Глава 7

Методы построения многофункциональных логических модулей

Известно [1], что мультиплексоры «2 в 1» при настройке константами 0 и 1 универсальны в классе произвольных булевых функций (БФУ) n переменных, а при настройке символами из множества $\{0, !x_n, x_n, 1\}$ они универсальны в классе произвольных БФУ $n + 1$ переменных.

Для сокращения числа входов модулей, универсальных в классе произвольных БФУ n переменных, в [2] был предложен метод их построения, называемый методом Препараты—Мюллера. Эти модули настраиваются символами из множества $\{0, !x_1, x_1, \dots, !x_n, x_n, 1\}$. Более подробно такие модули рассмотрены в гл. 11.

Дальнейшее сокращение числа входов модулей указанного типа достигается при объединении в модуль не самих функций, а представителей типов функций в той или иной классификации [3].

Другое направление в построении модулей связано с разработкой модулей, универсальных в классах булевых функций [4, 5]. Некоторые из таких модулей приведены в гл. 9, 10.

В настоящей главе рассматривается еще одно направление построения модулей, которые позволяют путем настройки реализовать каждую из N заданных БФУ n переменных. Такие модули называются многофункциональными логическими модулями (МЛМ).

В [6—11] исследуются различные аспекты построения МЛМ, однако методы построения таких модулей разработаны далеко не достаточно.

В настоящей главе излагается ряд методов для построения модулей из элементов с односторонней проводимостью (функциональные элементы). Модули из элементов с двусторонней проводимостью рассмотрены в гл. 13.

7.1. Основные характеристики многофункциональных логических модулей

К основным характеристикам МЛМ относятся:

— число переменных n в объединяемых булевых функциях (БФУ);
— число объединяемых БФУ;
— класс объединяемых БФУ;
— базис объединяемых булевых формул (БФ);
— число букв в объединяемых БФ;
— число объединяемых БФ;
— класс объединяемых БФ;
— наличие инверсий в объединяемых БФ;
— используемая классификация БФУ и БФ;
— разделимость входов на информационные, настроечные (управляющие) и информационно-настроечные;
— число входов модуля, или число входных переменных, в его порождающей функции (ПФ);
— число букв в порождающей формуле (ПФО) модуля;
— число символов в алфавите настройки;
— число выходов модуля;
— наличие прямого и инверсного выходов.

Излагаемые в настоящей главе методы позволяют строить модули с различными характеристиками. Основные усилия автора были направлены на разработку одновыходных модулей, универсальных в классе произвольных БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из q букв, у которых:

— информационные и информационно-настроечные входы разделены;
— число входов меньше величины $q +]\log N[$;
— число букв в ПФО минимизировано;
— ПФО не содержит инверсий;
— алфавит настройки: константы 0 и 1, переменные и их инверсии.

Построение этих и других типов модулей описано в примерах настоящей главы и в гл. 8. Большинство рассмотренных модулей защищены авторскими свидетельствами СССР, общее число которых равно 31 [12].

7.2. Мультиплексорный метод — метод объединения фрагментов

7.2.1. Основные положения

Пусть заданы N различных БФУ n переменных, которые необходимо объединить в порождающую функцию модуля.

1. Введем в рассмотрение переменную $k = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ и зафиксируем ее значение. При этом число информационных входов модуля равно $n-k$, а k переменных используется для его настройки.

Случай $k = n$ не рассматривается ввиду большой трудоемкости метода в этом случае. При этом значении k метод из аналитического превращается в переборный, так как в этом случае отсутствует разделение входов: они все являются информационно-настроечными.

При $k = n$ в [13, 14] были построены модули, универсальные в классе произвольных БФУ трех и четырех переменных. При $n = 3$ применялась PN-классификация и построены модули с пятью входами и одним выходом. При $n = 4$ применялась NPN-классификация и построены модули с семью входами и двумя выходами (прямым и инверсным).

