Глава 10

Модули, универсальные в классе самодвойственных функций и в «близких» к ним классах

10.1. Обзор литературы

Одной из важнейших задач в теории булевых функций (БФУ) является их систематизация и классификация.

При систематизации БФУ определяются свойства, которые позволяют объединять функции в классы. При этом наиболее известными являются следующие классы БФУ: произвольные [1], линейные [1], монотонные [1], самодвойственные [1], симметрические [2], пороговые [3, 4], особенные [5], бесповторные [6].

При классификации БФУ перечисляются типы функций, образующих класс. При этом к одному типу относят функции, инвариантные относительно выбранных преобразований. Наиболее известными (разд. 1.1) являются:

— *P*-классификация (инвариантность относительно перестановок входных переменных);

— *N*-классификация (инвариантность относительно инверсий входных переменных);

— *PN*-классификация (инвариантность относительно перестановок и инверсий входных переменных) [7];

— *NPN*-классификация (инвариантность относительно перестановок и инверсий входных переменных, а также инверсий функций) [8].

Для сокращения числа типов произвольных БФУ в [9] было предложено использовать линейные и аффинные преобразования.

Для пороговых функций была предложена *SD*-классификация (от английского словосочетания «self-dual» — самодвойственная) [8]. Преобразования, применяемые в этой классификации, подробно рассмотрены в [10]. Эта классификация была использована также и для произвольных БФУ. При применении этой классификации определяются типы самодвойственных функций $n + 1$ переменных, которые порождают заданные функции n переменных.

В [11, 12] были предложены модули, которые путем настройки реализуют всех представителей самодвойственных функций четырех переменных, в свою очередь порождающих всех представителей *PN*-типов функций трех переменных.

Наиболее «крупной» для БФУ n переменных ($n \geqslant 4$) является самодвойственная классификация [13], которая в отличие от *SD*-классификации является групповой [14, 15]. При применении этой классификации определяют типы функций n переменных, при подстановке в которые самодвойственных функций удается порождать произвольные функции того же числа переменных. При этом возможны две разновидности такой классификации: без учета инвертирования функций и с учетом их инвертирования [16].

На основе этой классификации были построены модули, универсальные в классе всех БФУ четырех [17, 18] и n переменных [19—21].

Из изложенного следует, что при использовании как *SD*-, так и самодвойственной классификации весьма актуальной является разработка модулей, универсальных в классе самодвойственных функций n переменных.

Интерес представляют также модули, универсальные в классе самоантидвойственных функций, и модули, которые путем настройки реализуют одновременно две функции — произвольную БФУ и ее антидвойственную, что может рассматриваться так же как вычисление произвольной БФУ одновременно на двух противоположных наборах [22].

Указанные выше модули описываются в настоящей главе. В ней приведены также модули, которые путем настройки одновременно реализуют БФУ и ее двойственную. Показано, что модули, универсальные в указанных классах, имеют меньшее число входов по сравнению с соответствующими модулями, универсальными в классе произвольных функций. Это объясняется тем, что для функций указанных классов удается определить такие их свойства, которые позволяют кодировать эти функции более просто (иметь более «короткие» коды настройки для соответствующих модулей), чем произвольные функции [23].

10.2. Реализация булевых функций мультиплексорами

В случае, когда в качестве алфавита настройки применяются константы 0 и 1, простейшим модулем, универсальным в классе произвольных функций, является мультиплексор (MX) с n информационными и 2^n настроечными входами (рис. 10.1), называемый мультиплексором «2^n в 1» [24].

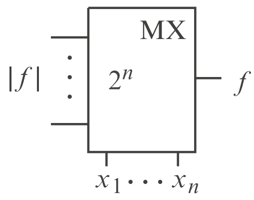

Рис. 10.1

При подаче на информационные входы модуля входных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в порядке, совпадающем с их порядком в левой части ТИ реализуемой функции *f*, его настройка осуществляется «подачей» столбца значений ТИ, обозначаемого символом $|f|$, на настроечные входы модуля.

Из изложенного следует, что число входов мультиплексора в этом случае определяется соотношением

$$M_1(n) = 2^n + n.$$

10.3. Реализация булевых функций, инверсных заданным

Функция $f^{\text{и}}$ называется инверсной функции *f*, если

$$f^{\text{и}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = !f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Несмотря на то что мультиплексор «2^n в 1» может реализовать как функцию *f*, так и функцию $f^{\text{и}}$, будем использовать схему (рис. 10.2), которая реализует функцию $f^{\text{и}}$ по столбцу значений $|f|$.

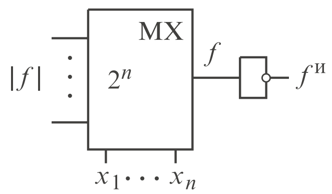

Рис. 10.2

10.4. Реализация булевых функций с инвертированным столбцом значений или его верхней, или нижней половиной

Известно [25], что

$$f = f \oplus 0; \quad f = f^{\text{и}} \oplus 1.$$

При этом схема на рис. 10.3 при подаче на вход *z* констант 0 и 1 позволяет по ТИ заданной функции *f* реализовать как функцию, так и ее инверсию.

