

Глава 19

Нетрадиционные методы вычисления булевых функций

19.1. Метод логических шкал

Простейший метод вычисления произвольной булевой функции, заданной таблицей истинности, состоит в выборе ее значения по входному набору, по которому первоначально определяется его десятичный эквивалент, вычисляемый, например, при $n = 3$ таким образом:

$$x_t = 4x_1 + 2x_2 + x_3.$$

При этом функция «голосование два и более из трех» может быть вычислена следующей программой:

```
ti(int xt)
{int y;
 int yt[8] = {0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1};
 y = yt[xt];}
```

Аналогично может быть вычислена и произвольная система БФУ, заданная таблицей истинности. Например, одноразрядный сумматор реализуется следующей программой:

```
ti1(int xt)
{int y;
 int yt[8] = {0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3};
 y = yt[xt];}
```

Однако выбор значения БФУ, заданной таблицей истинности, может быть выполнен существенно иначе, если столбец значений

задать в виде десятичного числа. При этом значению БФУ на наборе xt присваивается вес 2^{xt} .

При таком подходе столбцу значений функции «голосование два и более из трех» соответствует число

$$232 = 2^7 \cdot 1 + 2^6 \cdot 1 + 2^5 \cdot 1 + 2^4 \cdot 0 + 2^3 \cdot 1 + 2^2 \cdot 0 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 0.$$

Тогда заданная БФУ может быть реализована следующей программой:

```
lsh(int xt)
{int y;
 y = (232 >> xt) & 1;}
```

Здесь \gg — операция сдвига двоичного представления числа 232 на xt разрядов вправо, а $\&1$ — операция маскирования, сохраняющая значение крайнего правого разряда.

Используя этот подход, могут быть записаны следующие соотношения:

$$\begin{aligned}x_1 x_2 x_3 &= (128 \gg xt) \& 1; \\!x_1 !x_2 !x_3 \vee x_1 x_2 x_3 &= (129 \gg xt) \& 1; \\x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 &= (150 \gg xt) \& 1; \\x_1 \vee x_2 \vee x_3 &= (255 \gg xt) \& 1.\end{aligned}$$

Рассмотренный подход может быть применен и для систем БФУ. При этом значениям пары функций, описывающих одноразрядный сумматор, соответствует число:

$$\begin{aligned}59\,796 &= 2^{15} \cdot 1 + 2^{14} \cdot 1 + 2^{13} \cdot 1 + 2^{12} \cdot 0 + 2^{11} \cdot 1 + 2^{10} \cdot 0 + 2^9 \cdot 0 + \\&+ 2^8 \cdot 1 + 2^7 \cdot 1 + 2^6 \cdot 0 + 2^5 \cdot 0 + 2^4 \cdot 1 + 2^3 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^1 \cdot 0 + 2^0 \cdot 0.\end{aligned}$$

Тогда заданная система БФУ может быть реализована следующей программой:

```
lsh1(int xt)
{int y, p, m = 59796L;
 p = xt << 1;
 y = (m >> p) & 3;}
```

В этой программе сдвиг вправо осуществляется на четное число разрядов и сохраняются два крайних правых разряда.

В. И. Варшавский сообщил автору, что изложенный подход называется методом логических шкал, но не указал, где этот метод был опубликован.

19.2. Реализация одной булевой функции с помощью линейных арифметических выражений

19.2.1. Реализация пороговых функций

Известно [1], что пороговые функции (ПФ) могут быть реализованы с использованием арифметических выражений, являющихся линейными арифметическими полиномами. При этом ПФ реализуется выражением вида:

$$f = \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n p_i x_i - T \right),$$

где

$$\text{sign } A = \begin{cases} 1 & \text{при } A \geq 0; \\ 0 & \text{при } A < 0. \end{cases}$$

Это позволяет реализовать, например, функцию «голосование два и более из трех» следующей программой:

```
prg(int x1, int x2, int x3)
{int y = 0;
  if(x1 + x2 + x3 - 2 >= 0) y = 1;}
```

Определение весов переменных p_i и порога функции T в общем случае является весьма трудоемкой задачей, однако при $n \leq 6$ для нахождения пороговых реализаций можно применять каталоги [2].