В [14] доказано, что при $n = 3$ такие модули являются минимальными по числу внешних выводов, так как ни одна функция четырех переменных не может одновременно породить следующие три БФУ: $f_1 = x_1 x_2 x_3$, $f_2 = x_1 \# x_2 \# x_3$, $f_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. При этом отметим, что из соотношений для определения числа настроек МЛМ, приведенных в [15], также следует, что эти модули минимальны по числу внешних выводов.

Мультиплексорный метод также строит при $n = 3$ модуль с пятью входами и одним выходом. Модуль строится при $k = 1$ с дальнейшим переходом (при определении настройки для представителя одного из PN-типов) к $k = 2$, что позволяет для 15 типов функций иметь один информационный вход, а для одного типа функций — два информационных входа (разд. 8.4).

2. Выберем k переменных и проведем разложение Шеннона каждой из заданных БФУ одновременно по всем этим переменным. В результате формируется система соотношений вида:

$$f_t = \mathrm{MX}(g_0^t, \ldots, g_{2^k-1}^t; x_1, \ldots, x_k),$$

где $t = 1, \ldots, N$.

3. Выбор указанных переменных, а если возможно и самих функций (в случае, когда применяется какая-либо классификация), должен производиться так, чтобы число типов фрагментов G_j (различных функций g) во всех объединяемых БФУ было минимальным. Обозначим число типов фрагментов переменной R.

4. Определим величину $m =]\log R[$.

5. Выполним назначение функций Q_i, где $i = 0, \ldots, 2^m - 1$.

Для этого при $R = 2^m$ сопоставим каждой из этих функций один из фрагментов G_j, и наоборот.

При $2^{m-1} < R < 2^m$ каждая из оставшихся $2^m - R$ функций Q_i сопоставляется либо с одним из фрагментов G_j, либо с любым другим фрагментом, зависящим от $n-k$ переменных.

Для построения порождающей формулы модуля с заданными свойствами при назначении функций Q_i, зависящих от $n-k$ переменных, должны выполняться отношения покрытия.

6. Для функции f_t построим мультиплексорную декомпозицию вида:

$$f_t = \mathrm{MX}(Q_0, \dots, Q_{2^m-1}; \Phi_1^t, \dots, \Phi_m^t).$$

Этой декомпозиции соответствует схема, приведенная на рис. 7.1, которая состоит из мультиплексора и двух постоянных запоминающих устройств.

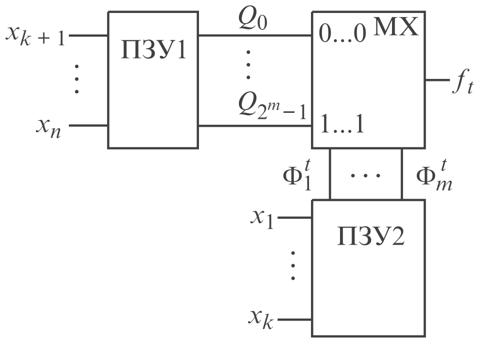

Рис. 7.1

7. Объединим функции Φ_j^t (j = const, $t = 1, \dots, N$), зависящие от $k < n$ переменных, в порождающую функцию, которую обозначим символом Φ_j. Эта функция в общем случае зависит от r информационных и p настроечных или информационно-настроечных входов. Значения переменных r и p зависят от свойств функций Φ_j^t и метода их объединения в порождающую функцию.

8. Построим булеву формулу вида:

$$F = \mathrm{MX}(Q_0, \dots, Q_{2^m-1}; \Phi_1, \dots, \Phi_m), \tag{7.1}$$

которая является искомой порождающей формулой модуля.

Такому построению модуля соответствует стандартная схема, приведенная на рис. 7.2.

В этой и последующих схемах подсхема ПЗУ2 может быть заменена схемой из m многофункциональных логических модулей.