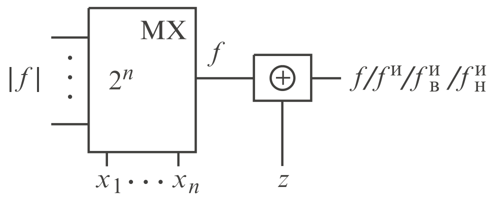

Рис. 10.3

В [26] были предложены два преобразования БФУ (разд. 1.7):

$$f = \big(!x_i!f(x_i=0) \vee x_i f(x_i=1)\big) \oplus !x_i;$$
$$f = \big(!x_i f(x_i=0) \vee x_i!f(x_i=1)\big) \oplus x_i.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} f^{\text{и}}_{\text{в}} &= !x_1!f(x_1=0) \vee x_1 f(x_1=1) = f \oplus !x_1; \\ f^{\text{и}}_{\text{н}} &= !x_1 f(x_1=0) \vee x_1!f(x_1=1) = f \oplus x_1. \end{aligned} \qquad (10.1)$$

Таким образом, схема на рис. 10.3 при подаче на вход z констант 0 и 1, переменной x_1 и ее инверсии $!x_1$ позволяет по столбцу значений $|f|$ реализовать заданную функцию f, ее инверсию $f^{\text{и}}$, а также функции $f^{\text{и}}_{\text{в}}$ и $f^{\text{и}}_{\text{н}}$ [27].

Из приведенных соотношений или разложений Рида следует, что если

$$f(x_i=1) = !f(x_i=0), \text{ то } f = f(x_i=1) \oplus !x_i;$$
$$f(x_i=0) = !f(x_i=1), \text{ то } f = f(x_i=0) \oplus x_i.$$

Эти функции могут быть реализованы схемой на рис.10.3, в которой MX «2^n в 1» заменен на MX «2^{n-1} в 1». Для таких функций выполняется соотношение

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = f^{\text{и}}(1, x_2, \ldots, x_n).$$

10.5. Реализация булевых функций, антидвойственных заданным

Функция $f^{\text{ад}}$ называется антидвойственной [13] функции f, если

$$f^{\text{ад}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(!x_1, !x_2, \ldots, !x_n).$$

Несмотря на то что мультиплексор «2^n в 1» может реализовать как функцию f, так и функцию $f^{\text{ад}}$, в данном случае будем применять схему (рис. 10.4), которая реализует функцию $f^{\text{ад}}$ по столбцу значений $|f|$.

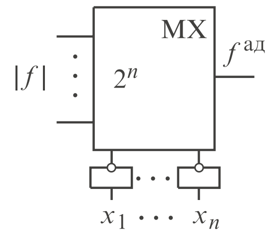

Рис. 10.4

10.6. Реализация булевых функций и им антидвойственных

Схема на рис. 10.5 при $z = 0$ реализует произвольную заданную функцию f, а при $z = 1$ — функцию $f^{\text{ад}}$.

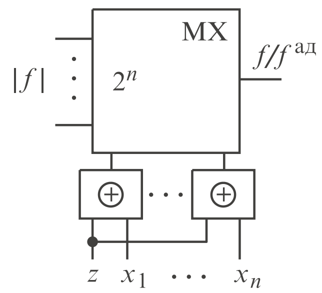

Рис. 10.5

10.7. Реализация самоантидвойственных (зеркальных) функций

Функция f называется с а м о а н т и д в о й с т в е н н о й [13], если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(!x_1, !x_2, \ldots, !x_n).$$

Из этого соотношения следует, что функции этого класса имеют одинаковые значения на противоположных входных наборах. Будем обозначать такие функции символом $f^{\text{сад}}$. Функции этого класса могут быть названы также з е р к а л ь н ы м и, так как в каждой из них верхняя и нижняя половины столбца «зеркальны» друг другу.

Для функций этого класса справедливо соотношение

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = f^{\text{ад}}(1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (10.2)$$

Так как самоантидвойственные функции обладают специфическим свойством (соотношение 10.2), то появляется возможность реализации функций этого класса схемой, настраиваемой константами и содержащей мультиплексор меньшей размерности, чем он требуется для реализации произвольных функций того же числа переменных.

Для нахождения такой реализации рассмотрим первоначально в качестве примера схему, представленную на рис. 10.6.

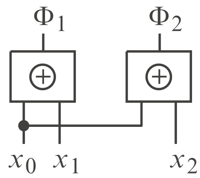

Рис. 10.6

Функционирование этой схемы описывает ТИ (табл. 10.1).

Таблица 10.1

x_0	x_1	x_2	Φ_1	Φ_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Из рассмотрения этой таблицы следует, что, во-первых, значения функций Φ_1 и Φ_2 располагаются в верхней половине ТИ в лексикографическом порядке, а, во-вторых, верхняя и нижняя половины каждой из этих функций «зеркальны» друг другу.

Такими же свойствами обладают ТИ для функций

$$\Phi_1 = x_0 \oplus x_1, \ldots, \Phi_n = x_0 \oplus x_n.$$

Из изложенного следует, что схема на рис. 10.7 реализует заданную функцию $f^{\text{сад}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ при подаче на ее настроечные входы верхней половины столбца значений заданной функции $|f_{\text{в}}^{\text{сад}}|$.

Пример 10.1. Реализовать с помощью схемы на рис. 10.7 зеркальную функцию $f = !x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2$, для которой $|f_{\text{в}}^{\text{сад}}| = |0001|^T$.