19.2.2. Реализация неповторных пороговых формул

Для положительно монотонных формул этого класса из h букв автором предложен простой метод построения пороговых реализаций, состоящий в следующем:

— для заданной неповторной булевой формулы (ББФ) в базисе И, ИЛИ строится древовидная схема максимальной глубины из $h - 1$ двухходовых элементов И и ИЛИ. Если в построенной схеме все элементы соединены последовательно, то рассматриваемая ББФ является пороговой;

— для пороговой ББФ строится линейный бинарный граф (ЛБГ), содержащий максимальное число путей;

— используя метод Акерса, в ЛБГ подсчитывается число путей;

— пометка входа i -й условной вершины ЛБГ равна весу переменной x_i , а пометка входа «нулевой» операторной вершины равна порогу функции.

Пример применения этого метода, описанного в [3], изложен в разд. 15.5.

Если в заданную ББФ переменная x_i входит с инверсией, то после нахождения пороговой реализации для положительно монотонной ББФ, однотипной с заданной, пороговая реализация корректируется на основе правила [1]:

$$\{p_1, \dots, -p_i, \dots, p_n, T - p_i\}.$$

19.2.3. Реализация произвольных булевых формул с помощью суперпозиции неповторных пороговых формул

Известны методы реализации произвольных БФУ с помощью суперпозиции пороговых функций [1]. Однако эти методы весьма трудоемки.

Автором в [4] предложен простой метод реализации формул в базисе И, ИЛИ, НЕ из h букв схемой из пороговых элементов, число которых определяется соотношением

$$1 \leq L \leq [h/2].$$

Метод состоит в построении для заданной БФ древовидной схемы из двухвходовых элементов И и ИЛИ, обладающей максимальной глубиной. В этой схеме выделяются каскады максимальной глубины, каждый из которых соответствует пороговому элементу.

На рис. 19.1 приведена схема, реализующая БФ

$$f = (x_1 x_2 \vee x_3 x_4)(x_5 \vee x_6),$$

на которой выделены три каскада (три пороговых элемента).

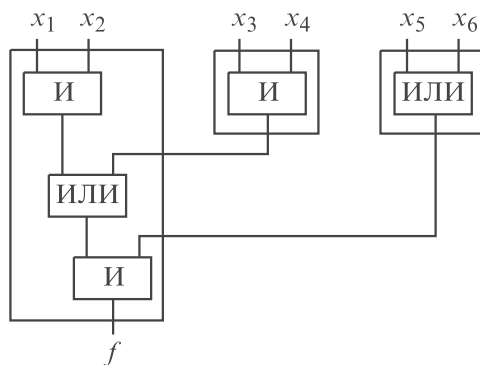


Рис. 19.1

**19.2.4. Реализация булевых формул
одним линейным арифметическим выражением,
использующим операции округления до ближайшего целого**

В [5] показано, что

$$x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n = \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right] = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]; \quad (19.1)$$

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = 1 - \left[\frac{n - x_1 - \dots - x_n}{n} \right]. \quad (19.2)$$

Применение этих соотношений и равенства $\bar{x} = 1 - x$ обеспечивает возможность реализации произвольной БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ с использованием следующих базовых операций: сложение, вычитание, деление, округление до ближайшего меньшего целого.

Покажем, что могут быть построены арифметические выражения, в которых применяется меньшее число базовых операций.

Так как

$$[1 - A] = 1 -]A[,$$

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n &= 1 - \left[1 - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right] = \\ &= 1 - 1 + \left[\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right] = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right]. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Из соотношений (19.1) и (19.3) следует, что конъюнкция (дизъюнкция) является средним арифметическим, округленным в меньшую (большую) сторону.

При наличии инверсий справедливы следующие соотношения:

$$x_1^{g_1} \& x_2^{g_2} \& \dots \& x_n^{g_n} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n g_i + \sum_{g_i=0}^n x_i^{g_i} - \sum_{g_i=1}^n x_i^{g_i}}{n} \right]; \quad (19.4)$$

$$x_1^{g_1} \vee x_2^{g_2} \vee \dots \vee x_n^{g_n} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n g_i + \sum_{g_i=0}^n x_i^{g_i} - \sum_{g_i=1}^n x_i^{g_i}}{n} \right], \quad (19.5)$$

где $g_i = 0$ для $!x_i$ и $g_i = 1$ для x_i .

