Глава 9

Модули, универсальные в классе симметрических функций

9.1. Обзор литературы

В классе всех булевых функций n переменных важное значение имеют функции упорядоченного типа, специфические свойства которых обеспечивают простоту их реализации [1—3].

Среди функций этого типа одними из наиболее «интересных» являются полностью симметрические БФУ, которые в дальнейшем будем называть *симметрическими функциями* (СФ).

Известно большое число работ, посвященных изучению свойств и реализации СФ, например [4—15].

Стандартная схема для реализации СФ в базисе релейно-контактных элементов, названная *симметрическим многополюсником*, предложена в [4].

Стандартная схема из функциональных элементов, построенная на основе принципа локального кодирования [16] и предназначенная для реализации путем настройки произвольных СФ n переменных, предложена в [17, 18]. Эта схема может быть названа *симметрическим модулем* (СМ). Будем обозначать такой модуль символом СМn.

В [19] исследованы функциональные возможности модуля СМn при использовании некоторых входных и настроечных алфавитов и предложен весьма трудоемкий метод определения его настройки на реализацию СФ.

В настоящей работе рассматриваются два типа СМ, первый из которых построен на основе принципа локального кодирования, а второй — на основе симметрического многополюсника Шеннона, реализованного на мультиплексорах (МХ).

Излагаются более простые методы реализации СФ в базисе таких модулей, чем известный метод, изложенный в [19].

Понятие «симметрическая реализация» [4] распространяется на реализацию несимметрических функций, в том числе пороговых и произвольных.

Вводятся понятия «симметрическое разложение булевой функции по крайним правым входным переменным» и «многократная разделительная симметрическая декомпозиция булевой функции». Предложены методы построения таких разложений и декомпозиций.

Изложены также методы синтеза комбинационных схем в базисе симметрических модулей.

9.2. Основные определения

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется симметрической, если она не изменяется при любой перестановке входных переменных.

Число i ($i = 0, \ldots, n$) называется рабочим числом симметрической функции, если она принимает единичные значения на всех входных наборах, содержащих i единиц.

Симметрическая функция n переменных может содержать от 0 до n рабочих чисел.

Поэтому число симметрических функций n переменных определяется соотношением

$$N_1(n) = 2^{n+1}.$$

Функция, которая зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и имеет только одно рабочее число t, называется элементарной СФ (ЭСФ) и обозначается символом $S_t^p(x_1, \ldots, x_n)$, а функция, которая, например, имеет три рабочих числа — t, k, l, обозначается символом $S_{t,k,l}^p(x_1, \ldots, x_n)$.

При этом справедливо соотношение

$$S_{t,k,l}^p = S_t^p \vee S_k^p \vee S_l^p.$$

Представление СФ через ее рабочие числа будем называть симметрической реализацией (СР) первого типа и использовать в ней для отличия верхний индекс «р» .

Симметрическая реализация для СФ n переменных может быть записана также и через код функции [16], который будем называть также кодом настройки. Такую реализацию будем называть СР второго типа и применять в ней верхний индекс «к».

Симметрические реализации могут быть построены не только для симметрических функций, но и для БФУ, не являющихся симметрическими. Для таких функций в СР могут использоваться при одних методах построения как рабочие числа, так и код настройки, а при других — только код настройки, который по этой причине является более универсальной характеристикой симметрических реализаций. Существование определенной СР для булевой функции обеспечивает возможность ее реализации соответствующим симметрическим модулем при подаче на его информационные входы переменных из входного алфавита, а на настроечные — кода настройки, состоящего из символов настроечного алфавита. При этом симметрическая реализация для БФУ всегда существует [9], но может быть не единственной, что влияет на сложность соответствующего ей симметрического модуля.

Если в перечне входных переменных в СР каждая переменная встречается только один раз, то такую СР будем называть бесповторной и повторной — в противном случае.

9.3. Два типа модулей, универсальных в классе симметрических функций

1. Модуль СМn первого типа [17] приведен на рис. 9.1.

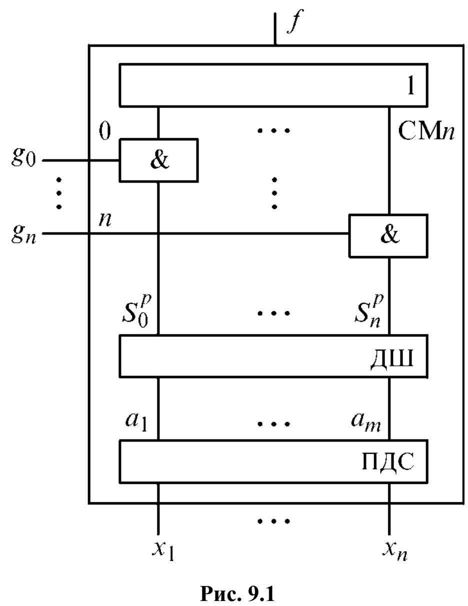

Рис. 9.1

В этой схеме применяются следующие обозначения: ПДС — параллельный двоичный счетчик; ДШ — дешифратор. ПДС определяет двоичный код числа единиц во входном наборе, а ДШ преобразует этот код в элементарную СФ. Структура остальной части схемы описывается соотношением

$$f = \bigvee_{i=0}^{n} g_i S_i^p(x_1, \ldots, x_n),$$

где $g_i = 0$, 1. При этом отметим, что кортеж значений переменных g_i является кодом настройки модуля.

Число выходов в ПДС определяется соотношением

$$w = \begin{cases}]\log n[& \text{при } n \neq 2^k; \\ ]\log n[+1 & \text{при } n = 2^k, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$

При $n = 2$ ПДС является одноразрядным двоичным полусумматором (ПΣ) (рис. 9.2), в котором $a_1 = x_1 x_2 = S_2^p(x_1, x_2)$, $a_2 = x_1 \oplus x_2 = S_1^p(x_1, x_2)$.

При $n = 3$ ПДС является одноразрядным двоичным сумматором (рис. 9.3), в котором $a_1 = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 x_2 = S_{2,3}^p(x_1, x_2, x_3)$, $a_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = S_{1,3}^p(x_1, x_2, x_3)$.

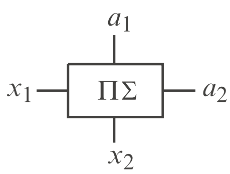

Рис. 9.2

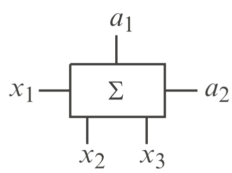

Рис. 9.3

ПДС при $n = 3$ может быть реализован блочной схемой из трех полусумматоров (рис. 9.4).

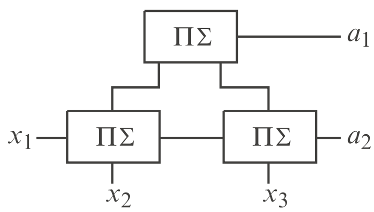

Рис. 9.4

При $n = 4$ ПДС описывается системой булевых формул (СБФ) вида:

$$a_1 = S_4^p(x_1, \ldots, x_4),\ a_2 = S_{2,3}^p(x_1, \ldots, x_4),\ a_3 = S_{1,3}^p(x_1, \ldots, x_4).$$

Эта СБФ может быть реализована блочной схемой, представленной на рис. 9.5.

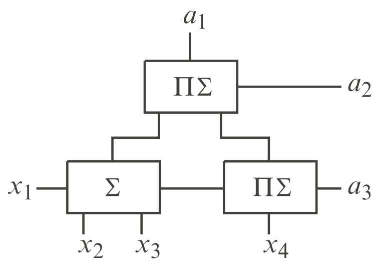

Рис. 9.5

ПДС при $n > 4$ строятся аналогично. Полными (состоящими только из сумматоров) являются ПДС при $n = 2^{k+1} - 1$. Число сумматоров в полных ПДС определяется соотношением

$$C(n) = 1 + 3 + 7 + \ldots + \big((n-1)/2\big) =$$
$$= 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + 2^3 - 1 + \ldots + 2^{\log\left((n+1)/2\right)} =$$
$$= 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{\log\left((n+1)/2\right)} - \log\big((n+1)/2\big) - 1 =$$
$$= 2^{1+\log\left((n+1)/2\right)} - \log\big((n+1)/2\big) - 2.$$

Из этого соотношения следует, что при $n = 3$ $C(3) = 1$, при $n = 7$ $C(7) = 4$, при $n = 15$ $C(4) = 11$. На рис. 9.6 в качестве примера приведен ПДС при $n = 15$.

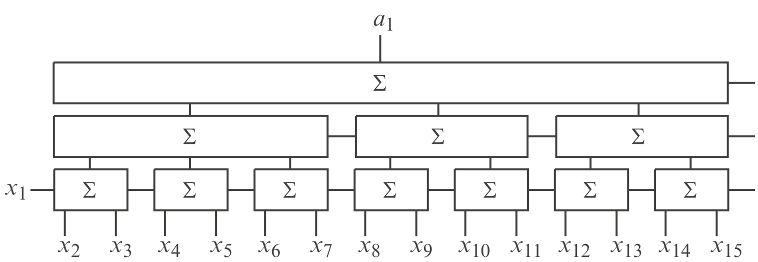

Рис. 9.6

Так как каждый сумматор может быть построен из трех полусумматоров (рис. 9.4), то число последних в полных ПДС определяется соотношением

$$C_1(n) = 3C(n).$$

Отметим, что подход к построению СМ, аналогичный с рассмотренным, изложен в [29].

2. СМ второго типа имеют итеративную структуру и состоят только из мультиплексоров «2 в 1». Такие модули строятся в результате замены каждого переключательного контакта в симметрической структуре [4] на мультиплексор «2 в 1». При этом число мультиплексоров в схеме модуля СМn определяется соотношением

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Модуль СМ1 реализуется одним мультиплексором «2 в 1» (рис. 9.7).

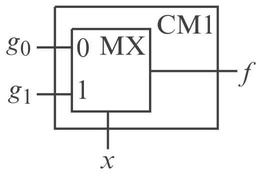

Рис. 9.7

Модуль СМ2 реализуется схемой из трех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 9.8) либо одним мультиплексором «4 в 1», в котором объединены средние 2^n-входы.

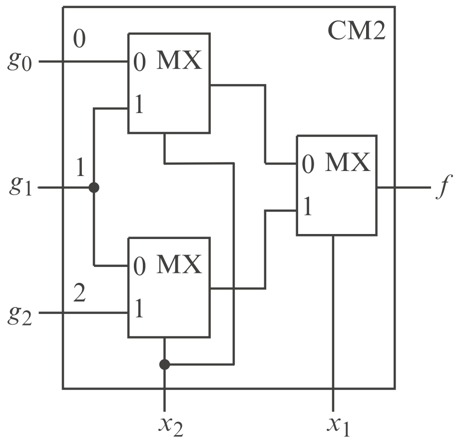

Рис. 9.8

На рис. 9.9 приведен модуль СМ3, состоящий из шести мультиплексоров «2 в 1».