9. Если в ПФО (7.1) подставить выражения для функций Q_i, то

$$F = F_1(\Phi_1, \dots, \Phi_m, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

При этом схема на рис. 7.2 преобразуется в схему, представленную на рис. 7.3, в которой КСх — комбинационная схема. В некоторых случаях эта схема может быть многофункциональным логическим модулем, который объединяет функции, зависящие от числа переменных, меньшего n (рис. 7.4).

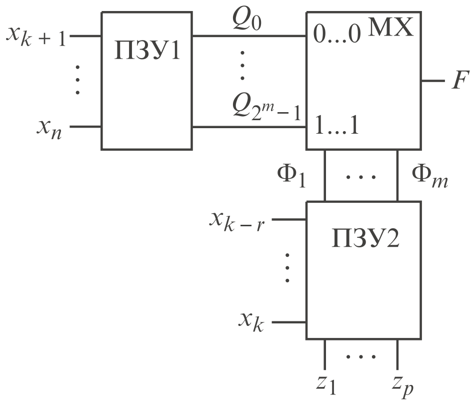

Рис. 7.2

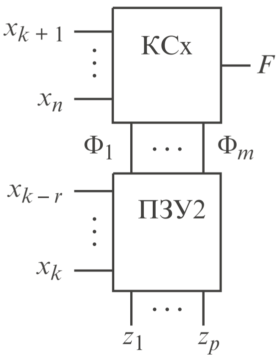

Рис. 7.3

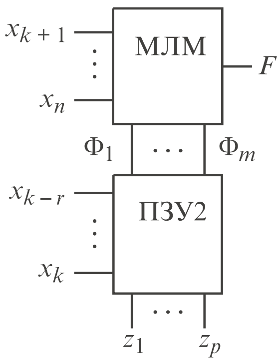

Рис. 7.4

10. Если в ПФО (7.1) подставить выражения для функций Φ_j, то

$$F = F_2(Q_0, \ldots, Q_{2^m-1}, x_{k-r}, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_p).$$

11. Если в ПФО (7.1) подставить выражения для функций Q_i и Φ_j, то

$$F = F_3(x_{k-r}, \ldots, x_k, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p).$$

12. Рассмотрим частные случаи.

При $k = 0$ в ПФ модуля объединяются заданные БФУ. При этом стандартная схема на рис. 7.2 упрощается за счет исключения подсхемы ПЗУ2. В полученной схеме на входы Φ_j мультиплексора подаются константы 0 и 1.

При $k = 1$ в ПФ модуля объединяются различные «половинки» заданных БФУ. При этом стандартная схема на рис. 7.2 упрощается за счет исключения подсхемы ПЗУ2. В полученной схеме на входы Φ_j мультиплексора подаются символы $0, !x_1, x_1, 1$.

При k = 2, 3, ... в ПФ модуля объединяются различные «четвертинки», «восьмушки» и т. д. заданных функций. В этих случаях на входы Φ_j мультиплексора в стандартной схеме (рис. 7.2) в общем случае подаются не константы, отдельные переменные и их инверсии, а булевы функции k переменных. При этом специфика объединяемых в модуль БФУ может позволить упростить схему.

Таким образом, при фиксированном значении k в ПФ модуля с помощью предлагаемого метода объединяют различные фрагменты, являющиеся функциями $n - k$ переменных. Эти фрагменты выбираются из порождающей функции для образования заданной БФУ в общем случае с помощью функций k переменных, подаваемых на Φ_j-входы мультиплексора.

7.2.2. Применение отношений покрытия для упрощения порождающих формул модулей

Из предыдущего раздела следует, что каждому назначению функций Q_i соответствует определенная порождающая функция. При $R = 2^m$ существуют $2^m!$ различных ПФ.

Для исключения перебора при назначении функций Q_i можно использовать отношения покрытия, рассмотренные в разд. 1.5, выполнение которых в данном случае обеспечивает построение ПФО модуля без инверсий переменных Φ_j, обеспечивающих его настройку. Покажем, как определяются эти отношения при m = 1, 2, 3.

1. При m = 1 запишем две БФ:

$$F = Q_0 !z \vee Q_1 z, \quad F_1 = Q_0 \vee Q_1 z,$$

и определим условие, при выполнении которого $F = F_1$.