Из приведенных соотношений следует, что

$$x_1 x_2 \vee x_3 x_4 = \left[\frac{\left[\frac{x_1 + x_2}{2} \right] + \left[\frac{x_3 + x_4}{2} \right]}{2} \right];$$

$$(x_1 \vee x_2) x_3 = \left[\frac{\left[\frac{x_1 + x_2}{2} \right] + x_3}{2} \right];$$

$$!x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 = \left[\frac{\left[\frac{1 - x_1 + x_2}{2} \right] + \left[\frac{1 + x_1 - x_2}{2} \right]}{2} \right].$$

Приведем еще одно выражение для дизъюнкции:

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + n - 1}{n} \right]. \quad (19.6)$$

При этом справедливо соотношение

$$x_1 x_2 \vee x_3 x_4 = \left[\frac{\left[\frac{x_1 + x_2}{2} \right] + \left[\frac{x_3 + x_4}{2} \right] + 1}{2} \right]. \quad (19.7)$$

Используя соотношения (19.1) и (19.6), введем два новых, позволяющих проводить деление не на произвольные целые числа, а всегда только на степени двух:

$$x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + 2^{\lfloor \log n \rfloor - 1}}{2^{\lfloor \log n \rfloor}} \right]; \quad (19.8)$$

$$x_1 \& x_2 \& \dots \& x_n = \left[\frac{x_1 + x_2 + \dots + 2^{\lfloor \log n \rfloor - n}}{2^{\lfloor \log n \rfloor}} \right]. \quad (19.9)$$

Исходя из изложенного, могут быть записаны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 \vee x_3 &= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right] \left[= \right] \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + 2}{3} \right] \left[= \right] \\ &= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + 3}{4} \right]; \\ x_1 \& x_2 \& x_3 &= \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right] = \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + 1}{3} \right]. \end{aligned}$$

При наличии инверсий сначала применяются соотношения (19.8) и (19.9), которые в дальнейшем могут быть изменены на основе соотношений (19.4) и (19.5):

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 \vee !x_3 &= \left[\frac{x_1 + x_2 - x_3 + 1}{3} \right] \left[= \right] \left[\frac{x_1 + x_2 - x_3 + 3}{3} \right] \left[= \right] \\ &= \left[\frac{x_1 + x_2 - x_3 + 4}{4} \right]. \\ x_1 \& x_2 \& !x_3 &= \left[\frac{x_1 + x_2 - x_3 + 1}{3} \right] = \left[\frac{x_1 + x_2 - x_3 + 2}{4} \right]. \end{aligned}$$

Деление на степени двух позволяет сократить число базовых операций до трех: сложение, вычитание, сдвиг вправо. Это объясняется тем, что деление на два в степени n двоичных чисел эквивалентно сдвигу (обозначается символом \gg) этого числа на n разрядов вправо. При этом округление в меньшую сторону происходит автоматически.

Исходя из изложенного, соотношение (19.7) может быть записано следующим образом:

$$x_1 x_2 \vee x_3 x_4 = (((x_1 + x_2) \gg 1) + ((x_3 + x_4) \gg 1) + 1) \gg 1.$$

19.3. Реализация логических функций интерполяционными полиномами

19.3.1. Реализация полностью определенных булевых функций

Пусть заданы $m + 1$ узловых точек $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ и $m + 1$ действительных чисел $f_i (i = 0, \dots, m)$, являющихся значениями функции $f(X)$ в этих узловых точках.

При этом задача интерполяции ставится следующим образом: найти многочлен $I_m(X)$ степени, не большей m , такой что $I_m(x_i) = f_i$ при $i = \{0, \dots, m\}$.

Предположим, что значения аргумента отстоят на единицу и принимают значение от нуля до m , тогда можно построить интерполяционный полином (ИП) Ньютона по нисходящим разностям [6], который имеет вид:

$$I_m(X) = \sum_{k=0}^m \binom{X}{k} p^k Y = \binom{X}{0} p^0 Y + \binom{X}{1} p^1 Y + \binom{X}{2} p^2 Y + \dots,$$

где $\binom{X}{0} = 1; \binom{X}{1} = \frac{X}{1!}; \binom{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2!}; \dots$

При реализации булевых функций $m = 2^n - 1$, а X и Y — десятичные эквиваленты входного и выходного наборов. Покажем на примерах, как определяются приращения $p^k Y$.

Пример 19.1. Определить ИП для булевой функции $f_1 = x_1 \oplus x_2$.

Построим интерполяционную таблицу (ИТ) для этого примера (табл. 19.1).

Т а б л и ц а 19.1

X	x_1	x_2	f_1	$Y = p^0 Y$	$p^1 Y$	$p^2 Y$	$p^3 Y$
0	0	0	0	0	1		
1	0	1	1	1	-1		
2	1	0	1	1	0	-1	0
3	1	1	0	0	-1		

Таким образом, в данном случае

$$f_1(X) = 1 \cdot 0 + \frac{X}{1!} \cdot 1 - \frac{X(X-1)}{2!} \cdot 1 + \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} \cdot 0 = \\ = \frac{X}{2}(3-X),$$

где $X = 2x_1 + x_2$.