3. Модули СМn любого из рассмотренных двух типов имеют n информационных и n + 1 настроечных входов, и поэтому общее число входов в них определяется соотношением

$$V_1(n) = 2n + 1.$$

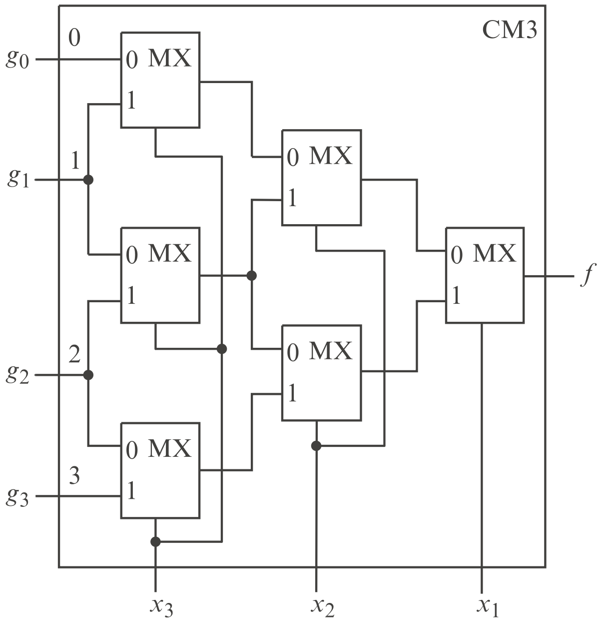

Рис. 9.9

Обратим внимание на то, что на информационные входы СМ входные переменные могут подаваться в произвольном порядке. В дальнейшем для модуля СМn любого типа будем использовать обозначение, приведенное на рис. 9.10.

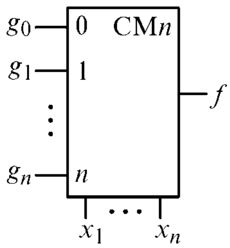

Рис. 9.10

9.4. Методы построения симметрических реализаций булевых функций

1. Входной и настроечный алфавиты. В настоящей работе для симметрических модулей рассматриваются девять классов входных ($A^{\text{в}}$) и семь классов настроечных ($A^{\text{н}}$) алфавитов.

В х о д н ы е а л ф а в и т ы:

$A_1^{\text{в}} = x_1, \ldots, x_n$;

$A_2^{\text{в}} = !x_1, \ldots, !x_n$;

$A_3^{\text{в}} = \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n$, где $\widetilde{x}_i = !x_i, x_i$;

$A_4^{\text{в}} = x_1, \ldots, x_{n-1}$;

$A_5^{\text{в}} = x_1, \ldots, x_m$, где $2 \leqslant m \leqslant n - 2$;

$A_6^{\text{в}} = \Phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$;

$A_7^{\text{в}} = \Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \Phi_2(x_1, \ldots, x_{n-1})$;

$A_8^{\text{в}} = \Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, \Phi_3(x_1, \ldots, x_{n-1})$;

$A_9^{\text{в}} = \Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \ldots, \Phi_{R-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Н а с т р о е ч н ы е а л ф а в и т ы:

$A_1^{\text{н}} = 0, 1$;

$A_2^{\text{н}} = 0, 1, x_1, \ldots, x_n$;

$A_3^{\text{н}} = 0, 1, x_1, \ldots, x_n, !x_1, \ldots, !x_n$;

$A_4^{\text{н}} = g_0(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)$;

$A_5^{\text{н}} = g_0(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)$;

$A_6^{\text{н}} = 0, 1, !x_n, x_n$;

$A_7^{\text{н}} = g_0(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_{R-1}(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

2. Симметрические реализации СФ при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. В этом случае предлагается по таблице истинности (ТИ) заданной БФУ построить таблицу настройки (ТН), содержащую $n + 3$ столбцов и 2^n строк. В ней первый столбец соответствует рабочим числам i, следующие n столбцов соответствуют значениям входных переменных, далее располагаются столбец значений БФУ и столбец, определяющий код настройки. При заполнении этой таблицы предлагается изменить порядок расположения строк в ней относительно порядка их расположения в ТИ по аналогии с тем, как это делается при построении таблицы настройки для модулей Препараты—Мюллера (разд. 11.3 и [20]).

При этом входные наборы разбиваются на $n + 1$ групп, в каждую из которых включается по C_n^i наборов, содержащих i единиц. Группы располагаются в таблице настройки в порядке возрастания значений переменной i, а наборы внутри каждой группы — в порядке возрастания их десятичных эквивалентов.

При $n = 2$ порядок расположения строк в таблице настройки совпадает с их порядком в таблице истинности.

По таблице настройки для заданной БФУ можно определить, является ли она симметрической, и при положительном ответе на этот вопрос (для всех входных наборов с одинаковым значением i значения функции одинаковы) — определить ее рабочие числа и код настройки.

Заполнение столбца кода настройки выполняется на основе соотношения

$$g_i = f^{\,i},$$

где $f^{\,i}$ — фрагмент столбца значений ТИ заданной БФУ, соответствующий рабочему числу i.

Пример 9.1. Определить имеет ли функция

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \left|0001\ \ 0111\right|^T = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1 x_2$$

симметрическую реализацию.

Построим таблицу настройки (табл. 9.1).

Т а б л и ц а 9.1

i	x_1	x_2	x_3	f_1	g_i^1	f_2	g_i^2	f_3	g_i^3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0 0 1	0 1 0	1 0 0	0 0 0	0	0 1 0	x_2	0 1 0	x_2
2	0 1 1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	1	1 1 0	x_3	0 0 1	$!x_3$
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Определим по этой таблице для заданной функции рабочие числа (2, 3) и код настройки (0011), указанный в столбце $g_1^{\,i}$, что позволяет получить симметрические реализации двух типов:

$$f_1 = S^{\text{р}}_{2,\,3}(x_1, x_2, x_3) = S^{\text{к}}_{0,\,0,\,1,\,1}(x_1, x_2, x_3).$$

Полученные симметрические реализации бесповторны (в каждую реализацию каждая входная переменная входит один раз), в то время как заданная БФ повторна.

На рис. 9.11 приведен модуль СМ3, настроенный на реализацию заданной функции.

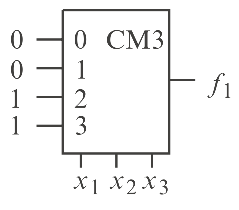

Рис. 9.11

Если для заданной функции f найдена СР, то для ее инверсии такая реализация может быть найдена без построения таблицы настройки, так как в [4] показано, что у функции $!f$ рабочими числами являются все числа от 0 до n, не являющиеся таковыми для функции f.

При этом код настройки функции $!f$ является инверсным коду настройки для функции f.

Пример 9.2. Определить симметрическую реализацию для БФ

$$f = (!x_1 \vee !x_2)!x_3 \vee !x_1!x_2.$$

Так как функция f_1 является самодвойственной, то $f = !f_1$, и поэтому

$$f = S^{\text{р}}_{0,1}(x_1, x_2, x_3) = S^{\text{к}}_{1,1,0,0}(x_1, x_2, x_3).$$

3. Симметрические реализации СФ при использовании алфавитов $A_2^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. Возможность такой реализации определяется соотношением [10]

$$f(x_1, \ldots, x_n) = S^{\text{р}}_{p,\ldots,l}(x_1, \ldots, x_n) = S^{\text{р}}_{n-p,\ldots,n-l}(!x_1, \ldots, !x_n).$$

Пример 9.3. Определить симметрическую реализацию в указанных алфавитах для функции f_1.

Из изложенного выше следует, что

$$f_1 = S^{\text{р}}_{0,1}(!x_1, !x_2, !x_3).$$

4. Симметрические реализации БФУ при использовании алфавитов $A_1^{\text{н}}$, $A_2^{\text{н}}$. В этом случае модуль СМ2 с пятью входами является модулем, универсальным в классе произвольных БФУ двух переменных [19], который обозначим символом УМ2.

Это объясняется тем, что в данном случае

$$2^{C_2^1} = n + 2.$$

В левой части этого соотношения записано число возможных типов фрагментов длиной два в столбце ТИ при $i = 1$, а в правой его части — число символов в алфавите настройки $A_2^{\text{н}}$ при $n = 2$. Для этого модуля $g_0, g_2 = 0, 1$; $g_1 = 0, 1, x_1, x_2$.

Модуль СМ2 является одним из одновыходных модулей УМ2, при построении которых не применяются какие-либо классификации [21]. Модулями УМ2 являются также:

— модуль СМ1 (МХ «2 в 1») с тремя входами и алфавитами $A_4^{\text{в}}$, $A_6^{\text{н}}$;

— модуль Препараты—Мюллера с четырьмя входами и алфавитами $A_1^{\text{в}}$, $A_3^{\text{н}}$;

— мультиплексор «4 в 1» с шестью входами и алфавитами $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$.

При $n > 2$ и алфавитах $A_1^{\text{в}}$, $A_2^{\text{н}}$ модули СМn не являются универсальными в классе произвольных БФУ, однако позволяют реализовать кроме симметрических также и некоторые несимметрические функции n переменных. Общее число БФУ n переменных, реализуемых модулем СМn, в данном случае определяется соотношением [19]

$$N_2(n) = 4(n+2)^{n-1}.$$

Так, модуль СМ3 реализует 100 из 256 функций трех переменных, а модуль СМ4 — 864 из 65 536 функций четырех переменных, в то время как $N_1(3) = 16$, а $N_1(4) = 32$.

Коды настройки модулей в данном случае могут быть определены с помощью таблицы настройки.

Пример 9.4. Определить, существует ли симметрическая реализация для БФУ

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \left| 0011\ 0101 \right|^T.$$

Из рассмотрения столбца f_2 (табл. 9.1) следует, что эта БФУ не является симметрической. Однако для нее может быть построена симметрическая реализация, код настройки которой приведен в столбце g_i^2 этой таблицы. При этом

$$f_2 = S_{0,x_2,x_3,1}(x_1, x_2, x_3).$$

Полученная СР бесповторна, в то время как БФ для заданной БФУ повторна: $f_2 = !x_1 x_2 \vee x_1 x_3$.