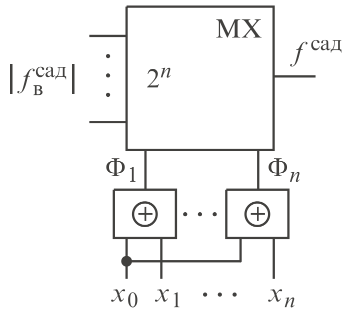

Рис. 10.7

Искомая схема приведена на рис. 10.8. Так как из рассмотрения этой схемы следует, что $f = \Phi_1\Phi_2$, то полученная схема может быть упрощена (рис. 10.9).

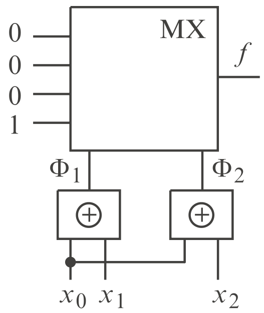

Рис. 10.8

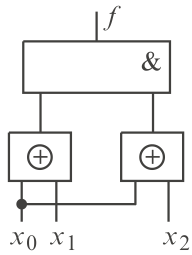

Рис. 10.9

Таким образом, в данном случае справедливо соотношение

$$!x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2 = (x_0 \oplus x_1)(x_0 \oplus x_2).$$

Аналогично можно показать, что если в схеме на рис. 10.7 заменить переменную x_0 на ее инверсию $!x_0$, то новая схема (рис. 10.10) реализует заданную функцию $f^{\text{сад}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ при подаче на ее настроечные входы нижней половины столбца значений заданной функции $|f_{\text{н}}^{\text{сад}}|$.

Пример 10.2. Реализовать с помощью схемы на рис. 10.10 зеркальную функцию $f = !x_0 !x_1 !x_2 \vee x_0 x_1 x_2$, для которой $|f_{\text{н}}^{\text{сад}}| = |0001|^T$.

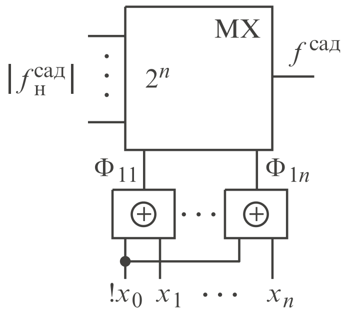

Рис. 10.10

Выполняя построение и преобразование, аналогичные приведенным в предыдущем примере, получим искомую схему (рис. 10.11),

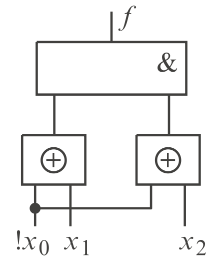

Рис. 10.11

для которой

$$!x_0!x_1!x_2 \vee x_0x_1x_2 = (!x_0 \oplus x_1)(!x_0 \oplus x_2).$$

Из изложенного следует, что при настройке константами модуль, универсальный в классе зеркальных функций n переменных, имеет число входов, определяемое соотношением

$$M_2(n) = 2^{n-1} + n.$$

Предложенный подход можно рассматривать и несколько с другой стороны: он позволяет по заданной БФУ n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ строить зеркальную функцию $n+1$ переменных $f^{\text{сад}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, в которой половина столбца значений совпадает со столбцом значений заданной функции.

В заключение раздела отметим, что из изложенного выше следует, что схема на рис. 10.5 реализует:

при $z = 0$ заданную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$;
при $z = 1$ функцию $f^{\text{ад}}(x_1, \ldots, x_n)$;

при $z = x_0$ функцию $f^{\text{сад}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, верхняя половина столбца значений которой совпадает со столбцом значений заданной функции f;

при $z = !x_0$ функцию $f^{\text{сад}}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, нижняя половина столбца значений которой совпадает со столбцом значений заданной функции *f*.

10.8. Реализация булевых функций, двойственных заданным

Функция $f^{\text{д}}$ называется д в о й с т в е н н о й [4] функции *f*, если

$$f^{\text{д}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = !f(!x_1, !x_2, \ldots, !x_n).$$

Несмотря на то что мультиплексор «2^n в 1» при настройке константами может реализовать как функцию *f*, так и функцию $f^{\text{д}}$ (если предварительно построить ее ТИ), в данном случае будем применять схему на рис. 10.12, построенную на основе схем на рис. 10.2, 10.4 и реализующую функцию $f^{\text{д}}$ по столбцу значений $|f|$.

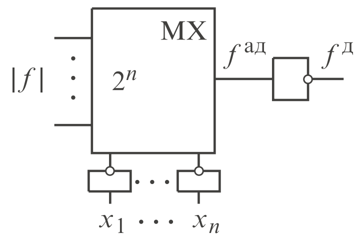

Рис. 10.12

10.9. Реализация булевых функций и им двойственных

Схема на рис. 10.13 при $z = 0$ реализует заданную функцию *f*, а при $z = 1$ — функцию $f^{\text{д}}$.

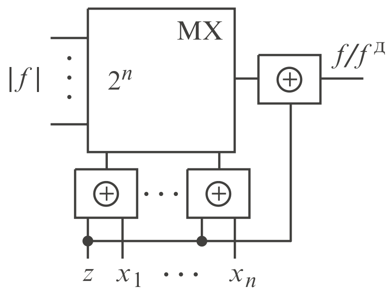

Рис. 10.13

10.10. Реализация самодвойственных функций

Функция f называется с а м о д в о й с т в е н н о й [13], если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = !f(!x_1, !x_2, \ldots, !x_n).$$

Из этого соотношения следует, что функции этого класса принимают противоположные значения на противоположных входных наборах. Будем обозначать такие функции символом $f^{\text{сд}}$. Из приведенного соотношения следует, что для функций этого класса

$$!f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(!x_1, !x_2, \ldots, !x_n).$$

Самодвойственными являются, например, такие функции, как

$$f_1 = x_0(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2; \; f_2 = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2;$$
$$f_3 = x_0(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3.$$

Для функций этого класса ранг (число единиц в столбце значений) $R = 2^{n-1}$, а индекс (число пар противоположных входных наборов, на которых функция принимает единичные значения) $I = 0$.