При z = 0 это равенство выполняется, если $Q_0 = Q_0$, а при z = 1 — если $Q_1 = Q_0 \vee Q_1$. Следовательно, $Q_0 \leqslant Q_1$.

2. При m = 2 запишем две БФ:

$$F = Q_0 !z_1 !z_2 \vee Q_1 !z_1 z_2 \vee Q_2 z_1 !z_2 \vee Q_3 z_1 z_2;$$
$$F_1 = Q_0 \vee Q_1 z_2 \vee Q_2 z_1 \vee Q_3 z_1 z_2,$$

и определим условия, при выполнении которых $F = F_1$.

При $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ это равенство выполняется, если $Q_0 = Q_0$.

При $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ — если $Q_1 = Q_0 \vee Q_1$. Таким образом, $Q_0 \leqslant Q_1$.

При $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ — если $Q_2 = Q_0 \vee Q_2$. Следовательно, $Q_0 \leqslant Q_2$.

При $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ — если $Q_3 = Q_0 \vee Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$. Таким образом, ($Q_0 \leqslant Q_3$, $Q_1 \leqslant Q_3$, $Q_2 \leqslant Q_3$) или ($Q_0 \leqslant Q_3$, $Q_1 \vee Q_2 \leqslant Q_3$).

Из изложенного следует, что для выполнения равенства $F = F_1$ должны выполняться либо пять условий:

$$Q_0 \leqslant Q_1, Q_0 \leqslant Q_2, Q_0 \leqslant Q_3, Q_1 \leqslant Q_3, Q_2 \leqslant Q_3,$$

либо четыре:

$$Q_0 \leqslant Q_1, Q_0 \leqslant Q_2, Q_0 \leqslant Q_3, Q_1 \vee Q_2 \leqslant Q_3.$$

Если для функций Q_i выполняются более жесткие условия, то порождающая формула модуля может быть значительно упрощена. Например, в случае, когда кроме приведенных выше условий выполняется также условие $Q_3 = Q_2$,

$$F_2 = Q_0 \vee Q_1 z_2 \vee Q_2 z_1.$$

В случае, когда $Q_0 = 0,\ Q_2 = Q_1, Q_3 = 1$,

$$F_3 = Q_1 \mathbin{+\!\!\!+} z_1 \mathbin{+\!\!\!+} z_2.$$

3. При $m = 3$ запишем две БФ:

$$F = Q_0 !z_1 !z_2 !z_3 \vee Q_1 !z_1 !z_2 z_3 \vee Q_2 !z_1 z_2 !z_3 \vee Q_3 !z_1 z_2 z_3 \vee$$
$$\vee Q_4 z_1 !z_2 !z_3 \vee Q_5 z_1 !z_2 z_3 \vee Q_6 z_1 z_2 !z_3 \vee Q_7 z_1 z_2 z_3;$$
$$F_1 = Q_0 \vee Q_1 z_3 \vee Q_2 z_2 \vee Q_3 z_2 z_3 \vee Q_4 z_1 \vee Q_5 z_1 z_3 \vee$$
$$\vee Q_6 z_1 z_2 \vee Q_7 z_1 z_2 z_3,$$

и определим условия, при выполнении которых $F = F_1$.

При $z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = 0$ это равенство выполняется, если $Q_0 = Q_0$.

При $z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1$ — если $Q_1 = Q_0 \vee Q_1$. Таким образом, $Q_0 \leqslant Q_1$.

При $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 0$ — если $Q_2 = Q_0 \vee Q_2$. Следовательно, $Q_0 \leqslant Q_2$.

При $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1$ — если $Q_3 = Q_0 \vee Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$. Таким образом, ($Q_0 \leqslant Q_3, Q_1 \leqslant Q_3, Q_2 \leqslant Q_3$) или ($Q_0 \leqslant Q_3, Q_1 \vee Q_2 \leqslant Q_3$).

