,\ \ f_3 = r_6^6(\operatorname{bin} P_1),\ \ f_4 = r_6^1(\operatorname{bin} P_1),$$
$$P_2 = 4f_3 + f_4 + 5x_4 + 8x_5,\ \ f_1 = r_5^4(\operatorname{bin} P_2),\ \ f_2 = r_5^2(\operatorname{bin} P_2).$$

«Ярусно-каскадная» реализация систем булевых функций. В ряде случаев бывает целесообразно использовать смешанную реализацию, при которой каскады одного яруса вычисляются параллельно.

Пример 20.48. Реализовать булеву формулу

$$f = (!x_1 x_2 \vee x_1 ! x_2 x_3)x_4 \oplus x_5.$$

Построим по этой формуле схему из двух пороговых (каскады первого яруса) и одного порогово-линейного (каскад второго уровня) «элементов»:

$$f_1 = !x_1 x_2,\ f_2 = x_1 ! x_2 x_3,\ f = (f_1 \vee f_2) x_4 \oplus x_5.$$

Каскады первого яруса реализуются параллельно следующим ЛАПМ:

$$P = 2^3(1 - x_1 + x_2) + 2^0(2 + x_1 - x_2 + x_3) =$$
$$= 10 - 7x_1 + 7x_2 + x_3,$$
$$f_1 = r_5^5(\mathrm{bin}\,P),\ f_2 = r_5^3(\mathrm{bin}\,P),$$

а каскад второго уровня — полиномом вида:

$$f = r_4^3\big(\mathrm{bin}\,(1 + f_1 + f_2 + 2x_4 + 4x_5)\big).$$

Таким образом, формула в этом случае реализуется двумя линейными арифметическими полиномами с тремя маскированиями, в то время как учет того факта, что фрагмент

$$!x_1 x_2 \vee x_1 ! x_2 x_3$$

является порогово-линейным, позволяет реализовать формулу существенно проще — двумя более простыми линейными арифметическими полиномами с двумя маскированиями (пример *20.45*).

20.4.3. Реализация системы произвольных булевых функций одним линейным полиномом с условными маскированиями и операторами присваивания

В предыдущих разделах было показано, что только системы из линейно представимых булевых формул могут быть реализованы одним линейным полиномом с маскированиями.

Покажем, что, расширяя базис используемых операций, можно обеспечить линейную представимость и для системы произвольных булевых формул.

Будем называть выражение $\mathrm{if}\big(r_m^k(\mathrm{bin}\,P)\big)$ у с л о в н ы м м а с к и р о в а н и е м.

При этом справедлива теорема.

Т е о р е м а 20.7. Произвольная система N булевых функций, каждая из которых зависит не более чем от n переменных, всегда может быть реализована либо о д н и м линейным арифметическим полиномом n переменных с N маскированиями, либо **одним** линейным арифметическим полиномом, N операторами $f_i = 0$, M_1 операторами $f_i = 1$ ($i = 1, \ldots, N$) и M_2 условными маскированиями, где M_1 — число линейно представимых фрагментов в системе; M_2 — число различных линейно представимых фрагментов в системе.

Доказательство первой части теоремы, справедливой для систем линейно представимых функций, следует из материала разд. 20.4.1, а второй — из материала, изложенного в разд. 20.4.2, и отличается от последнего заменой второго ЛАП с N маскированиями на N операторов $f_i = 0$, M_1 операторов $f_i = 1$ и M_2 условных маскирований.

При этом фрагмент реализации, состоящий из условных маскирований и операторов присваивания, предлагается строить с помощью метода независимых фрагментов (разд.16.3).

Пример 20.49. Реализовать СБФ, приведенную в примере *20.42*.