Пример 19.2. Определить ИП для булевой функции $f_2 = x_1 \vee x_2$. Построим ИТ для этого примера (табл. 19.2).

Т а б л и ц а 19.2

X	x_1	x_2	f_2	$Y = p^0 Y$	$p^1 Y$	$p^2 Y$	$p^3 Y$
0	0	0	0	0			
				→	1		
1	0	1	1	1	→	-1	
				→	0	→	1
2	1	0	1	1	→	0	
				→	0		
3	1	1	1	1			

Таким образом, в данном случае

$$f_2(X) = 1 \cdot 0 + \frac{X}{1!} \cdot 1 - \frac{X(X-1)}{2!} \cdot 1 + \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} \cdot 1 = \\ = \frac{X}{6}(X^2 - 6X + 11).$$

Аналогично можно показать, что для формул: $f_3 = x_1 x_2$, $f_4 = \neg x_1 x_2$, $f_5 = x_1 \neg x_2$, $f_6 = \neg x_1 \neg x_2$, — соответствующие ИП имеют вид:

$$f_3(X) = \frac{X(X-1)(X-2)}{6},$$

$$f_4(X) = \frac{X(X-2)(X-3)}{2},$$

$$f_5(X) = -\frac{X(X-1)(X-3)}{2},$$

$$f_6(X) = -\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{6}.$$

На основе этих соотношений интерполяционный полином для булевой функции f_1 может быть получен иначе. Так как в совер-

шенной дизъюнктивной нормальной форме этой функции конъюнкции ортогональны, то можно записать выражение

$$f_1 = !x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 = !x_1 x_2 + x_1 !x_2.$$

Поэтому

$$f_1(X) = \frac{X(X-2)(X-3)}{2} - \frac{X(X-1)(X-3)}{2} = \frac{X}{2}(3-X).$$

Пример 19.3. Определить ИП для системы булевых функций $f_3 = x_1 x_2$, $f_5 = x_1 !x_2$, $f_7 = 0$, $f_8 = x_2$.

Построим интерполяционную таблицу для этой системы (табл. 19.3).

Т а б л и ц а 19.3

X	x_1	x_2	f_3	f_5	f_7	f_8	$Y = p^0 Y$	$p^1 Y$	$p^2 Y$	$p^3 Y$
0	0	0	0	0	0	0	0	1		
1	0	1	0	0	0	1	1	3	2	0
2	1	0	0	1	0	0	4	5	2	
3	1	1	1	0	0	1	9			

Из этой таблицы следует, что

$$Y(X) = 1 \cdot 0 + \frac{X}{1!} \cdot 1 + \frac{X(X-1)}{2!} \cdot 2 + \frac{X(X-1)(X-2)}{3!} \cdot 0 = X^2.$$

Покажем, что изменение порядка расположения функций в системе может изменить сложность ИП. Например, если вместо кортежа функций $f_3 f_5 f_7 f_8$ реализовать кортеж $f_8 f_7 f_5 f_3$, то, построив интерполяционную таблицу, получим следующее выражение:

$$Y(X) = \frac{X}{6}(27X^2 - 123X + 144).$$

Покажем также, что для упрощения ИП в заданную систему БФУ могут вводиться дополнительные функции и использоваться операция маскирования.

Выше было показано, что функция $f_5(X)$ непосредственно реализуется ИП третьей степени, в то время как из рассмотрения табл. 19.3 следует, что

$$f_5(X) = r_4^3(\text{bin}(X^2)),$$

где r_j^i — выделение i -го разряда в j разрядном двоичном числе; $\text{bin } a$ — операция преобразования десятичного числа « a » в его двоичный эквивалент.

Таким образом, изложенный подход характеризуется тем, что:

- ИП строится как функция от входного вектора X в целом, а не от отдельных его компонент;
- имеется возможность параллельного вычисления систем БФУ;
- в ряде случаев сложность ИП для системы БФУ ниже сложности ИП отдельных функций, входящих в эту систему;
- имеется возможность изменения сложности ИП за счет изменения порядка расположения функций в системе;
- имеется возможность изменения сложности ИП за счет введения в систему дополнительных функций и применения операции маскирования. ИП в этом случае могут быть названы интерполяционными полиномами с маскированием.