При $z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 0$ — если $Q_4 = Q_0 \vee Q_4$. Следовательно, $Q_0 \leqslant Q_4$.

При $z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1$ — если $Q_5 = Q_0 \vee Q_1 \vee Q_4 \vee Q_5$. Таким образом, ($Q_0 \leqslant Q_5, Q_1 \leqslant Q_5, Q_4 \leqslant Q_5$) или ($Q_0 \leqslant Q_5, Q_1 \vee Q_4 \leqslant Q_5$).

При $z_1 = 1,\ z_2 = 1,\ z_3 = 0$ — если $Q_6 = Q_0 \vee Q_2 \vee Q_4 \vee Q_6$. Следовательно, ($Q_0 \leqslant Q_6,\ Q_2 \leqslant Q_6,\ Q_4 \leqslant Q_6$) или ($Q_0 \leqslant Q_6, Q_2 \vee Q_4 \leqslant$ $\leqslant Q_6$).

При $z_1 = 1,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1$ — если $Q_7 = Q_0 \vee Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \vee Q_4 \vee$ $\vee Q_5 \vee Q_6 \vee Q_7$. Таким образом, $Q_0 \leqslant Q_7, Q_1 \leqslant Q_7, Q_2 \leqslant Q_7, Q_3 \leqslant Q_7$, $Q_4 \leqslant Q_7, Q_5 \leqslant Q_7, Q_6 \leqslant Q_7$.

Из изложенного следует, что для выполнения указанного равенства должны выполняться либо 19 условий:

$$Q_0 \leqslant Q_1, Q_0 \leqslant Q_2, Q_0 \leqslant Q_3, Q_0 \leqslant Q_4, Q_0 \leqslant Q_5, Q_0 \leqslant Q_6, Q_0 \leqslant Q_7;$$
$$Q_1 \leqslant Q_3, Q_1 \leqslant Q_5, Q_1 \leqslant Q_7; Q_2 \leqslant Q_3, Q_2 \leqslant Q_6, Q_2 \leqslant Q_7; Q_3 \leqslant Q_7;$$
$$Q_4 \leqslant Q_5, Q_4 \leqslant Q_6, Q_4 \leqslant Q_7; Q_5 \leqslant Q_7; Q_6 \leqslant Q_7,$$

либо 16 условий:

$$Q_0 \leqslant Q_1, Q_0 \leqslant Q_2, Q_0 \leqslant Q_3, Q_0 \leqslant Q_4, Q_0 \leqslant Q_5, Q_0 \leqslant Q_6, Q_0 \leqslant Q_7;$$
$$Q_1 \vee Q_2 \leqslant Q_3, Q_1 \vee Q_4 \leqslant Q_5, Q_2 \vee Q_4 \leqslant Q_6;$$
$$Q_1 \leqslant Q_7, Q_2 \leqslant Q_7, Q_3 \leqslant Q_7, Q_4 \leqslant Q_7, Q_5 \leqslant Q_7, Q_6 \leqslant Q_7.$$

Из изложенного также следует, что в общем случае могут быть найдены условия, при выполнении которых порождающая формула модуля может быть представлена в виде:

$$F_1 = Q_0 \vee Q_1 z_m \vee Q_2 z_{m-1} \vee Q_3 z_{m-1} z_m \vee \ldots \vee Q_{2^m-1} z_1 \ldots z_m.$$

В заключение раздела отметим, что если $R < 2^m$, то некоторые из функций Q_i могут иметь одинаковые выражения или не совпадать с функциями *G*. Выбор функций Q_i в этом случае проводится так, чтобы получить порождающую функцию модуля, минимизированную по числу букв.

7.2.3. Объединение заданных булевых функций

В этом случае $k = 0$, и поэтому схема на рис. 7.2 преобразуется в схему на рис. 7.5.