Для самодвойственных функций справедливо равенство [8]

$$f(0, x_2, \ldots, x_n) = f^{\text{д}}(1, x_2, \ldots, x_n). \tag{10.3}$$

Сопоставим соотношение (10.3) для самодвойственных функций с соотношением (10.2) для самоантидвойственных функций. Из этих соотношений следует, что если в каждом из этих классов выбрать по одной функции, у которых верхние половины столбцов значений $f(0, x_2, \ldots, x_n)$ совпадают, то их нижние половины будут инверсными.

Для инвертирования нижней половины столбца значений воспользуемся вторым равенством в (10.1).

Исходя из изложенного следует справедливость соотношений для функций рассматриваемых классов, у которых верхние половины столбцов значений совпадают:

$$f^{\text{сд}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{\text{сад}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus x_1; \tag{10.4}$$

$$f^{\text{сад}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{\text{сд}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus x_1. \tag{10.5}$$

Пример 10.3. Пусть заданы самодвойственная функция $f_0 = x_0(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2$ и самоантидвойственная функция $f = !x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2$. Определить взаимосвязь этих функций.

На основании соотношений (10.4) и (10.5) справедливы следующие равенства:

$$x_0(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2 = (!x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2) \oplus x_0;$$
$$!x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2 = \left(x_0(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2 \right) \oplus x_0.$$

Несмотря на то, что каждая из функций $f^{\text{сд}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $f^{\text{сад}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть реализована на мультиплексоре «2^n в 1», приведем схемы (рис. 10.14, 10.15), реализующие соотношения (10.4) и (10.5).

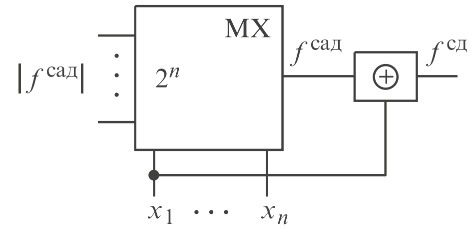

Рис. 10.14

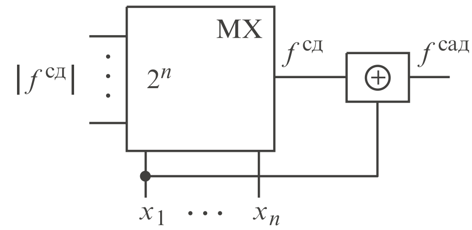

Рис. 10.15

Так как самодвойственные функции обладают специфическим свойством (соотношение 10.3), то появляется возможность реализации функций этого класса схемой, настраиваемой константами и содержащей мультиплексор меньшей размерности, чем он требуется для реализации произвольных функций того же числа переменных. Для этого запишем соотношение (10.4) для самодвойственных функций $n + 1$ переменных:

$$f^{\text{сд}}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{\text{сад}}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \oplus x_0. \quad (10.6)$$

Учитывая тот факт, что для каждой самоантидвойственной функции может быть найдена самодвойственная функция, для которых справедливо равенство

$$|f_{\text{в}}^{\text{сад}}| = |f_{\text{н}}^{\text{сд}}|,$$

то на основании соотношения (10.6) и схемы на рис. 10.7 может быть построен модуль, универсальный в классе самодвойственных функций n + 1 переменных, настраиваемый константами, который содержит мультиплексор «2^n в 1» (рис. 10.16).

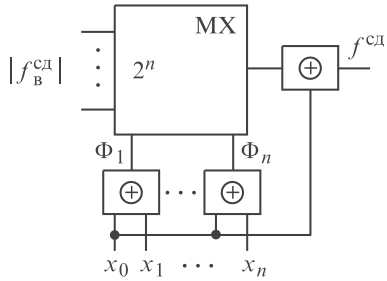

Рис. 10.16

Отметим также, что если в этом модуле заменить x_0 на $!x_0$, то новая схема (рис. 10.17) реализует заданную функцию $f^{\text{сд}}(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при подаче на ее настроечные входы нижней половины столбца значений заданной функции $|f_{\text{н}}^{\text{сд}}|$.

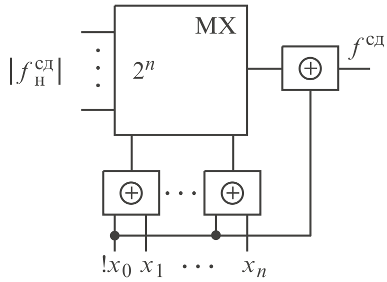

Рис. 10.17

Из изложенного следует, что при настройке константами модуль, универсальный в классе самодвойственных функций n переменных, имеет число входов, определяемое соотношением

$$M_3(n) = 2^{n-1} + n.$$

Пример 10.4. Реализовать с помощью схемы на рис. 10.16 функцию $f_1 = x_0(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2$, для которой $|f_{1\text{в}}^{\text{сд}}| = |0001|^T$.