19.3.2. Реализация не полностью определенных булевых функций

Теорема 19.1. Если система БФУ определена на g ($g \leq 2^n$) наборах входных переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то ее всегда можно реализовать ИП с маскированием, содержащим не более g ненулевых коэффициентов $p^k Y$ (не более g членов в ИП).

Доказательство этой теоремы базируется на том факте, что каждое неопределенное значение системы БФУ можно выбрать таким, чтобы соответствующее приращение было равно нулю.

Пример 19.5. Построить ИП для БФУ $f(x_1, x_2) = |0 \ 1 \ z \ 1|^T$, где z — неопределенное значение функции.

Построим ИП для рассматриваемой БФУ (табл. 19.4).

Т а б л и ц а 19.4

X	x_1	x_2	f	$Y = p^0 Y$	$p^1 Y$	$p^2 Y$	$p^3 Y$
0	0	0	0	0	1		
1	0	1	1	1	$z - 1$	$z - 2$	$4 - 3z$
2	1	0	z	z	$2 - 2z$		
3	1	1	1	1	$1 - z$		

Таким образом,

$$p^0Y = 0, p^1Y = 1, p^2Y = z - 2, p^3Y = 4 - 3z.$$

При $z = 0$

$$p^0Y = 0, p^1Y = 1, p^2Y = -2, p^3Y = 4;$$

$$f = x_2, f(X) = \frac{X}{3}(2X^2 - 9X + 10).$$

При $z = 1$

$$p^0Y = 0, p^1Y = 1, p^2Y = -1, p^3Y = 1;$$

$$f = x_1 \vee x_2, f(X) = \frac{X}{6}(X^2 - 6X + 11).$$

При $z = 2$

$$p^0Y = 0, p^1Y = 1, p^2Y = 0, p^3Y = -2;$$

$$f(X) = -\frac{X}{3}(X^2 - 3X - 1), f = r_2^1(\text{bin } f(X)) = x_2.$$

19.3.3. Реализация многозначных логических функций

Пример 19.6. Построить ИП для троичной логической функции одной переменной, заданной табл. 19.5.

Т а б л и ц а 19.5

X	f	$Y = p^0Y$	p^1Y	p^2Y
0	2	2		
		→	-1	
1	1	1		
		→	1	2
2	2	2		

Из этой таблицы следует, что

$$f(X) = 1 \cdot 2 - X \cdot 1 + \frac{X(X-1)}{2} \cdot 2 = X^2 - 2X + 2.$$

Таким образом, рассмотренный подход для некоторых функций более эффективен как по трудоемкости, так и по сложности полино-

ма по сравнению с быстрым преобразованием Фурье [7]. Для данного примера это преобразование строит выражение вида:

$$f(X) = \text{mod}_3(X^2 + X + 2).$$

Для некоторых других функций предложенный подход бывает крайне неэффективным.

Пример 19.7. Построить ИП для троичной логической функции двух переменных, заданной табл. 19.6.

Т а б л и ц а 19.6

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
f	0	0	0	0	0	0	0	1	2

В этом случае $X = 3x_1 + x_0$, $p^0 Y = \dots = p^6 Y = 0$, $p^7 Y = 1$, $p^8 Y = -6$. Таким образом,

$$f(X) = \frac{\prod_{i=0}^6 (X-i)}{7!} \cdot 1 - \frac{\prod_{i=0}^7 (X-i)}{8!} \cdot 6 = (50 - 6X) \frac{\prod_{i=0}^6 (X-i)}{8!}.$$

Эта функция может быть вычислена «по интервалам» существенно проще:

```

if (X ≥ 7)
  {if (X = 8)  f = 2;
   else       f = 1;}
else f = 0.

```

Использовать ИП для вычисления булевых функций было предложено автором и В. Н. Вавиловым в [8].

19.4. Реализация булевых функций с помощью спектрального метода

Рассмотрим функцию Радемахера i -го порядка [9] при применении n входных булевых переменных:

$$R_n^i = (-1)^{x_i}, \quad R_n^0 = 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Преобразуем эти соотношения в табличную форму для $n = 1, 2, 3$ (табл. 19.7—19.9 соответственно). Две последние таблицы содержат также строки, соответствующие всем возможным произведениям функций Радемахера, отличных от R_n^0 .