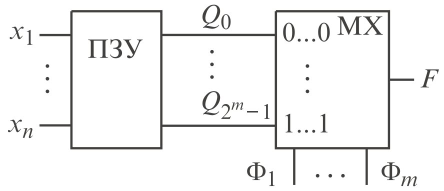

Рис. 7.5

В этой схеме $Q_i = f_t$, $m =]\log N[$. Выполним замену переменных $\Phi_j = z_j$. При этом

$$F_1 = \text{МХ}(Q_0, \ldots, Q_{2^m-1}; z_1, \ldots, z_m).$$

Подставим выражения для функций Q_i в полученное соотношение, тогда

$$F_1 = F(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m).$$

Это соотношение является ПФО модуля, число входов которого определяется следующим образом:

$$B_1 = n +]\log N[.$$

Алфавит настройки модуля — константы 0 и 1. При этом $z_i = \{0, 1\}$.

Этот частный случай является единственным известным аналитическим методом построения МЛМ [7].

Пример 7.1. При k = 0 построить логический модуль, универсальный в классе БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из трех букв.

Обозначим этот модуль как УЛМ3. При его построении будем использовать *PN*-классификацию и выберем в качестве представителей типов следующие бесповторные формулы:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3,\ f_2 = x_1(x_2 \vee x_3),\ f_3 = x_1 \vee x_2 x_3,$$
$$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3.$$

В данном случае $B_1 = 5$. При $Q_i = f_{i-1}$ порождающая функция модуля имеет вид:

$$F_1(3) = \mathrm{MX}(f_1, f_2, f_3, f_4; z_1, z_2).$$

Так как $f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant f_4$, то

$$\begin{gathered}
F_1(3) = f_1 \vee f_2 z_2 \vee f_3 z_1 \vee f_4 z_1 z_2 = \\
= x_1 x_2 x_3 \vee x_1(x_2 \vee x_3) z_2 \vee (x_1 \vee x_2 x_3) z_1 \vee \\
\vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3) z_1 z_2 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 z_2 \vee \\
\vee x_1 x_3 z_2 \vee x_1 z_1 \vee x_2 x_3 z_1 \vee x_1 z_1 z_2 \vee x_2 z_1 z_2 \vee x_3 z_1 z_2 = \\
= x_1(x_2 x_3 \vee x_2 z_2 \vee x_3 z_2) \vee x_1 z_1 \vee z_1(x_2 x_3 \vee x_2 z_2 \vee x_3 z_2) = \\
= x_1\Big((x_2 \vee x_3) z_2 \vee x_2 x_3\Big) \vee x_1 z_1 \vee \Big((x_2 \vee x_3) z_2 \vee x_2 x_3\Big) z_1 = \\
= (x_1 \vee z_1)\Big((x_2 \vee x_3) z_2 \vee x_2 x_3\Big) \vee x_1 z_1.
\end{gathered}$$

Полученная БФ содержит девять букв. Изменим базис в ней:

$$\begin{gathered}
F_1(3) = (x_1 \vee z_1)(x_2 \# x_3 \# z_2) \vee x_1 z_1 = \\
= z_1 \# x_1 \# (z_2 \# x_2 \# x_3).
\end{gathered}$$

Эта формула из пяти букв реализуется схемой, состоящей из двух трехвходовых МЭ (рис. 7.6).

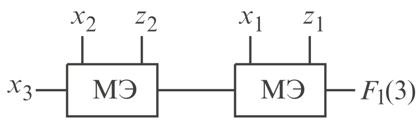

Рис. 7.6

В этом модуле три входа — x_1, x_2, x_3 являются информационными, а входы z_1 и z_2 — настроечными. Отметим, что рассмотренный модуль является однородным настраиваемым каскадом Макхопадхая из двух ячеек [3] и может быть построен также с помощью метода «покрывающих деревьев» (разд. 1.2.3).

Пример 7.2. При $k = 0$ построить еще один модуль УЛМ3.