5. Симметрические реализации БФУ при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_3^{\text{н}}$. Дальнейшее расширение алфавита настройки позволяет еще больше расширить класс функций, реализуемых симметрическими модулями. Так как при $n = 3$

$$2^{C_3^1} = 2^{C_3^2} = 2n + 2,$$

то модуль СМ3 в данном случае универсален в классе произвольных БФУ трех переменных [19]. Этот модуль (рис. 9.9) имеет семь входов и один выход. Для этого модуля $g_0, g_3 = 0, 1$; $g_1, g_2 = 0, 1, x_1, x_2, x_3, !x_1, x_2, !x_3$ и он

— имеет меньшее число входов по сравнению с мультиплексором «8 в 1», который является модулем УМ3 с алфавитами $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$;

— сложнее, чем мультиплексор «4 в 1» с шестью входами, который является модулем УМ3 с алфавитами $A_4^{\text{в}}$, $A_6^{\text{н}}$;

— имеет более регулярную структуру, но и большее число входов по сравнению с модулем Препараты—Мюллера с шестью входами, который является модулем УМ3 с алфавитами $A_1^{\text{в}}$, $A_3^{\text{н}}$.

Число функций n переменных, реализуемых модулем СМn в данном случае, определяется соотношением [19]

$$N_3(n) = 4(2n+2)^{n+1}.$$

Например, модуль СМ4 реализует 4000 БФУ, из которых только 32 являются симметрическими.

Определение кода настройки предлагается и в данном случае проводить по таблице настройки.

Пример 9.5. Определить возможность симметрической реализации для БФУ

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \left| 0010\ \ 0011 \right|^T.$$

Из рассмотрения столбца f_3 (табл. 9.1) следует, что эта БФУ не является симметрической. Однако для нее может быть построена симметрическая реализация, код настройки которой приведен в столбце g_i^3 этой таблицы. При этом

$$f_3 = S^{\text{к}}_{0,\, x_2,\, !x_3,\, 1}(x_1, x_2, x_3).$$

Полученная симметрическая реализация бесповторна, как и бесповторна БФ для заданной БФУ:

$$f_3 = (x_1 \vee !x_3) x_2.$$

Пример 9.6. Определить возможность симметрической реализации для БФУ [19]

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1000\ \ 0111\ \ 1000\ \ 1000 \right|^T.$$

Код настройки модуля СМ4 на реализацию заданной БФУ приведен в столбце g_i^4 табл. 9.2.

Т а б л и ц а 9.2

<table>
<tr><th>i</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>x_4</th><th>f_4</th><th>g_i^4</th><th>f_5</th><th>g_i^5</th><th>f_6</th><th>g_i^6</th><th>f_9</th><th>g_i^9</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="4">x_1</td><td>1</td><td rowspan="4">$!x_3$</td><td>0</td><td rowspan="4">0</td><td>0</td><td rowspan="4">$x_2 \oplus x_3$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="6">x_2</td><td>1</td><td rowspan="6">x_3</td><td>1</td><td rowspan="6">$x_1x_2 \vee x_3x_4$
или
$!x_1!x_2 \vee !x_3!x_4$</td><td>1</td><td rowspan="6">x_3</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td rowspan="4">$!x_1$</td><td>1</td><td rowspan="4">x_3</td><td>1</td><td rowspan="4">1</td><td>1</td><td rowspan="4">x_3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

При этом

$$f_4 = S^{\text{к}}_{1,\, x_1,\, x_2,\, !x_1,\, 0}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Эта реализация с помощью предлагаемого метода найдена существенно проще, чем в [19].

Полученная СР повторна, в то время как БФ бесповторна:

$$f_4 = !x_1 x_2 \oplus !x_3 !x_4.$$

Пример 9.7. Определить возможность симметрической реализации для БФУ [22]

$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1101\ 1011\ 1011\ 0010 \right|^T.$$

Код настройки модуля СМ4 на реализацию заданной БФУ приведен в столбце g_i^5 табл. 9.2.

При этом

$$f_5 = S^{\text{к}}_{1,\, !x_3,\, x_3,\, x_3,\, 0}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Полученная СР существенно проще, чем БФ

$$f_5 = !x_1(!x_2 x_4 \vee x_2 x_3 \vee !x_3 !x_4) \vee x_1\big(!x_2(x_3 \vee !x_4) \vee x_3 !x_4\big).$$

6. Симметрические реализации БФУ при использовании алфавитов $A_3^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. Расширение входного алфавита увеличивает и класс функций, реализуемых СМ, так как некоторые несимметрические БФУ в алфавите $A_1^{\text{в}}$ являются СФ в алфавите $A_3^{\text{в}}$.

Весьма трудоемкий метод построения симметрических реализаций для этого случая изложен в [22].

Отметим, что для алфавита $A_3^{\text{в}}$ в отличие от алфавита $A_1^{\text{в}}$ для БФУ может существовать несколько симметрических реализаций.

Пример 9.8. Определить возможность симметрической реализации для БФУ, рассмотренной в предыдущем примере.

В [22] показано, что

$$f_5 = S^{\text{р}}_{1,\,2}(x_1, x_2, !x_3, x_4) = S^{\text{р}}_{2,\,3}(!x_1, !x_2, x_3, !x_4).$$

Сравнение этих реализаций с найденной в примере 9.7 показывает, что в алфавите $A_3^{\text{в}}$ заданная БФУ является симметрической и поэтому может быть записана через рабочие числа, в то время как в алфавите $A_1^{\text{в}}$ она несимметрична, но имеет достаточно просто определяемую симметрическую реализацию, использующую код настройки.

7. Стандартные повторные симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. Методы, рассмотренные выше, не позволяют реализовать произвольные БФУ n переменных одним модулем СМn. В [19] показано, что при $A^{\text{в}} = 0, x_1, \ldots, x_n$ и $A_1^{\text{н}}$ модуль СМn универсален в классе произвольных БФУ m переменных, где $m = [\log(n+1)]$.

Предложим простой метод построения стандартной повторной симметрической реализации для произвольной БФУ n переменных, применяя при этом модуль СМ($2^n - 1$). Такая реализация соответствует теореме, изложенной в [9], в соответствии с которой произвольную БФУ n переменных всегда можно представить в виде симметрической функции, зависящей от $2^n - 1$ переменных.

Предлагаемая стандартная повторная СР базируется на размножении входных переменных [22]. При этом если переменную x_j $(j = 1, \dots, n)$ повторить 2^{n-j} раз, то для произвольной БФУ n переменных при $g_i = 0, 1$ справедливо соотношение

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{2^n-1} g_i S_i^{\text{p}}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{2^{n-1}}, \dots, \underbrace{x_n}_{2^0}).$$

Такому представлению БФУ соответствует расширенная ТИ, содержащая $2^{n-1} + 2$ столбцов и 2^n строк. В этой таблице в крайнем левом столбце в порядке возрастания указаны рабочие числа от 0 до $2^n - 1$, затем следуют $2^n - 1$ столбцов, соответствующих входным переменным. Крайним правым столбцом таблицы является столбец значений функции. Назовем построенную таким образом таблицу полной. Столбец значений полной таблицы непосредственно (без увеличения числа строк или их перестановки) задает код настройки, подаваемый на настроечные входы модуля, на информационные входы которого переменная x_j подается 2^{n-j} раз.

Пример 9.9. Определить стандартную повторную симметрическую реализацию для функции

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \left| 0010 \;\; 0011 \right|^T.$$

Используя предлагаемый метод, построим для этой БФУ полную таблицу (табл. 9.3).

Таблица 9.3

i	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	f_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1	1	0	1
3	0	0	0	0	1	1	1	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0	1	0
6	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1

Из рассмотрения этой таблицы следует, что

$$f_3 = S^{\text{р}}_{2,6,7}(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3) =$$
$$= S^{\text{к}}_{0,0,1,0,0,0,1,1}(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3).$$

Рассмотренный метод реализации произвольных БФУ является беспереборным и строит для них стандартные (одинаковые по сложности применяемых СМ) симметрические реализации, которые для многих БФУ, в том числе симметрических, являются избыточными. Например, СФ, рассмотренная в примере *9.1*, реализуется данным методом весьма сложно:

$$f_1 = S^{\text{р}}_{3,5,6,7}(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3).$$

Поэтому рассмотрим модификации этого метода, которые во многих случаях позволяют уменьшить, а для СФ — исключить повторность входных переменных.

8. Повторные симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$ и последовательном заполнении полной таблицы. Излагаемый метод строит СР для произвольной БФУ n переменных не более чем за $2^n - n$ шагов.

На первом шаге для заданной БФУ строится остов полной таблицы, в которой заполняются крайние столбцы, а для переменных x_j — крайние правые столбцы. Заданная БФУ проверяется на симметричность на основе подсчета значения переменной i для каждой строки и сравнения значений БФУ при одинаковых значениях переменной i. Если для каждого значения i все значения БФУ совпадают, то она является симметрической, в противном случае она таковой не является. При положительном результате проверки процесс завершается, а иначе осуществляется переход к шагу 2.

На втором шаге заполняется второй столбец с пометкой x_{n-1} за счет дублирования в него содержимого первого столбца с этой пометкой. После этого подсчитываются новые значения переменной i для каждой строки и заполняется крайний левый столбец. Если эта таблица задает симметрическую реализацию, то процесс заканчивается, в противном случае выполняется переход к следующему шагу.

На каждом последующем шаге заполняется слева направо один из столбцов полной таблицы и осуществляется проверка получаемой реализации на симметричность.

Этот процесс является сходящимся, так как не позднее чем за $2^n - n$ шагов искомая реализация будет найдена. При этом в крайнем случае будут заполнены все столбцы полной таблицы, как это имеет место при применении стандартной повторной симметрической реализации, рассмотренной в предыдущем пункте.

Пример 9.10. Определить повторную симметрическую реализацию для функции f_3, рассмотренной в предыдущем примере.

Построим для заданной БФУ остов полной таблицы (табл. 9.4 без столбца f_5).

Т а б л и ц а 9.4

i	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	f_3	f_5
0				0		0	0	0	1
1				0		0	1	0	x_4
1				0		1	0	1	$!x_4$
2				0		1	1	0	1
1				1		0	0	0	$!x_4$
2				1		0	1	0	1
2				1		1	0	1	0
3				1		1	1	1	$!x_4$

Из рассмотрения остова таблицы следует, что заданная БФУ не является СФ, так как имеет различные значения при i = const.

Заполним методом дублирования второй столбец с пометкой x_2 этой таблицы (табл. 9.5).

Т а б л и ц а 9.5

i	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	f_3	f_5
0				0	0	0	0	0	1
1				0	0	0	1	0	x_4
2				0	1	1	0	1	$!x_4$
3				0	1	1	1	0	1
1				1	0	0	0	0	$!x_4$
2				1	0	0	1	0	1
3				1	1	1	0	1	0
4				1	1	1	1	1	$!x_4$

Таблица вновь не определяет симметрическую реализацию.