Т а б л и ц а 19.7

x	0	1
R_1^0	1	1
R_1^1	1	-1

Т а б л и ц а 19.8

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
R_2^0	1	1	1	1
R_2^1	1	1	-1	-1
R_2^2	1	-1	1	-1
$R_2^1 R_2^2$	1	-1	-1	1

Т а б л и ц а 19.9

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
R_3^0	1	1	1	1	1	1	1	1
R_3^1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
R_3^2	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$R_3^1 R_3^2$	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
R_3^3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$R_3^1 R_3^3$	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
$R_3^2 R_3^3$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$R_3^1 R_3^2 R_3^3$	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Содержимое этих таблиц задает матрицы Уолша при $n = 1, 2, 3$.

В [10, 11] показано, что прямое преобразование (построение спектра S по многозначной функции Y , которая зависит от многозначной переменной X , принимающей значения от 0 до 2^n) определяется соотношением

$$|S| = \frac{1}{2^n} |W_n| |Y|,$$

где $|S|$, $|Y|$ — вектор-столбцы спектра и функции соответственно, а $|W_n|$ — матрица Уолша с размерностью $2^n \times 2^n$.

Используя это соотношение для двоичного одноразрядного сумматора, для которого $Y(X) = |0\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 3|^T$, можно получить следующий спектр:

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{8} |12, -2, -2, 0, -2, 0, 0, -6|^T.$$

Обратное преобразование (построение функции Y по спектру S) выполняется на основе соотношения [10, 11]

$$|\mathbf{Y}| = |\mathbf{W}_n| |\mathbf{S}|.$$

Обозначая i -ю строку матрицы Уолша символом W_n^i , называемым функцией Уолша, для двоичного одноразрядного сумматора получим:

$$Y = \frac{1}{8} (12W_3^0 - 2W_3^1 - 2W_3^2 - 2W_3^4 - 6W_3^7).$$

Заменяя каждую функцию Уолша ее представлением через функции Радемахера, получим:

$$Y = \frac{1}{4} (6 - R_3^1 - R_3^2 - R_3^3 - 3R_3^1 R_3^2 R_3^3).$$

Для получения расчетного соотношения заменим функции Радемахера их выражениями:

$$Y = \frac{1}{4} (6 - (-1)^{x_1} - (-1)^{x_2} - (-1)^{x_3} - 3(-1)^{x_1+x_2+x_3}).$$

Это выражение с линейными показателями степени может применяться при программной реализации указанного сумматора на основе спектрального метода.

Более изящный подход в рамках ортогональных преобразований может быть предложен, если вместо матриц Уолша использовать матрицы Адамара, являющиеся рекурсивными.

Рассмотрим матрицу Адамара [12]

$$|\mathbf{H}_n| = \begin{vmatrix} \mathbf{H}_{n-1} & \mathbf{H}_{n-1} \\ \mathbf{H}_{n-1} & -\mathbf{H}_{n-1} \end{vmatrix},$$

которая является n -й кронекеровской степенью матрицы

$$|\mathbf{H}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Построим матрицы Адамара для $n = 2, 3$ и выразим их через соответствующие функции Радемахера

$$|\mathbf{H}_2| = \begin{vmatrix} H_2^0 \\ H_2^1 \\ H_2^2 \\ H_2^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_2^0 \\ R_2^2 \\ R_2^1 \\ R_2^1 R_2^2 \end{vmatrix};$$

$$|\mathbf{H}_3| = \begin{vmatrix} H_3^0 \\ H_3^1 \\ H_3^2 \\ H_3^3 \\ H_3^4 \\ H_3^5 \\ H_3^6 \\ H_3^7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_3^0 \\ R_3^3 \\ R_3^2 \\ R_3^2 R_3^3 \\ R_3^1 \\ R_3^1 R_3^3 \\ R_3^1 R_3^2 \\ R_3^1 R_3^2 R_3^3 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим соотношение

$$|\mathbf{Y}| = |\mathbf{H}_n| |\mathbf{S}|. \quad (19.10)$$

Тогда

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{H}_n|^{-1} |\mathbf{Y}|.$$

Для матриц Адамара справедливо равенство

$$|\mathbf{H}_n|^{-1} = \frac{1}{2^n} |\mathbf{H}_n|.$$

Таким образом,

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{2^n} |\mathbf{H}_n| |\mathbf{Y}|. \quad (19.11)$$

При этом S называется спектром функции Y по ортогональному базису H , соотношение (19.11) — прямым преобразованием Уолша—Адамара, а соотношение (19.10) — обратным преобразованием.