Выполним в бесскобочной формуле для $F_1(3)$ другое вынесение за скобки:

$$
\begin{aligned}
F_1(3) &= x_1\big(x_2x_3 \vee (x_2 \vee x_3)z_2\big) \vee \\
&\vee\big(x_1 \vee x_2x_3 \vee (x_2 \vee x_3)z_2\big)z_1 = \\
&= x_1\big(x_1z_1 \vee x_2x_3 \vee (x_2 \vee x_3)z_2\big) \vee \\
&\vee\big(x_1z_1 \vee x_2x_3 \vee (x_2 \vee x_3)z_2\big)z_1 = \\
&= (x_1 \vee z_1)\big(x_1z_1 \vee x_2x_3 \vee (x_2 \vee x_3)z_2\big).
\end{aligned}
$$

Полученная формула в базисе {&, ∨, !}, так же как и предыдущая порождающая формула в этом базисе, содержит девять букв [16].

7.2.4. Объединение различных «половинок» заданных булевых функций

При $k = 1$ в порождающую функцию модуля объединяются разнотипные «половинки» заданных БФУ — разнотипные фрагменты длиной 2^{n-1} столбцов значений заданных булевых функций. Эти фрагменты являются БФУ, зависящими от $n - 1$ переменных. Некоторые из фрагментов могут зависеть от всех или от части этих переменных несущественно.

Выполним разложение Шеннона каждой из N заданных БФУ по одной и той же входной переменной, например x_1. При этом формируются $2N$ остаточных функций (фрагментов) $g_0, \dots, g_{2N-1}$.

Предположим, что в этом случае число различных фрагментов (их типов) равно R, а $m =]\log R[$. Обозначим эти фрагменты переменными $G_0, \ldots, G_{R-1}$. Если выполнить назначение $Q_i = G_l$, то и в этом случае может быть использована стандартная схема (рис. 7.5), в которой ПЗУ имеет n – 1 входов, помеченных символами $x_2, \ldots, x_n$.

Выполним в этой схеме замену переменных $\Phi_j = z_j$. При этом

$$F_2 = \mathrm{MX}(Q_0, \ldots, Q_{2^m - 1}; z_1, \ldots, z_m).$$

Подставим выражения для функций Q_i в полученное соотношение, тогда

$$F_2 = F(x_2, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m).$$

Это соотношение является порождающей формулой модуля, число входов которого определяется следующим образом:

$$B_2 = n - 1 +]\log R[.$$

Алфавит настройки модуля: $0, !x_1, x_1, 1$. При этом $z_i = \{0, !x_1, x_1, 1\}$. Это позволяет выбрать из ПФ модуля любые два фрагмента длиной 2^{n-1} и расположить их в требуемом порядке для образования каждой из заданных БФУ.

Сформулируем необходимое (но не достаточное) условие, при выполнении которого при t = 1, … , N алфавит настройки может быть сокращен за счет исключения из него символа $!x_1$.

При $s < r$, если фрагмент Q_s находится в порождающей функции «левее» фрагмента Q_r, то и в функции f_t фрагмент Q_s должен находиться «левее» фрагмента Q_r:

$$f_t = !x_1 Q_s \vee x_1 Q_r.$$

Если для функций Q_i выполняются отношения покрытия, то

$$F_2 = Q_0 \vee Q_1 z_m \vee Q_2 z_{m-1} \vee Q_3 z_{m-1} z_m \vee \ldots \vee Q_{R-1} z_1 \ldots z_m.$$

Настройка модуля на реализацию функции f_t определяется в результате составления и решения мультиплексорным методом логического уравнения:

$$\begin{gathered} f_t = F_2; \\ \mathrm{MX}(Q_s, Q_r; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, \ldots, Q_{R-1}; z_1, \ldots, z_m); \\ z_1 = \mathrm{MX}(b_1, b_2; x_1); \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_m = \mathrm{MX}(b_{2m-1}, b_{2m}; x_1), \end{gathered}$$

где $b_1, \ldots, b_{2m-1} = \mathrm{bin}\ s$; $b_2, \ldots, b_{2m} = \mathrm{bin}\ r$.