Заполним методом дублирования второй столбец с пометкой x_1 (табл. 9.6). Таблица снова не определяет симметрическую реализацию.

Заполним методом дублирования третий столбец с пометкой x_1 (табл. 9.7).

Т а б л и ц а 9.6

i	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	f_3	f_5
0			0	0	0	0	0	0	1
1			0	0	0	0	1	0	x_4
2			0	0	1	1	0	1	$!x_4$
3			0	0	1	1	1	0	1
2			1	1	0	0	0	0	$!x_4$
3			1	1	0	0	1	0	1
4			1	1	1	1	0	1	0
5			1	1	1	1	1	1	$!x_4$

Т а б л и ц а 9.7

i	x_1	x_1	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	f_3
0		0	0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	1	0
2		0	0	0	1	1	0	1
3		0	0	0	1	1	1	0
3		1	1	1	0	0	0	0
4		1	1	1	0	0	1	0
5		1	1	1	1	1	0	1
6		1	1	1	1	1	1	1

Из этой таблицы следует, что

$$f_3 = S^{\text{р}}_{2,5,6}(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3).$$

Эта реализация проще полученной в примере *9.9*.

Из изложенного следует, что предложен конструктивный метод, позволяющий уточнить формулировку теоремы из [9], приведенной в п. **7**: произвольную БФУ n переменных всегда можно представить в виде СФ, зависящей не более чем от $2^n - 1$ переменных. Таким образом, произвольная БФУ n переменных может быть реализована на одном симметрическом модуле, имеющем не более чем $2^n - 1$ информационных входов.

Пример 9.11. Определить повторную симметрическую реализацию для функции f_5, рассмотренной в примере *9.7*.

Применяя предлагаемый метод, получим СР вида:

$$f_5 = S^{\text{р}}_{0,1,3,4,6,7,10}(x_1, x_1, x_1\ x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4).$$

Эта реализация существенно проще стандартной, которая при n = 4 имеет восемь вхождений переменной x_1. Однако сравнение этой реализации с приведенными в примерах *9.7* и *9.8* показывает, что расширенные алфавиты, использованные в этих примерах, позволяют построить более простые симметрические реализации.

Найденная реализация повторна, как повторна и БФ для этой БФУ, приведенная в примере *9.7*.

Пример 9.12. Определить повторную симметрическую реализацию для БФУ

$$f_6(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0001\ 0001\ 0001\ 1111\right|^T.$$

Применяя предлагаемый метод, получим симметрическую реализацию вида:

$$f_6 = S^{\text{p}}_{3,\,7,\,8,\,9,\,10,\,11}(x_1, x_1, x_1\ x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4).$$

Эта реализация существенно проще стандартной при n = 4. Она повторна, в то время как формула $f_6 = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$ бесповторна.

9. Влияние повышения повторности симметрических реализаций на увеличение числа БФУ, для которых такие реализации существуют. Покажем для n = 3, как введение каждой новой переменной расширяет класс функций, допускающих симметрические реализации.

Обозначим значение функции $f(x_1, x_2, x_3)$ на входном наборе с номером w (десятичный эквивалент) символом $f(w)$.

Запишем n + 1 = 4 условия, при выполнении которых заданная БФУ является СФ: $f(1) = f(2)$, $f(1) = f(4)$, $f(3) = f(5)$, $f(3) = = f(6)$.

Этим условиям удовлетворяют 16 из 256 БФУ трех переменных, так как в этом случае существуют четыре, не связанные между собой, группы значений функции: $f(0)$, $f(1) = f(2) = f(4)$, $f(3) = = f(5) = f(6)$, $f(7)$.

Для того чтобы симметрической была функция $f(x_1, x_2, x_2, x_3)$ требуется выполнение трех условий: $f(1) = f(4)$, $f(2) = f(5)$, $f(3) = = f(6)$. Этим условиям удовлетворяют 32 БФУ, так как число не связанных между собой групп значений функции в этом случае равно пяти: $f(0)$, $f(1) = f(4)$, $f(2) = f(5)$, $f(3) = f(6)$, $f(7)$.

При этом отметим, что в состав этих функций входят не все функции, которые при их записи в виде $f(x_1, x_2, x_3)$ были симметрическими. Например, функция f_1 не является симметрической при повторении переменной x_2.

Для того чтобы функция $f(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3)$ была симметрической, должны выполняться только два условия: $f(2) = f(4)$, $f(3) = f(5)$. Этим условиям удовлетворяют 64 БФУ, так как в этом случае несвязанными являются шесть групп: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)=f(4)$, $f(3)=f(5)$, $f(6)$, $f(7)$.

Для того чтобы функция $f(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3)$ была симметрической, должно выполняться только одно условие — $f(3)=f(4)$. Этому условию удовлетворяют 128 БФУ.

Для представления заданной БФУ в виде $f(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3)$ условия отсутствуют: так может быть представлена любая из 256 функций трех переменных.

Пример 9.13. Определить условия, при выполнении которых получается симметрическая реализация, приведенная в примере *9.10*.

Из рассмотрения ТИ для функции f_3 следует, что

$$f_3(0)=f_3(1)=f_3(3)=f_3(4)=f_3(5)=0,$$
$$f_3(2)=f_3(6)=f_3(7)=1.$$

Таким образом, для заданной БФУ выполняется только одно из приведенных выше условий — $f_3(3)=f_3(4)$. Это определяет симметрическую реализацию с дополнительно введенными одной переменной x_2 и двумя переменными x_1.

10. Повторные симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$ и переборе вариантов при заполнении полной таблицы. Последовательный характер и направление заполнения полной таблицы в рассмотренном в п. **8** методе не позволяют в общем случае находить наилучшие (в рамках полной таблицы) решения.

Если эти ограничения снять, то такие решения за счет перебора могут быть найдены.

Пример 9.14. Определить простейшую (в рамках полной таблицы) симметрическую реализацию для БФУ

$$f_7(x_1, x_2, x_3)=\left|0000\ \ 0111\right|^T.$$

Повторные СР этой БФУ, построенные без перебора, имеют вид:

$$f_7=S^{\text{р}}_{5,6,7}(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3)=$$
$$=S^{\text{р}}_{4,5,6}(x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3).$$

Проводя перебор в рамках полной таблицы, получим:

$$f_7=S^{\text{р}}_{3,4}(x_1, x_1, x_2, x_3).$$

Все приведенные симметрические реализации повторны, в то время как формула $f_7=x_1(x_2\vee x_3)$ бесповторна.

11. Простейшие повторные симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. Находясь в рамках полной таблицы, для ряда БФУ n переменных минимальные решения не могут быть найдены, так как структура этой таблицы ограничивает объем перебора. Так, например, для функции $f=(x_1 \vee x_2)x_3$ простейшая симметрическая реализация

$$f=S^{\text{р}}_{3,4}(x_1, x_2, x_3, x_3)$$

в рамках полной таблицы не может быть найдена ни при каком объеме перебора, так как в полной таблице переменная x_n не может быть дублирована.

Минимальные реализации в рамках рассматриваемого подхода определяются в результате полного перебора кортежей входных переменных и их дубликатов.

Пример 9.15. Определить симметрическую реализацию для БФУ

$$f_8(x_1, x_2, x_3) = \left|1101\ 0100\right|^T = !x_1(!x_2 \vee x_3) \vee !x_2 x_3.$$

Используя подходы, изложенные в предыдущих пунктах, получим:

$$f_8 = S^{\text{р}}_{0,1,3}(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3) =$$
$$= S^{\text{р}}_{0,3,4}(x_1, x_2, x_3, x_3, x_3).$$

Применяя метод, изложенный в п. **14**, в данном случае можно построить и бесповторную симметрическую реализацию:

$$f_8 = S^{\text{р}}_{2,3}(!x_1, !x_2, x_3).$$

12. Симметрические реализации положительных (безынверсных) пороговых функций при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. Если для заданной БФУ известно, что она является пороговой [23], то ее минимальная повторная симметрическая реализация может быть найдена без перебора.

Естественно, что нахождение пороговых реализаций (представление БФУ через веса́ и порог) даже для положительных пороговых функций (ППФ) весьма трудоемко [23]. Однако при $n \leqslant 6$ существуют каталоги таких реализаций, например в [24], а для положительных бесповторных пороговых формул в разд. 15.5 и в [25] предложен простой метод их построения.

Изложим метод построения СР для рассматриваемого класса функций. Этот метод состоит в следующем:

— для заданной ППФ строится пороговая реализация (ПР):

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{sign}(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n - T),$$

где p_i — вес переменной x_i; T — порог функции;

— определяется значение $P = \sum_{i=1}^{n} p_i$;

— строится СФ «голосование T и более из P» вида:

$$f = S^{\text{р}}_{T, \ldots, P}(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{p_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{p_n}),$$

которая является искомой.

При этом отметим, что из [24] следует, что при $n \geqslant 5$ существуют ППФ, для которых веса́ всех переменных не равны единице, что приводит для этих функций к повторным симметрическим реализациям, отличным от получаемых с помощью методов, изложенных в пунктах **7—10**, при использовании которых переменная x_n не размножается.

Пример 9.16. Определить симметрическую реализацию для положительной бесповторной пороговой формулы f_7, рассмотренной в примере *9.14*.

Из [25] следует, что $f_7 = \text{sign}(2x_1 + x_2 + x_3 - 3)$.

Так как в этом случае $P = 4$, $T = 3$, то симметрическая реализация имеет вид: $S^{\text{р}}_{3,4}(x_1, x_1, x_2, x_3)$. Эта симметрическая реализация была получена в примере *9.14* за счет перебора в рамках полной таблицы.

Так как для функции

$$f^{\text{д}} = !f(!x_1, \ldots, !x_n)$$

справедливо соотношение [23]

$$T^{\text{д}} = P - T + 1,$$

то пороговая реализация функции $f^{\text{д}}$, двойственной (дуальной) заданной функции f, имеет вид [23]:

$$f^{\text{д}}(x_1, \ldots, x_n) = \text{sign}\big(p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n - (P - T + 1)\big).$$

Таким образом,

$$f^{\text{д}} = S^{\text{р}}_{P-T+1, \ldots, P}(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{p_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{p_n}).$$

Пример 9.17. Определить симметрическую реализацию для формулы $f = x_1 \vee x_2 x_3$.

Так как $f = f_7^{\text{д}}$, то из предыдущего примера следует, что $P - T + 1 = 2$, и поэтому

$$f = S^{\text{р}}_{2,3,4}(x_1, x_1, x_2, x_3).$$

Если функция является самодвойственной ($f = f^{д}$), то для нее справедливо соотношение $T = (P + 1) / 2$.