Пример 19.9. Реализовать двоичный одноразрядный сумматор

$$Y(x_1, x_2, x_3) = |0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3|^T.$$

1. Используя соотношение (19.11), определим спектральные коэффициенты:

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{8} | \mathbf{H}_3 | | \mathbf{Y} | = \frac{1}{8} | 12, -4, -4, 0, -4, 0, 0, 0 |^T.$$

2. Применяя соотношение (19.10), определим выражение для функции Y через функции Адамара:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{8} (12H_3^0 - 4H_3^1 - 4H_3^2 - 4H_3^4) = \\ &= \frac{1}{2} (3H_3^0 - (H_3^1 + H_3^2 + H_3^3)). \end{aligned}$$

3. Заменяем функции Адамара на функции Радемахера:

$$Y = \frac{1}{2} (3R_3^0 - (R_3^3 + R_3^2 + R_3^1)).$$

4. Запишем функции Радемахера в явной форме:

$$Y = \frac{1}{2} (3 - ((-1)^{x_3} + (-1)^{x_2} + (-1)^{x_1})).$$

Обратим внимание, что это выражение существенно проще, чем при использовании матриц Уолша.

Пример 19.10. Реализовать функцию «голосование два и более из трех»

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = | 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 |^T.$$

1. Вычислим значения спектральных коэффициентов этой функции:

$$|\mathbf{S}_2| = \frac{1}{8} | 4, -2, -2, 0, -2, 0, 0, 2 |^T.$$

2. Запишем выражение для функции f_2 через функции Адамара:

$$f_2 = \frac{1}{8} (4H_3^0 - 2H_3^1 - 2H_3^2 - 2H_3^4 + 2H_3^7).$$

3. Запишем выражение для функции f_2 через функции Радемахера:

$$f_2 = \frac{1}{4} (2 - (R_3^3 + R_3^2 + R_3^1 - R_3^1 R_3^2 R_3^3)).$$

4. При этом расчетное соотношение для вычисления функции f_2 имеет вид:

$$f_2 = \frac{1}{4} [2 - ((-1)^{x_3} + (-1)^{x_2} + (-1)^{x_1} - (-1)^{x_1+x_2+x_3})].$$

Из сравнения результатов примеров 19.9 и 19.10 следует, что реализация двоичного одноразрядного сумматора, образованного двумя булевыми функциями («голосование два и более из трех» и «нечетность трех переменных»), проще, чем реализация первой из них.

Поэтому может быть предложен следующий метод реализации БФУ:

— к заданной БФУ добавляются дополнительные булевы функции;

— полученная система БФУ реализуется арифметическим выражением с помощью спектрального метода;

— применяется операция маскирования для получения значений построенной системы БФУ.

Используя такой подход, функция «голосование два и более из трех» может быть реализована следующим образом:

$$f_2 = r_2^2 \left\{ \text{bin} \left[\frac{1}{2} (3 - ((-1)^{x_3} + (-1)^{x_2} + (-1)^{x_1})) \right] \right\}.$$

Пример 19.11. Реализовать функцию «нечетность трех переменных»

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = |0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1|^T.$$

1. Вычислим значения спектральных коэффициентов этой функции:

$$|S_1| = \frac{1}{8} |4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1|^T.$$

2. Запишем выражение для функции f_1 через функции Адамара:

$$f_1 = \frac{1}{8} (4H_3^0 - 2H_3^7).$$

3. Запишем выражение для функции f_1 через функции Радемахера:

$$f_1 = \frac{1}{2} (1 - R_3^1 R_3^2 R_3^3).$$

4. При этом расчетное соотношение для вычисления функции f_1 имеет вид:

$$f_1 = \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{x_1 + x_2 + x_3} \right).$$

Пример 19.12. Построить арифметическое выражение для двоичного одноразрядного сумматора, применяя найденные в предыдущих примерах арифметические выражения для функций f_2 и f_1 .

Это выражение строится следующим образом:

$$Y = 2f_2 + f_1 = \frac{1}{2} \left[3 - ((-1)^{x_3} + (-1)^{x_2} + (-1)^{x_1}) \right].$$

Из последнего примера следует, что сложность арифметического выражения зависит от порядка расположения функций в кортеже функций.