При подаче на настроечные входы мультиплексора «4 в 1» столбца значений $|f_{1\text{в}}^{\text{сд}}|$ получим на его выходе функцию $g = \Phi_1 \Phi_2$. Из изложенного следует, что заданная функция f может быть реализована схемой на рис. 10.18.

Из рассмотрения этой схемы следует, что

$$x_0(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2 = (x_0 \oplus x_1)(x_0 \oplus x_1) \oplus x_0.$$

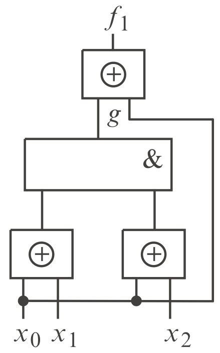

Рис. 10.18

Пример 10.5. Реализовать параллельный одноразрядный двоичный сумматор, функционирование которого описывается формулами f_1 и f_2, схемой из двухвходовых элементов И и НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ.

Искомая схема, построенная с использованием схемы, приведенной в предыдущем примере, представлена на рис. 10.19 [28].

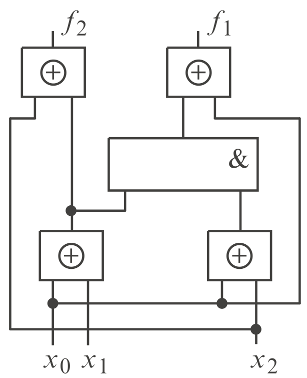

Рис. 10.19

Пример 10.6. Построить многофункциональный модуль, реализующий путем настройки систему функций, первая из которых является функцией переноса ($f^{п}$), а вторая — функцией заема ($f^{з}$) параллельного одноразрядного двоичного сумматора-вычитателя.

Рассмотрим несколько вариантов решения этой задачи.

1. Реализуем рассматриваемый модуль, настраиваемый константами, с помощью мультиплексора «4 в 1» и двухвходовых элементов И и ИЛИ.

Выберем для реализации формулы следующего вида:

$$f^{п} = !x_0 x_1 x_2 \vee x_0 (x_1 \vee x_2); \;\; f^{з} = !x_0 (x_1 \vee x_2) \vee x_0 x_1 x_2 .$$

Полагая $g_1 = x_1 x_2$, $g_2 = x_1 \vee x_2$, объединим заданные формулы следующим образом: $F_1 = !z f^{\text{п}} \vee z f^{\text{з}} = !z!x_0 g_1 \vee !zx_0 g_2 \vee z!x_0 g_2 \vee$ $\vee\, zx_0 g_1$ (рис. 10.20).

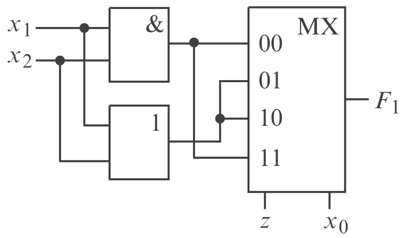

Рис. 10.20

Таким образом, при $z = 0$ $F^{\text{п}} = f_1$, а для $z = 1$ $F^{\text{з}} = f_1$.

2. Реализуем этот модуль, настраиваемый отождествлениями, с помощью мультиплексора «8 в 1» и двухвходового элемента НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ.

Выберем для реализации формулы следующего вида:

$$f^{\text{п}} = (x_0 \vee x_1) x_2 \vee x_0 x_1; \quad f^{\text{з}} = (x_0 \vee x_1) !x_2 \vee x_0 x_1.$$

Преобразуем первую из этих формул на основе соотношения (10.6) по переменной x_0, а вторую — на основе того же соотношения по переменной x_1:

$$f^{\text{п}} = (!x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2) \oplus x_0;$$

$$f^{\text{з}} = (!x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2) \oplus x_1.$$

Таким образом, $F_2 = (!x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2) \oplus z$. Следовательно, при $z = x_0$ $F_2 = f^{\text{п}}$, а при $z = x_1$ $F_2 = f^{\text{з}}$. Схема модуля, построенная на основе структуры, приведенной на рис. 10.3, в которой мультиплексор настроен константами, показана на рис. 10.21.

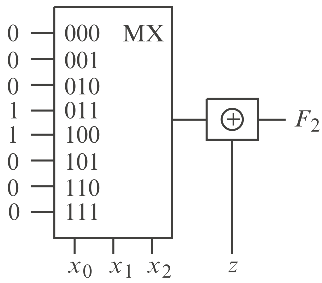

Рис. 10.21

3. Реализуем этот модуль, настраиваемый отождествлениями, с помощью двухвходовых элементов И и НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ.

Выберем для реализации формулы, приведенные в предыдущем пункте. Так как они являются самодвойственными, то

$$f^{\text{п}} = (x_0 \oplus x_1)(x_0 \oplus x_2) \oplus x_0; \quad f^{\text{з}} = (x_0 \oplus x_1)(x_0 \oplus x_2) \oplus x_1.$$

Таким образом, $F_3 = (x_0 \oplus x_1)(x_0 \oplus x_2) \oplus z$. Следовательно, при $z = x_0$ $F_3 = f^{\text{п}}$, а при $z = x_1$ $F_3 = f^{\text{з}}$. Схема этого модуля приведена на рис. 10.22 [29].

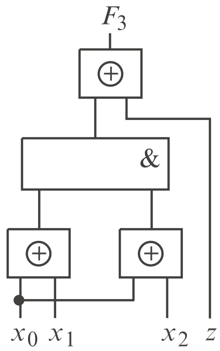

Рис. 10.22

4. Реализуем этот модуль, настраиваемый константами, с помощью двухвходовых элементов И, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ и мультиплексора «2 в 1».