Пример 9.18. Определить симметрическую реализацию для самодвойственной БФУ

$$f = x_1 (x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Из каталога [24] следует, что $f = \text{sign}\,(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3)$.

При этом $p_1 = 2,\ \ p_2 = p_3 = p_4 = 1,\ \ P = 5,\ \ T = 3$ и

$$f = S^{\text{р}}_{3,\,4,\,5}(x_1, x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Эта функция реализуется модулем СМ5 с 11 входами, в то время как модуль, универсальный в классе самодвойственных функций четырех переменных, имеет 12 входов [26].

13. Симметрические реализации отрицательных пороговых функций при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. Из изложенного в п. **2** следует, что для отрицательных пороговых функций может быть предложен указанный ниже метод построения симметрических реализаций:

— определяется пороговая реализация для положительной пороговой функции, инверсной заданной;

— искомой является реализация вида:

$$f = S^{\text{р}}_{0,\,\dots\,,\,T-1}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{p_1}, \dots, \underbrace{x_n, \dots, x_n}_{p_n}).$$

Пример 9.19. Определить симметрическую реализацию для булевой формулы $f = !x_1 \vee !x_2 !x_3$.

Так как $f = !f_7$, то из изложенного выше и примера *9.16* следует, что

$$f = S^{\text{р}}_{0,\,1,\,2}(x_1, x_1, x_2, x_3).$$

14. Симметрические реализации пороговых функций при использовании алфавитов $A_3^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$. Произвольная пороговая функция (ПФ) может быть реализована следующим образом:

— для заданной ПФ строится БФ;

— строится симметрическая реализация для положительной ПФ, однотипной с заданной;

— инверсные переменные, входящие в БФ, заменяют в построенной симметрической реализации безынверсные переменные.

Пример 9.20. Определить симметрическую реализацию для булевой формулы $f = !x_1 (x_2 \vee !x_3)$.

Из изложенного выше и примера *9.16* следует, что

$$f = S^{\text{р}}_{3,\,4}(!x_1, !x_1, x_2, !x_3).$$

Таким образом, из изложенного выше (начиная с п. **12**) следует, что при реализации ПФ симметрическим модулем его число входов определяется соотношением

$$V_2(P) = 2P + 1. \tag{9.1}$$

Е. Гото [23] показал, что среди пороговых функций n переменных существует такая функция, для которой

$$C \cdot 2^{n+2} \leqslant P,$$

где $C = 0.1163171...$

Следовательно,

$$C \cdot 2^{n+3} \leqslant V_2(n).$$

В табл. 9.8 для $n = 2, \dots, 6$ на основе [24] приведены максимальные значения P для класса ПФ и двух его подклассов — самодвойственных ПФ (СПФ) и бесповторных ПФ (БПФ).

Т а б л и ц а 9.8

Класс функций	n				
	2	3	4	5	6
СПФ	—	3	5	9	17
БПФ	2	4	7	12	20
ПФ	2	4	8	16	33

В [27] было показано, что максимальные значения P для БПФ удовлетворяют соотношению

$$P = F_{n+2} - 1, \tag{9.2}$$

где F_{n+2} — (n + 2)-е число Фибоначчи; $F_1 = F_2 = 1$.

Из соотношений 9.1 и 9.2, в частности, следует, что самая сложная БПФ при $n = 4$ может быть реализована модулем СМ7, так как $F_6 = 8$, в то время как непороговая бесповторная БФ (ББФ), рассмотренная в примере *9.12*, реализуется модулем СМ11, что свидетельствует о том, что непороговые ББФ реализуются СМ весьма сложно.

15. Стандартные повторные симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_4^{\text{в}}$, $A_3^{\text{н}}$. В [19] показано, что в этом случае модуль СМn универсален в классе произвольных БФУ $m + 1$ переменных, где $m = [\log (n + 1)]$. При этом настройка модуля определяется достаточно сложно.

Предложим стандартную симметрическую реализацию, для которой настройка модуля может быть найдена сравнительно просто. При этом для заданной БФУ n переменных будем искать настройку модуля СМ$(2^{n-1} - 1)$.

Метод состоит в следующем. В ТИ заданной БФУ исключается столбец, соответствующий переменной x_n, а столбец ее значений преобразуется с помощью правил:

$$|00|^T = 0;\ |01|^T = x_n;\ |10|^T = !x_n;\ |11|^T = 1.$$

Полученную ТИ будем называть сокращенной. По такой таблице строится полная таблица, рассмотренная в п. **7**, по которой и определяется настройка модуля.

Пример 9.21. Определить симметрическую реализацию для функции f_5 из примера *9.7*.

Сокращенная ТИ может быть записана в виде:

$$f_5(x_1, x_2, x_3) = \left| 1, x_4, !x_4, 1, !x_4, 1, 0, !x_4 \right|^T.$$

Поэтому

$$f_5 = S_{1,x_4,!x_4,1,!x_4,1,0,!x_4}(x_1, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2, x_3).$$

16. Повторные симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_4^{\text{в}}$, $A_3^{\text{н}}$. Для поиска более простых сокращенной ТИ заданной БФУ по сравнению с предыдущим случаем симметрических реализаций предлагается применять метод, изложенный в п. **8.**

Пример 9.22. Определить симметрическую реализацию для функции f_5, приведенной в предыдущем примере.

Из рассмотрения табл. 9.4—9.6 следует, что симметрическая реализация строится на третьем шаге (табл. 9.6). При этом

$$f_5 = S_{1,x_4,!x_4,1,0,!x_4}(x_1, x_1, x_2, x_2, x_3).$$

Увеличение объема перебора, как и для случая $A_1^{\text{в}}$, $A_1^{\text{н}}$ (пункты **10**, **11**), позволяет для ряда БФУ находить симметрические реализации с меньшей повторностью переменных, чем это обеспечивает метод, изложенный в настоящем пункте.

17. Симметрические реализации БФУ при использовании алфавитов $A_5^{\text{в}}$, $A_4^{\text{н}}$. Стандартная схема СС1, в которой применяется постоянное запоминающее устройство (ПЗУ), приведена на рис. 9.12.

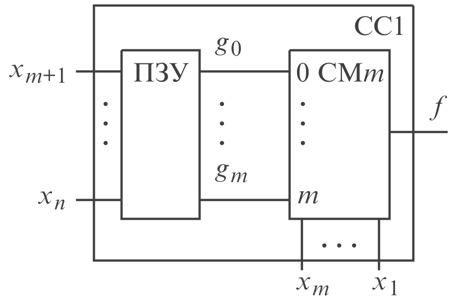

Рис. 9.12

Эта схема позволяет реализовать БФУ n переменных, для которых в таблице настройки модуля СМm каждому рабочему числу i соответствует одна функция $g_0(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Пример 9.23. Определить симметрическую реализацию для функции f_5 из примера *9.7*.

Построим для этой функции таблицу настройки при m = 2 (табл. 9.9).

Таблица 9.9

i	x_1	x_2	g_i^5
0	0	0	$!x_3 \vee x_4$
1	0 1	1 0	$x_3 \vee !x_4$
2	1	1	$x_3!x_4$

Из рассмотрения этой таблицы следует, что

$$f_5 = S^{\text{к}}_{!x_3 \vee x_4,\, x_3 \vee !x_4,\, x_3!x_4}(x_1, x_2).$$

18. Симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_1^{\text{в}}$, $A_5^{\text{н}}$. Стандартная схема СС2 приведена на рис. 9.13. В этой схеме комбинационная схема (КСх) является более простой, чем постоянное запоминающее устройство (ПЗУ). Это ограничение является важным, так как в ПЗУ (n, 1) может быть реализована произвольная БФУ n переменных, что делает применение рассматриваемой стандартной схемы при использовании ПЗУ нецелесообразным.

Схема СС2 позволяет реализовать БФУ n переменных, для которых в таблице настройки модуля СМn каждому рабочему числу i

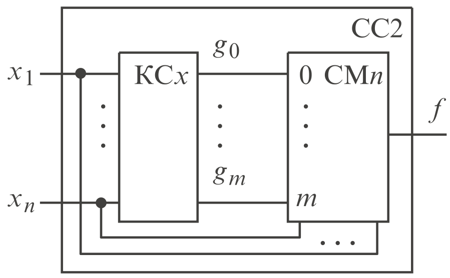

Рис. 9.13

соответствует одна функция $g_i(x_1, \ldots, x_n)$. Так как это имеет место для любой функции n переменных, то рассматриваемая схема универсальна в классе БФУ n переменных.

В таблице настройки функция g_i задана на C_n^i наборах. Булева формула, реализующая эту функцию, строится в результате ее доопределения, например с помощью карт Карно. Возможны два исхода доопределений: каждая функция g_i зависит менее чем от n переменных; одна или несколько функций g_i зависят от n переменных.

При первом исходе применение схемы СС2 целесообразно, а при втором, если $g_i(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, — бессмысленно.

Если $g_i(x_1, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_n)$, то вопрос о применении схемы может обсуждаться.

Пример 9.24. Определить симметрическую реализацию для БФУ

$$f_9(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1011\ 1011\ 0011\ 0010 \right|^T.$$

Настройка модуля СМ4 на реализацию этой функции приведена в столбце g_i^9 (табл. 9.2). При этом

$$f_9 = S^{\text{к}}_{1,\, x_2 \oplus x_3,\, x_3,\, x_3,\, 0}(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Пример 9.25. Определить симметрическую реализацию для БФУ

$$f_6(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0001\ 0001\ 0001\ 1111 \right|^T.$$

Настройка модуля СМ4 на реализацию этой функции приведена в столбце g_i^6 (табл. 9.2). В этом случае $g_0^6 = g_1^6 = 0, g_2^6 = \{x_1 x_2 \vee \vee x_3 x_4,\ !x_1!x_2 \vee !x_3!x_4\}$, $g_3^6 = g_4^6 = 1$.

Так как $f = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$, то при $g_2^6 = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$ использование схемы СС2 бессмысленно. При $g_2^6 = !x_1 !x_2 \vee !x_3 !x_4$ заданная БФУ весьма экзотично реализуется по функции, ей антидвойственной (разд. 10.5) и [26].

19. Симметрические реализации БФУ при использовании алфавитов $A_6^{\text{в}}$, $A_6^{\text{н}}$. Стандартная схема СС3 приведена на рис. 9.14.