Обозначая $f_3 = x_1 x_2$, $f_4 = x_3 x_4$, $f_5 = !x_3 !x_4$ и используя метод независимых фрагментов, построим обобщенный оператор структуры:

$$F = !f_1 \,|\, !f_2 \,|\, f_3 f_1 \,|\, f_4 f_1 | f_3 f_2 \,|\, f_5 f_2,$$

который минимизируется следующим образом:

$$F = !f_1 \,|\, !f_2 \,|\, f_3 (f_1 \,|\, f_2) \,|\, f_4 f_1 \,|\, f_5 f_2.$$

Полученный оператор структуры однозначно задает структуру фрагмента с условными маскированиями. Используя этот оператор и результаты примера *20.42*, получим:

$$P = 2 + 16x_1 + 16x_2 + 2x_3 + 2x_4;$$
$$f_1 = 0;\ f_2 = 0;$$
$$\text{if}\left(r_6^6(\text{bin}\,P)\right)\ \{f_1 = 1;\ f_2 = 1;\}$$
$$\text{if}\left(r_6^4(\text{bin}\,P)\right)\quad f_1 = 1;$$
$$\text{if}\left(r_6^2(\text{bin}\,P)\right)\quad f_2 = 1.$$

Таким образом, заданную систему булевых формул вместо двух ЛАП и пяти маскирований удалось реализовать двумя операторами $f_i = 0$, одним ЛАП, тремя условными маскированиями и четырьмя операторами $f_i = 1$.

Из изложенного следует, что реализация системы булевых формул, определяемая этой теоремой, является весьма элегантной и достаточно стандартной, а в некотором смысле, и неулучшаемой, так как определяет **возможность реализации произвольной системы булевых формул как бы одним пороговым элементом с «добавкой»**. Для рассмотренного примера эта «добавка» состоит из маскирования, операции bin, одного оператора $f_i = 0$, трех операторов $f_i = 1$ и двух условных маскирований. Изложенный подход впервые описан в [31].

В заключение отметим, что первыми из известных автору работ по рассматриваемой в настоящей главе тематике являются работы [32, 33], а последней — [34].

Выводы

1. Рассмотрен аналитический метод построения арифметических полиномов (АП) для произвольных одиночных булевых формул (БФ).
2. Предложен метод построения арифметических полиномов для одиночных симметрических функций.
3. Предложен метод представления булевых формул арифметическими выражениями, использующими операции «sign» и «абсолютная величина».
4. Предложены прямое и обратное матричные преобразования между системами булевых функций и арифметическими полиномами, являющиеся разновидностью дискретных ортогональных преобразований.
5. Установлено условие линейности — условие представимости системы булевых функций линейным арифметическим полиномом (ЛАП).
6. Установлено условие представимости булевой функции линейным полиномом Жегалкина.
7. Предложены прямое и обратное преобразования между арифметическими выражениями с линейными показателями степени и арифметическими полиномами. Таким образом, установлена связь спектральных и арифметических представлений булевых функций и систем булевых функций.
8. Предложены алгоритмические структуры при $n = 2, ..., 5$, позволяющие реализовать произвольную систему булевых функций n переменных с помощью ЛАП. При этом, в частности, показано, что при $n = 5$ произвольная система булевых функций может быть реализована с помощью десяти ЛАП и пяти предикатов, которые по эквивалентной сложности проще, чем десять пороговых элементов. Это является принципиально новым результатом для теории пороговых функций.
9. Предложены методы реализации пороговых, линейных и пороговолинейных булевых функций линейными арифметическими полиномами с маскированием. Эти классы функций названы линейно представимыми.
10. Изложен метод реализации произвольной системы из N линейно представимых функций одним ЛАП с N маскированиями, что

существенно эффективнее, чем реализация таких систем схемами из пороговых элементов.

11. Высказана гипотеза, что линейный арифметический полином порождает только пороговые, порогово-линейные и линейные функции, причем крайняя левая функция в двоичном представлении результатов вычислений по этому полиному всегда пороговая, а крайняя правая — всегда линейная.

12. Предложен более эффективный, чем известный, метод реализации произвольной системы БФУ двумя ЛАП с маскированиями.

13. Предложен метод реализации произвольной системы БФУ одним ЛАП с условными маскированиями и операторами присваивания.

Литература

1. *Артюхов В. Л., Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4.

2. *Артюхов В. Л., Беляев Н. С., Шалыто А. А.* Методы программной реализации симметрических функций // Проблемы комплексной автоматизации судов. ВНТО им. акад. А. Н. Крылова. Вып. 19. Л.: Судостроение, 1989.

3. *Шалыто А. А.* SWITCH-технология. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. СПб.: Наука, 1998.

4. *Шалыто А. А.* Реализация алгоритмов судовых управляющих логических систем при использовании микропроцессорной техники. Л.: ИПК СП, 1988.