Искомая схема (рис. 10.23) построена на основе схемы на рис. 10.22.

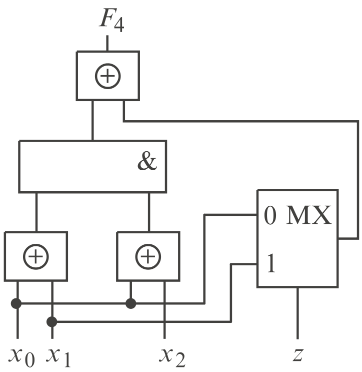

Рис. 10.23

5. Реализуем этот модуль, настраиваемый переменной и ее инверсией, с помощью двухвходовых элементов И и НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ.

Вновь выберем для реализации формулы следующего вида:

$$f^{\text{п}} = !x_0 x_1 x_2 \vee x_0 (x_1 \vee x_2); \; f^{\text{з}} = !x_0 (x_1 \vee x_2) \vee x_0 x_1 x_2.$$

Преобразуем эти формулы следующим образом:

$$f^{\text{п}} = (!x_0 x_1 x_2 \vee x_0 !x_1 !x_2) \oplus x_0 = g_0 \oplus x_0;$$

$$f^{\text{з}} = (!x_0 !x_1 !x_2 \vee x_0 x_1 x_2) \oplus !x_0 = g_1 \oplus !x_0.$$

Так, столбцы значений зеркальных функций g_0 и g_1 состоят из одинаковых фрагментов половинной длины, расположенных в противоположном порядке, реализуем первую из них схемой на рис. 10.9, а вторую — схемой на рис. 10.11. При этом

$$\begin{aligned} f^{\text{п}} &= (x_0 \oplus x_1)(x_0 \oplus x_2) \oplus x_0; \\ f^{\text{з}} &= (!x_0 \oplus x_1)(!x_0 \oplus x_2) \oplus !x_0. \end{aligned} \qquad (10.7)$$

Таким образом, $F_5 = (z \oplus x_1)(z \oplus x_2) \oplus z$. Следовательно, при $z = x_0$ $F_5 = f^{\text{п}}$, а при $z = !x_0$ $F_5 = f^{\text{з}}$. Схема этого модуля приведена на рис. 10.24.

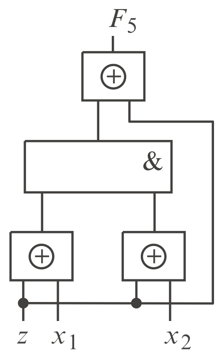

Рис. 10.24

6. Реализуем модуль, настраиваемый константами, с помощью двухвходовых элементов И и НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ.

Из соотношений 10.7 следует, что модуль может быть описан следующим образом: $g = z \oplus x_0$, $F_6 = (g \oplus x_1)(g \oplus x_2) \oplus g$. Таким образом, при $z = 0$ $F_6 = f^{\text{п}}$, а при $z = 1$ $F_6 = f^{\text{з}}$. Схема модуля приведена на рис. 10.25.

Если схему на рис. 10.25 дополнить двумя двухвходовыми элементами НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, реализующими функцию «сумма» («разность»), описываемую соотношением $f = x_0 \oplus x_1 \oplus x_2$, то получается параллельный одноразрядный двоичный сумматор-вычитатель, содержащийшесть двухвходовых элементов НЕРАВНО-

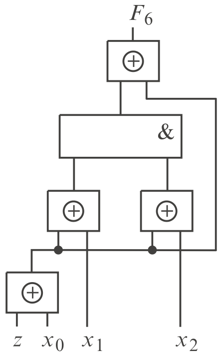

Рис. 10.25

ЗНАЧНОСТЬ и один двухвходовой элемент И [30] и который однороднее или проще известных схем [31].

Пример 10.7. Реализовать с помощью схемы на рис. 10.16 положительную самодвойственную пороговую функцию f четырех переменных, для которой $|f_{\text{в}}^{\text{сд}}| = |0000\ \ 0001|^T$, и показать, что она порождает представителей всех пяти *PN*-типов пороговых функций трех переменных.

При этом используем схему на рис. 10.16 при $n = 3$, которая в результате настройки преобразуется в схему на рис. 10.26, описываемую формулой

$$F = (x_0 \oplus x_1)(x_0 \oplus x_2)(x_0 \oplus x_3) \oplus x_0.$$

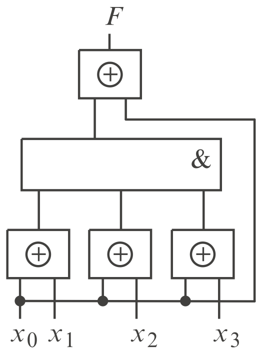

Рис. 10.26

Эта схема при $x_0 = 0$ реализует формулу $F = x_1 x_2 x_3$, при $x_0 = 1$ — $F = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, при $x_1 = 0$ — $F = x_0(x_2 \vee x_3)$, при $x_1 = 1$ — $F = x_0 \vee x_2 x_3$, а при $x_3 = x_2$ — $F = x_0(x_1 \vee x_2) \vee x_1 x_2$. Таким образом, построенная схема порождает представителей всех пяти *PN*-типов пороговых функций трех переменных.