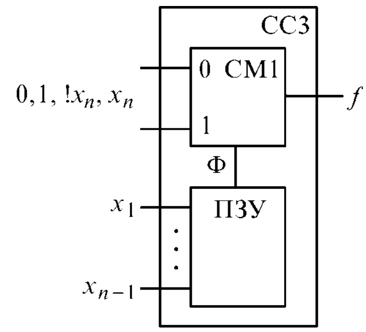

Рис. 9.14

Она позволяет реализовать БФУ n переменных, в каждой из которых столбец значений содержит два типа фрагментов длиной два. Отметим, что для случая $|00|^T = 0$ и $|11|^T = 1$ рассматриваемую схему применять нецелесообразно, так как заданная БФУ не зависит от переменной x_n. В этой схеме ПЗУ программируется (выбирается функция Ф) таким образом, чтобы обеспечить порядок расположения фрагментов в соответствии со столбцом значений реализуемой БФУ. Для каждой БФУ этого класса решение неоднозначно, так как используемые два символа из множества $\{0,\ 1,\ !x_n,\ x_n\}$ могут подключаться к настроечным входам модуля СМ1 двумя способами.

Функцию Ф предлагается определять с помощью мультиплексорного метода.

Пример 9.26. Определить симметрическую реализацию для БФУ

$$f_{10}(x_1, x_2, x_3) = \left|0101\ 1001\right|^T.$$

Столбец значений этой функции состоит из двух типов фрагментов длиной два. Назначим функции g_i следующим образом: $g_0 = x_3$, $g_1 = !x_3$.

Запишем уравнение

$$f = S^{\text{к}}_{x_3, !x_3}(\Phi),$$

которое в мультиплексорной форме имеет вид:

$$\mathrm{MX}(x_3, x_3, !x_3, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(x_3, !x_3; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 ! x_2.$$

Таким образом,

$$f = S^{\text{к}}_{x_3, !x_3}(x_1 ! x_2).$$

Аналогично может быть получено второе соотношение

$$f = S^{\text{к}}_{!x_3, x_3}(!x_1 \vee x_2).$$

Рассмотренный подход является первым частным случаем «симметрического разложения БФУ по переменной x_n» (п. **21**). Для функций рассматриваемого класса это разложение порождает одну остаточную функцию меньшего числа переменных.

Так как модуль СМ1 совпадает с мультиплексором «2 в 1», то для рассматриваемого класса функций симметрическое разложение по переменной x_n совпадает с разложением Шеннона [28] по функции Ф.

20. Симметрические реализации БФУ при использовании алфавитов $A^{\text{в}}_7$, $A^{\text{н}}_6$. Стандартная схема СС4 приведена на рис. 9.15. Она позволяет реализовать БФУ n переменных, в каждой из которых столбец значений содержит три типа фрагментов длиной два. Функции Φ_1 и Φ_2 в этой схеме определяются с помощью мультиплексорного метода.

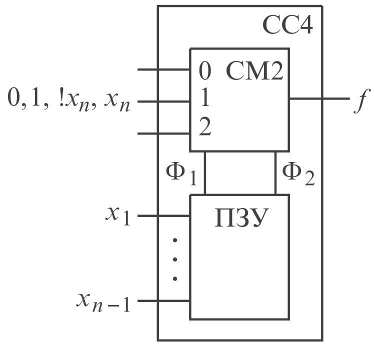

Рис. 9.15

Пример 9.27. Определить симметрическую реализацию для функции f_3 из примера *9.5*.

Столбец значений этой функции содержит три типа фрагментов длиной два. Назначим функции g_i следующим образом: $g_0 = 0$, $g_1 = !x_3$, $g_2 = 1$.

Запишем уравнение

$$f_3 = S^{\text{к}}_{0,!x_3,1}(\Phi_1, \Phi_2),$$

которое в мультиплексорной форме имеет вид:

$$\text{MX}(0,!x_3,0,1;x_1,x_2) = \text{MX}(0,!x_3,!x_3,1;\Phi_1,\Phi_2).$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,0,0,1;x_1,x_2) = x_1 x_2,$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0,1,0,1;x_1,x_2) = x_2;$$

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,1,0,1;x_1,x_2) = x_2,$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0,0,0,1;x_1,x_2) = x_1 x_2.$$

Таким образом,

$$f = S^{\text{к}}_{0,!x_3,1}(x_1 x_2, x_2) = S^{\text{к}}_{0,!x_3,1}(x_2, x_1 x_2).$$

Из сравнения этих симметрических реализаций с полученной в примере *9.4* следует, что усложнение функций, подаваемых на информационные входы модуля, позволило реализацию упростить.

Рассмотренный подход является вторым частным случаем «симметрического разложения БФУ по переменной x_n».

21. Симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A^{\text{в}}_8$, $A^{\text{н}}_6$. Стандартная схема СС5 приведена на рис. 9.16.

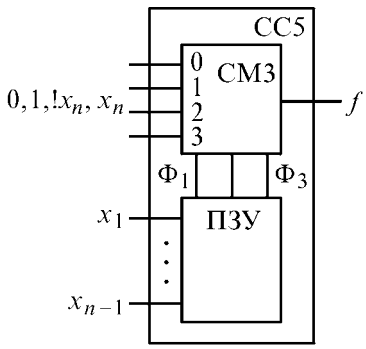

Рис. 9.16

Она позволяет реализовать БФУ *n* переменных, в каждой из которых столбец значений содержит до четырех типов фрагментов длиной два. Так как это имеет место для любой БФУ *n* переменных, то рассматриваемая структура универсальна в классе произвольных БФУ указанного числа переменных. Функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 в этой схеме определяются с помощью мультиплексорного метода.

Пример 9.28. Определить симметрическую реализацию для БФУ

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1000\ \ 0111\ \ 1000\ \ 1000 \right|^T.$$

Столбец значений этой функции содержит четыре типа фрагментов длиной два. Назначим функции g_i следующим образом: $g_0 = {!x_4}$, $g_1 = 0$, $g_2 = x_4$, $g_3 = 1$.

Запишем уравнение

$$f_4 = S^{\text{к}}_{!x_4,\,0,\,x_4,\,1}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3),$$

которое в мультиплексорной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} &\mathrm{MX}(!x_4, 0, x_4, 1, !x_4, 0, !x_4, 0; x_1, x_2, x_3) = \\ &= \mathrm{MX}(!x_4, 0, 0, x_4, 0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3). \end{aligned}$$

Это уравнение имеет $3^3 \cdot 3 = 81$ решение:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \mathrm{MX}(0, ?, ?, 1, 0, ?, 0, ?; x_1, x_2, x_3); \\ \Phi_2 &= \mathrm{MX}(0, ?, ?, 1, 0, ?, 0, ?; x_1, x_2, x_3); \\ \Phi_3 &= \mathrm{MX}(0, ?, ?, 1, 0, ?, 0, ?; x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Среди этих решений выберем следующее:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3; \\ \Phi_2 &= \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = {!x_1}(x_2 \vee x_3); \\ \Phi_3 &= \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = {!x_1} x_2 \vee x_1 {!x_2} x_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_4 = S^{\text{к}}_{!x_4,\,0,\,x_4,\,1}\left(x_2 x_3, {!x_1}(x_2 \vee x_3), {!x_1} x_2 \vee x_1 {!x_2} x_3 \right).$$

Из сравнения этой симметрической реализации с полученной в примере *9.4* следует, что усложнение функций, подаваемых на информационные входы модуля, позволило упростить реализацию.

Рассмотренный подход может рассматриваться в качестве метода построения нового типа разложения произвольных булевых функций по одной переменной. Оно может быть названо «симметрическим разложением произвольной БФУ n переменных по переменной x_n». В результате этого разложения в общем случае формируются три остаточные функции меньшего числа переменных. С учетом частных случаев, рассмотренных в двух предыдущих пунктах, можно утверждать, что предлагаемое разложение порождает не более трех остаточных функций, в то время как разложение Шеннона по одной переменной — не более двух.

22. Симметрические реализации произвольных БФУ при использовании алфавитов $A_8^{в}$, $A_9^{н}$. Стандартная схема СС6 приведена на рис. 9.17. Она позволяет реализовать БФУ n переменных, в каждой из которых столбец значений содержит R разнотипных фрагментов длиной 2^{n-m}. При этом ПЗУ1 реализует эти фрагменты, а ПЗУ2 обеспечивает порядок их расположения в соответствии с ТИ реализуемой БФУ. Функции Φ_1, … , Φ_{R-1} в этой схеме определяются с помощью мультиплексорного метода.

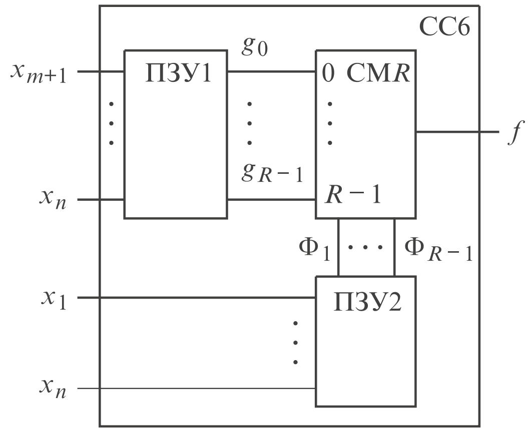

Рис. 9.17

Пример 9.29. Определить симметрическую реализацию для функции f_4, рассмотренной в предыдущем примере.

При m = 2 столбец значений этой функции содержит два типа фрагментов длиной четыре. Назначим функции g_i следующим образом: $g_0 = !x_3!x_4$, $g_1 = x_3 \vee x_4$.

Запишем уравнение

$$f_4 = S^{к}_{g_0, g_1}(\Phi),$$

которое в мультиплексорной форме имеет вид:

$$\mathrm{MX}(g_0, g_1, g_0, g_0; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(g_0, g_1; \Phi).$$

Это уравнение имеет одно решение:

$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2.$$

Таким образом,

$$f_4 = S^{\text{к}}_{!x_3!x_4,\, x_3 \vee x_4}\,(!x_1 x_2).$$

Из сравнения найденной симметрической реализации с полученной в предыдущем примере следует, что усложнение функций, подаваемых на настроечные входы модуля, позволило резко упростить реализацию: использовать модуль СМ1 вместо модуля СМ3.

Пример 9.30. Определить симметрическую реализацию для функции f_9, рассмотренной в примере *9.24*.

При m = 2 столбец значений этой функции содержит три типа фрагментов длиной четыре. Назначим функции g_i следующим образом: $g_0 = x_3 \vee !x_4,\, g_1 = x_3,\, g_2 = x_3 !x_4$.

Запишем уравнение

$$f_9 = S^{\text{к}}_{g_0,\, g_1,\, g_2}\,(\Phi_1, \Phi_2),$$

которое в мультиплексорной форме имеет вид:

$$\text{MX}(g_0, g_0, g_1, g_2; x_1, x_2) = \text{MX}(g_0, g_1, g_1, g_2; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет два решения, из которых выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1.$$

Таким образом,

$$f_9 = S^{\text{к}}_{x_3 \vee !x_4,\, x_3,\, x_3!x_4}\,(x_1 x_2, x_1).$$

Изложенный подход может рассматриваться в качестве метода построения нового типа функциональной декомпозиции произвольных булевых функций. Эта декомпозиция, используя термины, применяемые при функциональной декомпозиции [28], может быть названа (R – 1)-кратной разделительной симметрической декомпозицией.