5. *Малюгин В. Д.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // Автоматика и телемеханика. 1982. № 4.

6. *Малюгин В. Д.* Применение алгебры кортежей логических функций // X Всесоюз. совещ. по проблемам управления: Тез. докл. Кн.1. М.: Ин-т проблем управления, 1986.

7. *Шмерко В. П., Кухарев Г. А.* Метод и алгоритмы оперативного решения систем булевых уравнений, заданных в полиномиальных формах // X Всесоюз. совещ. по проблемам управления: Тез. докл. Кн.1. М.: Ин-т проблем управления, 1986.

8. *Good I. J.* The relationship between two fast Fourier transforms // IEEE Trans. on Computers. 1971. N 3.

9. *Малюгин В. Д., Кухарев Г. А., Шмерко В. П.* Преобразования полиномиальных форм булевых функций: Препринт. М.: Ин-т проблем управления, 1986.

10. *Сингер М.* Мини-ЭВМ PDP-11. Программирование на языке ассемблера и организация машины. М.: Мир, 1984.

11. *Осипов В. А., Шалыто А. А., Кондратьев В. Н.* Программная реализация алгоритмов логического управления в судовых системах. Методические разработки. Л.: ИПК СП, 1988.

12. *Жегалкин И. И.* О технике вычисления предложений в символической логике // Математический сборник. Т. 34. 1927.

13. *Reed I. S.* A class of multiple-error-correcting codes at the decoding scheme // Trans. IRE. 1954. N 4.

14. *Авсаркисян Г. С., Брайловский Г. С.* Представление логических функций в виде полиномов Жегалкина // Автоматика и вычисл. техника. 1975. № 6.

15. *Шалыто А. А., Кондратьев В. Н.* Методы программной реализации алгоритмов логического управления для судовых микропроцессорных систем. Л.: ИПК СП, 1990.

16. *Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация систем булевых функций с использованием линейных арифметических полиномов // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3.

17. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1985.

18. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978.

19. *Артюхов В. Л., Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Использование линейных арифметических полиномов при реализации систем логического управления // XI Всесоюз. совещ. по проблемам управления: Тез. докл. М.: Наука, 1989.

20. *Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация алгоритма управления посадкой плавучей полупогружной буровой установки линейными арифметическими полиномами // VII Всесоюз. научно-техн. конф. «Проблемы комплексной автоматизации судовых технических средств»: Тез. докл. Л.: ВНТО им. акад. А. Н. Крылова, 1989.

21. *Прангишвили И. В., Вепхвадзе А. Н., Малюгин В. Д. и др.* Векторная вычислительная система ПС-320 // Микропроцессорные средства и системы. 1986. № 5.

22. *Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация булевых функций одним линейным арифметическим полиномом с маскированием // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1.

23. *Бутаков Е. А.* Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М.: Энергия, 1970.

24. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Пороговая и мажоритарная логика: Информ. листок. 1964. № 2 (29).

25. *Артюхов В. Л., Розенблюм Л. Я., Шалыто А. А.* Логические возможности некоторых типов каскадных структур // Сети связи и дискретные устройства управления. М.: Наука, 1976.

26. *Артюхов В. Л., Кузнецов Б. П., Шалыто А. А.* Настраиваемые логические устройства для судовых управляющих систем. Л.: ИПК СП, 1986.

27. *Akers S.B.* Binary decision diagrams // IEEE Trans. on Computers. 1978. N 6.

28. *Malyugin V.* Realization of logical function sets by arithmetic polynoms // Computers and artificial inteligence. 1987. N 6.

29. *Ефремов В. Д., Кузьмин А. А., Степанов В. А.* Вычисление логических функций с использованием преобразований Радемахера // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2.

30. *Малюгин В. Д.* Реализация кортежей булевых функций посредством линейных арифметических полиномов // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2.

31. *Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация систем булевых функций линейными арифметическими полиномами с маскированиями // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3.

32. *Синтез* электронных вычислительных и управляющих схем / Пер. с англ. под ред. В. И. Шестакова. М.: Иностр. лит., 1954.

33. *Тошич Ж.* Арифметические представления логических функций // Дискретные автоматы и сети связи. М.: Наука, 1970.

34. *Малюгин В. Д.* Параллельные логические вычисления посредством арифметических полиномов. М.: Наука, 1997.