Этот модуль, построенный по формуле

$$f = x_0(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3,$$

описан в [32].

10.11. Модуль, универсальный в рассмотренных классах булевых функций

На рис. 10.27 приведена схема такого модуля.

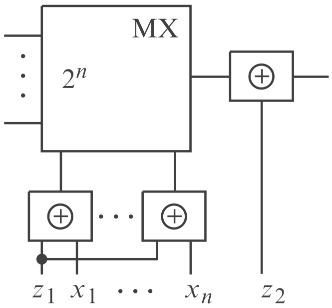

Рис. 10.27

Табл. 10.2 является таблицей настройки этого модуля на схемы, рассмотренные выше.

Таблица 10.2

2^n-входы	z_1	z_2	Реализуемая схема	Реализуемые функции
$\lvert f \rvert$	0	0	Рис. 10.1	f
$\lvert f \rvert$	0	z	Рис. 10.3	$f / f^{\text{и}} / f_{\text{в}}^{\text{и}} / f_{\text{н}}^{\text{и}}$
$\lvert f \rvert$	1	0	Рис. 10.4	$f^{\text{ад}}$
$\lvert f \rvert$	z	0	Рис. 10.5	$f / f^{\text{ад}}$
$\lvert f_{\text{в}}^{\text{сад}} \rvert$	x_0	0	Рис. 10.7	$f^{\text{сад}}$
$\lvert f \rvert$	z	z	Рис. 10.13	$f / f^{\text{д}}$
$\lvert f_{\text{в}}^{\text{сд}} \rvert$	x_0	x_0	Рис. 10.16	$f^{\text{сд}}$

10.12. Одновременная реализация булевой функции и функции, ей антидвойственной (двойственной)

Предположим, что задана ТИ булевой функции $f(X)$, где $X = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Тогда антидвойственная ей функция строится на основе соотношения

$$f^{\text{ад}}(X) = f(2^n - 1 - X).$$

В табл. 10.3 в качестве примера приведена функция f_4 и построенная по ней с помощью приведенного соотношения антидвойственная ей функция $f_4^{\text{ад}}$.

Таблица 10.3

X	x_0	x_1	x_2	f_4	$f_4^{\text{ад}}$	f_5	f_6	$f_4^{\text{д}}$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0	0	0	1
5	1	0	1	1	0	0	1	1
6	1	1	0	1	0	0	1	1
7	1	1	1	1	0	0	1	1

Построим схему (рис. 10.28), основанную на объединении двух схем (рис. 10.7), предназначенных для реализации зеркальных функ-

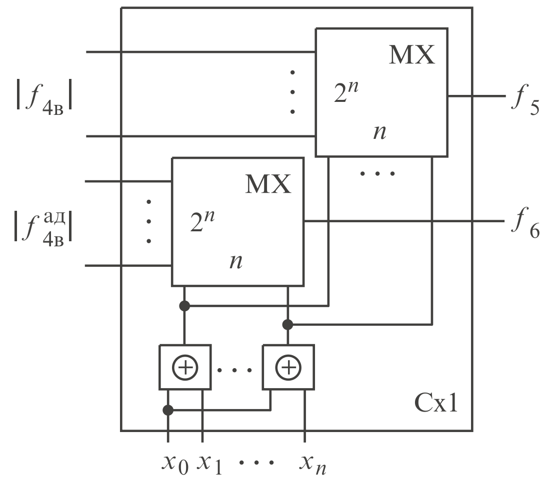

Рис. 10.28

ций от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_n$. На настроечные входы первой из этих схем подадим столбец $|f_{4в}|$, а на настроечные входы второй схемы — столбец $|f_{4в}^{ад}|$.

В табл. 10.3 приведены зеркальные функции f_5 и f_6, реализуемые построенной схемой.

Дополним построенную схему коммутатором, состоящим из двух мультиплексоров «2 в 1», первый из которых строит заданную функцию f из верхней половины столбца значений функции f_5 и нижней половины столбца значений функции f_6, а второй строит функцию $f^{ад}$ из верхней половины столбца значений функции f_6 и нижней половины столбца значений функции f_5 (рис. 10.29).

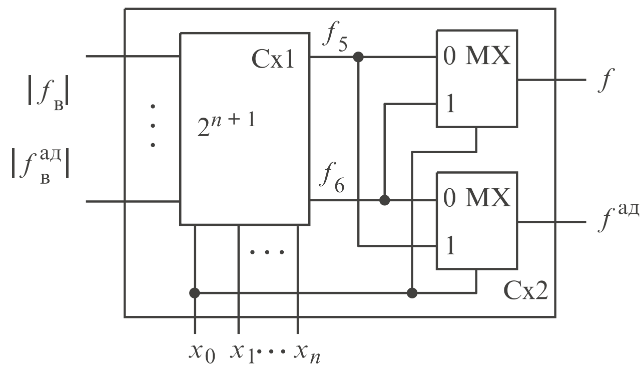

Рис. 10.29

Так как справедливо равенство

$$f^{д} = !f^{ад},$$

то схема на рис. 10.30 позволяет реализовать одновременно функцию f и двойственную ей функцию $f^{д}$.