9.5. Исследование функциональных возможностей симметрических модулей

Рассмотренные в предыдущем разделе методы применимы для модулей СМn при любых n.

При каждом значении n может быть выполнено исследование функциональных возможностей модулей на основе подхода, изложенного в гл. 3, что позволяет получить решения, в том числе и отличные от решений, которые строятся рассмотренными выше методами.

Так как порождающая функция симметрического модуля не является симметрической функцией от числа переменных, равного числу входов модуля, то полное исследование его функциональных возможностей является весьма трудоемким уже при $n = 2$. Поэтому для рассматриваемого в качестве примера модуля СМ2 выполним частичное исследование его функциональных возможностей.

Порождающая функция этого модуля имеет вид:

$$F(a, b, c, d, e) = S^{\text{к}}_{c,d,e}(a, b) = !a!bc \vee (a \oplus b)d \vee abe =$$

$$= \left| 0000\ 1111\ 0011\ 0011\ 0011\ 0011\ 0101\ 0101 \right|^{T}.$$

Выполним следующие замены переменных: $\Phi_1 = a$, $\Phi_2 = b$, $\Phi_3 = c, \Phi_4 = d, \Phi_5 = e.$

При $n - k = 0$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_3,\Phi_4,\Phi_5}(\Phi_1, \Phi_2) =$$

$$= !\Phi_1!\Phi_2\Phi_3 \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2)\Phi_4 \vee \Phi_1\Phi_2\Phi_5 =$$

$$= \text{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1,$$

$$0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

При $n - k = 1$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_3,\Phi_4,x_n}(\Phi_1, \Phi_2) =$$

$$= !\Phi_1!\Phi_2\Phi_3 \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2)\Phi_4 \vee \Phi_1\Phi_2 x_n =$$

$$= \text{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, x_n, x_n, x_n, x_n;$$

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Рассмотренное соотношение является симметрическим разложением БФУ по одной крайней правой входной переменной при выбранном образе декомпозиции.

При $n - k = 2$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_3,x_{n-1},x_n}(\Phi_1, \Phi_2) =$$

$$= !\Phi_1!\Phi_2\Phi_3 \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2)x_{n-1} \vee \Phi_1\Phi_2 x_n =$$

$$= \text{MX}(0, 1, x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}, x_n, x_n; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Рассмотренное соотношение является симметрическим разложением БФУ по двум крайним правым входным переменным при выбранном образе декомпозиции.

При $n - k = 3$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{x_{n-2},\, x_{n-1},\, x_n}(\Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= !\Phi_1 !\Phi_2 x_{n-2} \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2) x_{n-1} \vee \Phi_1 \Phi_2 x_n =$$
$$= \text{MX}(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1}, x_n; \Phi_1, \Phi_2).$$

Рассмотренное соотношение является симметрическим разложением БФУ по трем крайним правым входным переменным при выбранном образе декомпозиции.

При $n - k = 4$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{x_{n-2},\, x_{n-1},\, x_n}(\Phi_1, x_{n-3}) =$$
$$= !\Phi ! x_{n-3} x_{n-2} \vee (\Phi \oplus x_{n-3}) x_{n-1} \vee \Phi_1 x_{n-3} x_n =$$
$$= \text{MX}(! x_{n-3} x_{n-2} \vee x_{n-3} x_{n-1}, ! x_{n-3} x_{n-1} \vee x_{n-3} x_n; \Phi).$$

Рассмотренное соотношение является симметрическим разложением БФУ по четырем крайним правым входным переменным при выбранном образе декомпозиции.

Из изложенного, в частности, следует, что при $n - k = 1$ модуль СМ2 позволяет проводить разложение по переменной $\widetilde{x}_n$ функций, столбцы значений которых содержат не более трех типов фрагментов длиной два: $\{0, 1, \widetilde{x}_n\}$.

Пример 9.31. Построить симметрическую реализацию для мажоритарной функции f_1 из примера *9.1*.

Максимальное значение $n - k$, при котором фрагменты БФУ и одного из образов декомпозиции совпадают, равно единице. Поэтому запишем уравнение

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = S^{\text{к}}_{\Phi_3,\, \Phi_4,\, x_3}(\Phi_1, \Phi_2);$$
$$x_1 \# x_2 \# x_3 = !\Phi_1 !\Phi_2 \Phi_3 \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2) \Phi_4 \vee \Phi_1 \Phi_2 x_3;$$
$$\text{MX}(0, x_3, x_3, 1; x_1 x_2) =$$
$$= \text{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, x_3, x_3, x_3, x_3;$$
$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это уравнение имеет $6 \cdot 4^2 \cdot 6 = 576$ решений, среди которых выберем, например, следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 1, 1, 0; x_1, x_2) = !x_1 \vee !x_2;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$
$$\Phi_4 = \text{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

Таким образом,

$$f_1 = S^{\text{к}}_{x_2,\, x_2,\, x_3}(x_1 \vee x_2, !x_1 \vee !x_2).$$

Отметим, что полученная декомпозиция в отличие от предыдущих является неразделительной.

Покажем, что если изменить порядок переменных в ТИ порождающей функции (*a, b, c, d, e* → *a, b, c, e, d*), то найденная СР может быть упрощена. При этом $F(a, b, c, e, d) = |0000\ 1111\ 0101\ 0101\ 0101\ 0101\ 0011\ 0011|^T$.

Выполним следующие замены переменных: $\Phi_1 = a, \Phi_2 = b, \Phi_3 = c, \Phi_4 = e, \Phi_5 = d$.

При $n - k = 0$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_3,\, \Phi_5,\, \Phi_4}(\Phi_1, \Phi_2) =$$

$$= !\Phi_1 !\Phi_2 \Phi_3 \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2)\Phi_5 \vee \Phi_1 \Phi_2 \Phi_4 =$$

$$= \text{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1,$$

$$0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

При $n - k = 1$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_3,\, x_n,\, \Phi_4}(\Phi_1, \Phi_2) =$$

$$= !\Phi_1 !\Phi_2 \Phi_3 \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2) x_n \vee \Phi_1 \Phi_2 \Phi_4 =$$

$$= \text{MX}(0, 0, 1, 1, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n, 0, 1, 0, 1;$$

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Пример 9.32. Построить симметрическую реализацию для мажоритарной функции f_1 из примера *9.1*.

Максимальное значение *n – k*, при котором фрагменты БФУ и одного из образов декомпозиции совпадают, равно единице. Поэтому запишем уравнение

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = S^{\text{к}}_{\Phi_3,\, x_3,\, \Phi_4}(\Phi_1, \Phi_2);$$

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = !\Phi_1 !\Phi_2 \Phi_3 \vee (\Phi_1 \oplus \Phi_2) x_3 \vee \Phi_1 \Phi_2 \Phi_4;$$

$$\text{MX}(0, x_3, x_3, 1; x_1, x_2) =$$

$$= \text{MX}(0, 0, 1, 1, x_3, x_3, x_3, x_3, \ x_3, x_3, x_3, x_3, \ 0, 1, 0, 1;$$

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это уравнение имеет $4 \cdot 8^2 \cdot 4 = 1024$ решения, среди которых выберем, например, следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$

$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$

$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 0, 0, 0; x_1, x_2) = 0;$$

$$\Phi_4 = \text{MX}(1, 1, 1, 1; x_1, x_2) = 1.$$

Таким образом,

$$f_1 = S^{\text{к}}_{0,\,x_3,\,1}(x_1, x_2).$$

Это решение может быть получено и существенно проще, если учесть, что мультиплексор «4 в 1» при объединении его средних 2^n-входов является модулем СМ2.

Рассмотренная перестановка переменных не позволяет расширить класс функций, которые могут быть разложены по переменной $\widetilde{x}_n$, по сравнению с исходным порядком расположения входных переменных в ТИ.

Рассмотрим следующую перестановку переменных:

$$a, b, c, d, e \to c, d, e, a, b.$$

При этом $F(c, d, e, a, b) = |0000\ 0001\ 0110\ 0111\ 1000\ 1001\ 1110\ 1111|^T$.

Выполним следующие замены переменных: $\Phi_1 = c$, $\Phi_2 = d$, $\Phi_3 = e$, $\Phi_4 = a$, $\Phi_5 = b$.

При $n - k = 0$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3}(\Phi_4, \Phi_5) =$$
$$= \Phi_1 !\Phi_4 !\Phi_5 \vee \Phi_2(\Phi_4 \oplus \Phi_5) \vee \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5 =$$
$$= \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1,$$
$$1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

При $n - k = 1$ справедливо соотношение

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3}(\Phi_4, x_n) =$$
$$= \Phi_1 !\Phi_4 !x_n \vee \Phi_2(\Phi_4 \oplus x_n) \vee \Phi_3 \Phi_4 x_n =$$
$$= \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_n, x_n, !x_n, x_n, 1, !x_n, 0, !x_n, x_n,$$
$$1, !x_n, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это соотношение может применяться для определения симметрической реализации произвольной БФУ по переменной x_n.

Пример 9.33. Определить симметрическую реализацию для БФУ $f_4 = !x_1 x_2 \oplus !x_3 !x_4$, рассмотренной в примере *9.28*.

Запишем уравнение

$$!x_1 x_2 \oplus !x_3 !x_4 = S^{\text{к}}_{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3}(\Phi_4, x_4);$$
$$!x_1 x_2 \oplus !x_3 !x_4 = \Phi_1 !\Phi_4 !x_4 \vee \Phi_2(\Phi_4 \oplus x_4) \vee \Phi_3 \Phi_4 x_4;$$
$$\mathrm{MX}(!x_4, 0, x_4, 1, !x_4, 0, !x_4, 0; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_4, x_4, !x_4, x_4, 1, !x_4, 0, !x_4, x_4,$$
$$1, !x_4, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это уравнение имеет $4^3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 65\,536$ решений, среди которых выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_2!x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_3)x_2;$$
$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_1 x_2;$$
$$\Phi_4 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_2.$$

Таким образом,

$$f_4 = S^{\text{к}}_{!x_2!x_3,\ (x_1 \oplus x_3)x_2,\ !x_1x_2}(x_2, x_4).$$

Рассмотрим случай $n - k = 2$ при выбранном порядке переменных:

$$F = S^{\text{к}}_{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3}(x_{n-1}, x_n) =$$
$$= \Phi_1 !x_{n-1}!x_n \vee \Phi_2(x_{n-1} \oplus x_n) \vee \Phi_3 x_{n-1} x_n =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_{n-1}x_n, x_{n-1} \oplus x_n, x_{n-1} \vee x_n, !x_{n-1}!x_n, !(x_{n-1} \oplus x_n),$$
$$!x_{n-1} \vee !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Пример 9.34. Определить симметрическую реализацию для БФУ, рассмотренной в предыдущем примере.