Приведем спектры для неповторных формул в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из двух и трех букв:

$$\begin{aligned} f_3 = x_1 x_2 & \quad |S_3| = \frac{1}{4} |1, -1, -1, 1|^T; \\ f_4 = x_1 \vee x_2 & \quad |S_4| = \frac{1}{4} |3, -1, -1, -1|^T; \\ f_5 = x_1 x_2 x_3 & \quad |S_5| = \frac{1}{8} |1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1|^T; \\ f_6 = x_1 (x_2 \vee x_3) & \quad |S_6| = \frac{1}{8} |3, -1, -1, -1, -3, 1, 1, 1|^T; \\ f_7 = x_1 \vee x_2 x_3 & \quad |S_7| = \frac{1}{8} |5, -1, -1, 1, -3, -1, -1, 1|^T; \\ f_8 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 & \quad |S_8| = \frac{1}{8} |7, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1|^T. \end{aligned}$$

Из рассмотренных примеров следует, что простые (бесповторные) формулы в булевом базисе реализуются арифметическими выражениями весьма сложно, в то время как сложные (повторные) формулы могут быть реализованы сравнительно просто.

Рассмотренный класс арифметических выражений характеризуется тем, что входные переменные входят в них линейно. При программировании возведение в степень величины «-1» может быть заменено проверкой четности показателя степени, командой условного перехода и командами присвоения переменным значений «-1» и «1».

Изложенный подход, основанный на использовании матриц Адамара, был предложен в [8]. Другие методы построения арифметических выражений на основе ортогональных преобразований рассмотрены в [13, 14]. Этой тематике посвящены также работы [15—23].

Выводы

1. Рассмотрен метод вычисления булевых функций, называемый методом логических шкал.
2. Предложены методы построения пороговых реализаций для бесповторных пороговых формул.
3. Предложен метод представления булевых формул линейными арифметическими выражениями, использующими операции округления до ближайшего целого.
4. Предложен метод представления булевых функций интерполяционными полиномами.
5. Предложен метод построения арифметических выражений с линейными показателями степени на основе матриц Адамара.

Литература

1. Бутаков Е. А. Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М.: Энергия, 1970.
2. Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблум Л. Я. Пороговая и мажоритарная логика. Информ. листок. 1964. № 2 (29).
3. Кондратьев В. Н., Шалыто А. А. Реализация булевых функций одним линейным арифметическим полиномом с маскированием // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1.
4. Артюхов В. Л., Розенблум Л. Я., Шалыто А. А. Логические возможности некоторых типов каскадных структур // Сети связи и дискретные устройства управления. М.: Наука, 1976.
5. Задорожный В. И. Реализация логических функций арифметическими выражениями // Автоматизация анализа и синтеза структур ЭВМ и вычислительных алгоритмов. Новосибирск: НИСИ, 1978.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986.
7. Лабунец В. Г., Ситников О. П. Использование быстрого многомерного преобразования Фурье для полиномиального представления функций многозначной логики // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1978. № 5.
8. Шалыто А. А. Реализация алгоритмов судовых управляющих логических систем при использовании микропроцессорной техники. Л.: ИПК СП, 1988.
9. Ефремов В. Д., Кузьмин А. А., Степанов В. А. Вычисление логических функций с использованием преобразования Радемахера // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2.
10. Карповский М. Г., Москалев Э. С. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. Л.: Энергия, 1973.
11. Karpovsky M. G. Finite orthogonal series in the design of digital devices. New York: John Willey & Sons, 1976.
12. Трахман А. М., Трахман В. А. Основы дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.
13. Артюхов В. Л., Кондратьев В. Н., Шалыто А. А. Реализация булевых функций арифметическими полиномами // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4.
14. Шмерко В. П. Синтез арифметических форм булевых функций посредством преобразования Фурье // Автоматика и телемеханика. 1989. № 5.
15. Muller D. E. Application of boolean algebra to switching circuits design and to error detection // IRE Trans. Electron. Comp. 1954. Vol. EC-3.

16. *Hurst S. L.* Logical processing of digital signals. London; Basel: Crane Russak and Edward Arnold, 1978.
17. *Hurst S. L., Miller D. M., Muzio J. C.* Spectral techniques in digital logic. Bristol: Academic Press, 1985.
18. *Muzio J. C., Wesselkamper T. C.* Multiple-valued switching theory. Bristol: Adam Hilger, 1986.
19. *Sasao T.* Logic design and optimization. MA: Kluwer Academic Publisher, 1993.
20. *Recent developments in abstract harmonic analysis with applications in signal processing* / Eds R. S. Stankovic, M. R. Stojic, M. S. Stankovic. Belgrad: Nauka, 1995.
21. *Sasao T.* Logic design: switching circuit theory. Kindai: Kadaku, 1995.
22. *Representation of discrete functions* / Eds T. Sasao, M. Fujita. MA: Kluwer Academic Publisher, 1996.
23. *Stankovic R. S.* Spectral transform decision diagrams. Belgrad: Nauka, 1998.