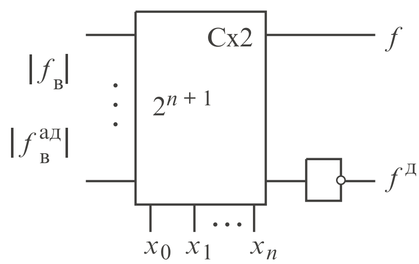

Рис. 10.30

Из изложенного следует, что при настройке константами модуль с двумя выходами, реализующий одновременно произвольную

БФУ n переменных и функцию, ей антидвойственную (двойственную), имеет число входов, определяемое соотношением

$$M_4(n) = 2^n + n.$$

На рис. 10.31 приведена схема, которая при $z = 0$ реализует функции f и $f^{\text{ад}}$, а при $z = 1$ — функции f и $f^{\text{д}}$ [33].

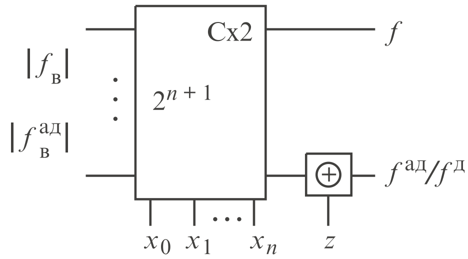

Рис. 10.31

Выводы

1. Предложены модули, универсальные в классе самодвойственных функций n переменных.
2. Предложены модули, универсальные в классе самоантидвойственных функций n переменных.
3. Показано, что описанные выше модули имеют меньшее число входов по сравнению с соответствующими модулями, универсальными в классе произвольных БФУ n переменных, так как функции, которые они объединяют, удается «локально закодировать».
4. Предложены модули, реализующие путем настройки одновременно две функции — произвольную БФУ и функцию, ей антидвойственную, что может рассматриваться так же как вычисление произвольной БФУ одновременно на двух противоположных наборах.
5. Предложены модули, которые реализуют путем настройки одновременно БФУ и функцию, ей двойственную.

Литература

1. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966.

2. *Шеннон К. Э.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. литер., 1963.

3. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов // Сети передачи информации и их автоматизация. М.: Наука, 1965.

4. *Бутаков Е. А.* Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М.: Энергия, 1970.

5. *Поваров Г. Н.* К изучению контактных схем упорядоченного типа // Проблемы передачи информации. 1959. № 4.

6. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.

7. Синтез электронных вычислительных и управляющих схем. М.: Изд-во иностр. литер., 1954.

8. *Goto E., Takahasi H.* Some theorems useful in threshold logic for enumerating boolean functions // Information Proceedings. IFIP Congress 62. Amsterdam, 1963.

9. *Harrison M. A.* On the classification of boolean functions by the general linear and affine groups // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1964. N 2.

10. *Дертоузос М.* Пороговая логика. М.: Мир, 1967.

11. *Сычев А. В., Кириченко Н. В., Калмыков В. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 500525 // Бюл. изобр. 1976. № 3.

12. *Попов В. А., Скибенко И. Т., Василенко А. С.* и др. Логическая ячейка. А. с. СССР № 520585 // Бюл. изобр. 1976. № 25.

13. *Розенблюм Л. Я.* Самодвойственная классификация и некоторые классы булевых функций // Автоматика и вычисл. техника. 1971. № 2.

14. *Страздинь И. Э.* Группа самодвойственных преобразований булевых функций // Теория дискретных автоматов. Рига: Зинатне, 1967.

15. *Страздинь И. Э.* Группы автоморфизмов алгебры булевых функций и классы Поста // Труды Рижского алгебраического семинара. Рига: Изд-во ЛатвГУ, 1969.

16. *Страздинь И. Э.* Самодвойственные типы булевых функций до пяти переменных // Автоматика и вычисл. техника. 1969. № 4.

17. *Лысенко Э. В., Попов В. А., Скибенко И. Т.* и др. Логическое устройство. А. с. СССР № 657432 // Бюл. изобр. 1979. № 14.

18. *Дергачев В.А., Артеменко М.Н., Балалаев В.А.* и др. Логический модуль. А. с. СССР № 1242929 // Бюл. изобр. 1986. № 25.

19. *Лысенко Э. В., Попов В. А., Скибенко И. Т.* и др. Универсальный логический модуль. А. с. СССР № 813410 // Бюл. изобр. 1981. № 10.

20. *Дергачев В. А., Артеменко М. Н., Балалаев В. А.* и др. Универсальный логический модуль. А. с. СССР № 1242931 // Бюл. изобр. 1986. № 25.

21. *Дергачев В. А., Губка С. А., Балалаев В. А.* и др. Универсальный логический модуль. А. с. СССР № 1290289 // Бюл. изобр. 1987. № 6.

22. *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1965. Вып.14.

23. *Лупанов О. Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во МГУ, 1984.

24. *Вау С., Танг С.* Универсальные логические модули и их применение // Экспресс-информация. Вычисл. техника. 1970. № 27.

25. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.

26. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: ИПК СП, 1983.

27. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1149244 // Бюл. изобр. 1985. № 13.

28. *Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1290290 // Бюл. изобр. 1987. № 6.

29. *Шалыто А. А.* Программная реализация алгоритмов логического управления судовыми системами. Л.: ИПК СП, 1989.

30. *Шалыто А. А.* Комбинационный двоичный сумматор-вычитатель. А. с. СССР № 1264166 // Бюл. изобр. 1986. № 38.

31. *Мищенко В. А., Козюминский В. Д., Семашко А. Н.* Многофункциональные автоматы и элементная база. М.: Радио и связь, 1981.

32. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* и др. Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 813787 // Бюл. изобр. 1981. № 10.

33. *Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1283744 // Бюл. изобр. 1987. № 2.