Составим уравнение

$$!x_1 x_2 \oplus !x_3!x_4 = S^{\text{к}}_{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3}(x_3, x_4);$$
$$!x_1 x_2 \oplus !x_3!x_4 = \Phi_1 !x_3!x_4 \vee \Phi_2(x_3 \oplus x_4) \vee \Phi_3 x_3 x_4;$$
$$\mathrm{MX}(!x_3!x_4, x_3 \vee x_4, !x_3!x_4, !x_3!x_4; x_1, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_3x_4, x_3 \oplus x_4, x_3 \vee x_4, !x_3!x_4, !(x_3 \oplus x_4),$$
$$!x_3 \vee !x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2;$$
$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2.$$

Таким образом,

$$f_4 = S^{\text{к}}_{x_1 \vee !x_2,\ !x_1x_2,\ !x_1x_2}(x_3, x_4).$$

Полученное решение входит в состав множества решений при $n - k = 1$.

Следовательно, функция f_4 реализована на модулях СМ4 (пример *9.6*), СМ3 (пример *9.28*), СМ2 (пример *9.34*) и СМ1 (пример *9.29*) при использовании различных информационных и настроечных алфавитов и различных методов реализации.

9.6. Реализация булевых функций схемами из симметрических модулей

В тех случаях, когда БФУ не может быть реализована одним симметрическим модулем с фиксированным числом информационных входов, возникает традиционная для логического проектирования [30] задача — реализовать произвольную БФУ n переменных схемой из модулей СМk, где $k < n$.

Предлагаемый метод синтеза основан на возможности многократного применения изложенных в настоящей главе симметрического разложения по переменной и/или симметрической декомпозиции до тех пор, пока остаточные функции не будут зависеть от двух и менее переменных (при наличии констант и входных переменных) или от трех и менее переменных (при наличии констант, входных переменных и их инверсий).

При этом в силу универсальности модулей СМk в классе произвольных функций k переменных ($k \leqslant 3$) каждая из остаточных функций может быть реализована одним модулем.

Пример 9.35. Реализовать функцию f_4, рассмотренную в примере *9.6*, схемой из модулей СМ при $k \leqslant 3$ при наличии констант, входных переменных и их инверсий.

1. Используя результаты примера *9.28*, построим схему из модулей СМ3. Для этого построим таблицу настройки модулей, реализующих остаточные функции (табл. 9.10).

Т а б л и ц а 9.10

i	x_1	x_2	x_3	Φ_1	g_i^1	Φ_2	g_i^2	Φ_3	g_i^3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0 0 1	0 1 0	1 0 0	0 0 0	0	1 1 0	$!x_1$	0 1 0	x_2
2	0 1 1	1 0 1	1 1 0	1 0 0	$!x_1$	1 0 0	$!x_1$	1 1 0	x_3
3	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Искомая схема приведена на рис. 9.18.

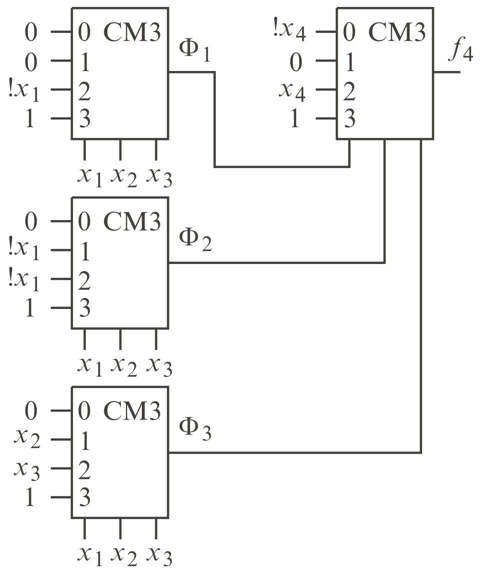

Рис. 9.18

2. Применяя результаты примера *9.34*, построим схему рис. 9.19.

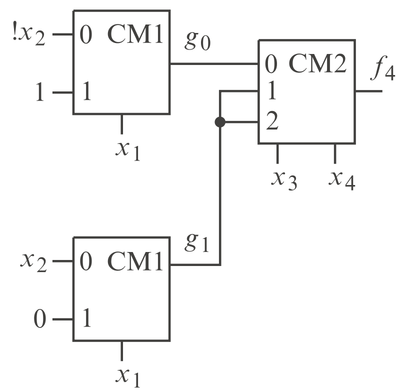

Рис. 9.19

Другая схема той же сложности может быть построена, если учесть, что $g_0 = !g_1$.

3. Используя результаты примера *9.29*, построим схему (рис. 9.20).

Другая схема той же сложности может быть построена, если учесть, что $g_0 = !g_1$.

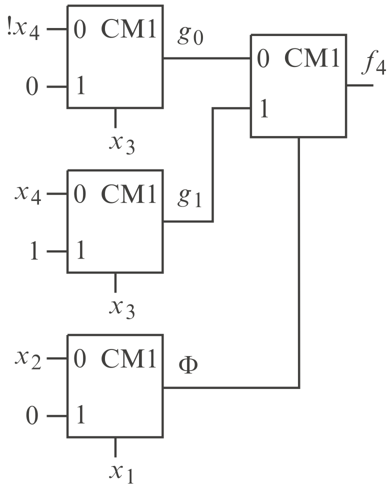

Рис. 9.20

Выводы

1. Рассмотрены два типа симметрических модулей (СМ), первый из которых известен и построен на основе принципа локального кодирования, а второй — на основе симметрического многополюсника Шеннона.

2. Предложены методы реализации симметрических функций в базисе СМ, более простые, чем известный метод.

3. Понятие «симметрическая реализация» распространяется на реализацию несимметрических функций, в том числе пороговых и произвольных. При этом в общем случае симметрические реализации могут быть построены, применяя либо рабочие числа, либо код настройки, причем код настройки является более универсальной характеристикой реализации. Форма описания симметрических реализаций булевых функций с помощью кода настройки является новой.

4. Для произвольной БФУ n переменных предложены конструктивные методы представления ее симметрической функцией, зависящей не более чем от $2^n - 1$ переменных, что несколько уточняет формулировку теоремы, приведенной в [9].

5. Показано, что повторные БФ могут иметь бесповторные симметрические реализации, а бесповторные БФ — повторные симметрические реализации, причем одна и та же БФ (БФУ) может иметь несколько симметрических реализаций, как повторных, так и бесповторных.

6. Введены понятия «симметрическое разложение БФУ по крайним правым входным переменным» и «многократная разделитель-

ная симметрическая декомпозиция БФУ». Предложены методы построения этих разложений и декомпозиций.

7. Предложены методы синтеза комбинационных схем в базисе симметрических модулей.

Литература

1. *Гаврилов М. А.* Определение числа контактов в схемах релейно-контактных дешифраторов и их распределение по реле // Изв. АН СССР. Отделение техн. наук. 1945. № 12.

2. *Поваров Г. Н.* К изучению контактных схем упорядоченного типа // Проблемы передачи информации. 1959. Вып. 4.

3. *Сагалович Ю. Л.* Мера упорядоченности булевых функций // Проблемы передачи информации. 1961. Вып. 8.

4. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. литер., 1963.

5. *Колдуэлл С.* Логический синтез релейных устройств. М.: Изд-во иностр. литер., 1962.

6. *Поваров Г. Н.* К изучению симметрических булевых функций с точки зрения теории релейно-контактных схем // Докл. АН СССР. 1955. № 2.

7. *Epstein G.* Synthesis of electronic circuits for symmetric functions // IRE Trans. Electronic Computers. 1958. N 3.

8. *Поваров Г. Н.* Математико-логическое исследование синтеза контактных схем с одним входом и *k* выходами // Логические исследования. М.: Наука, 1959.

9. *Kautz W. H.* The realization of symmetric switching functions with linear-input logical elements // IRE Trans. Electronic Computers. 1961. N 10.

10. *Миллер Р.* Теория переключательных схем. Т.1. М.: Наука, 1970.

11. *Borr R. C., Scidmore A.* Tranformation of switching functions to completely symmetric switching function // IEEE Trans. on Computers. 1968. № 6.

12. *Das S., Sheng C.* On detection total or partial symmetry of switching functions // IEEE Trans. on Computers. 1971. N 3.

13. *Yau S., Tang J.* Transformation of an arbitrary switching function to a totally symmetric function // IEEE Trans. on Computers. 1971. № 12.

14. *Dalberg B.* On symmetric functions with redundant variables wighed functions // IEEE Trans. on Computers. 1973. N 5.

15. *Lee D., Hong S.* An algorithm for transformation of an arbitrary switching function to a completely symmetric function // IEEE Trans. on Computers. 1976. N 11.

16. *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. 1965. № 14.

17. *Дулепов Е. Г.* Базовый симметрический многополюсник. А. с. СССР № 264777 // Бюл. изобр. 1970. № 9.

18. *Дулепов Е. Г.* Многофункциональные симметрические схемы // Автоматика и телемеханика. 1970. № 5.

19. *Дулепов Е. Г.* Функциональные возможности универсальных симметрических логических элементов // Автоматика и вычисл. техника. 1974. № 4.

20. *Preparata F. P., Muller D. E.* Generation of near-optimal universal boolean functions // J. Comp. and System Sciences. 1970. N 2.

21. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.

22. *Горбатов В. А., Останков Б. Л., Фролов С. А.* Регулярные структуры автоматного управления. М.: Машиностроение, 1980.

23. *Бутаков Е. А.* Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М.: Энергия, 1970.

24. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Пороговая и мажоритарная логика. Информационный листок. 1964. № 2 (29).

25. *Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация булевых функций одним линейным арифметическим полиномом с маскированием // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1.

26. *Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1283744 // Бюл. изобр. 1987. № 2.

27. *Артюхов В. Л., Розенблюм Л. Я., Шалыто А. А.* Логические возможности некоторых типов каскадных структур // Сети связи и дискретные устройства управления. М.: Наука, 1976.

28. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.

29. *Фудзисава Т., Касами Т.* Математика для радиоинженеров. М.: Радио и связь, 1984.

30. *Гаврилов М. А., Девятков В. В., Пупырев Е. И.* Логическое проектирование дискретных автоматов. М.: Наука, 1977.