Из изложенного следует, что для сокращения числа входов модуля значение R должно быть минимально. Это достигается:

— выбором соответствующих представителей классов;

— выбором переменной, по которой выполняется разложение Шеннона.

Изложенный метод строит одновыходные модули УЛМq, число входов в которых определяется соотношением [3]

$$B_3 = q - 1 + \left]\log\left(2 + \sum_{i=]q/2[}^{q-1} T_1(i)\right)\right[,$$

где $T_1(i)$ — число PN-типов формул, бесповторных в рассматриваемом базисе из i букв.

Значения B_3 для $q = 2 \div 10$ приведены в табл. 7.1.

Т а б л и ц а 7.1

q	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_3	3	4	6	8	11	13	16	18	21

Метод построения МЛМ при k = 1 впервые был рассмотрен в [3, 17].

Пример 7.3. При k = 1 построить модуль УЛМ3.

Выберем представителей PN-типов бесповторных формул, выполним для каждого из них разложение Шеннона по переменной x_3 и представим их в мультиплексорной форме:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 = \mathrm{MX}(0, x_1 x_2; x_3),$$
$$f_2 = x_1 (x_2 \vee x_3) = \mathrm{MX}(x_1 x_2, x_1; x_3),$$
$$f_3 = x_1 \vee x_2 x_3 = \mathrm{MX}(x_1, x_1 \vee x_2; x_3),$$
$$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \mathrm{MX}(x_1 \vee x_2, 1; x_3).$$

Таким образом, $g_0 = 0$, $g_1 = x_1 x_2$, $g_2 = x_1 x_2$, $g_3 = x_1$, $g_4 = x_1$, $g_5 = x_1 \vee x_2$, $g_6 = x_1 \vee x_2$, $g_7 = 1$. Разнотипными фрагментами являются следующие: $G_0 = 0$, $G_1 = x_1 x_2$, $G_2 = x_1$, $G_3 = x_1 \vee x_2$, $G_4 = 1$.

Следовательно, в данном случае R = 5, m = 3, и поэтому (как и в случае k = 0) $B_3 = 5$.

С целью минимизации числа входов модуля разложим каждую из выбранных БФ по переменной x_1:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 = \mathrm{MX}(0, x_2 x_3; x_1),$$
$$f_2 = x_1 (x_2 \vee x_3) = \mathrm{MX}(0, x_2 \vee x_3; x_1),$$
$$f_3 = x_1 \vee x_2 x_3 = \mathrm{MX}(x_2 x_3, 1; x_1),$$
$$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \mathrm{MX}(x_2 \vee x_3, 1; x_1).$$

Таким образом, $g_0=0$, $g_1=x_2x_3$, $g_2=0$, $g_3=x_2 \vee x_3$, $g_4=x_2x_3$, $g_5=1$, $g_6=x_2 \vee x_3$, $g_7=1$. Разнотипными фрагментами в данном случае являются следующие: $G_0=0$, $G_1=x_2x_3$, $G_2=x_2 \vee x_3$, $G_4=1$. Следовательно, $R=4$, $m=2$, и поэтому $B_3=4$. В этом модуле входы x_2 и x_3 являются информационными, а остальные два входа — z_1 и z_2 — информационно-настроечными.

Выполним назначение функций Q_i следующим образом: $Q_i=G_i$. При этом таблица истинности ПФ модуля имеет вид:

$$F_2(z_1, z_2, x_2, x_3)=\left|0000\ \ 0001\ \ 0111\ \ 1111\right|^T.$$

Запишем ПФ в мультиплексорной форме:

$$F_2(3)=\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2).$$

Запишем выбранные БФ в мультиплексорной форме, используя функции Q_i:

$$f_1=\mathrm{MX}(Q_0, Q_1; x_1), \quad f_3=\mathrm{MX}(Q_1, Q_3; x_1),$$
$$f_2=\mathrm{MX}(Q_0, Q_2; x_1), \quad f_4=\mathrm{MX}(Q_2, Q_3; x_1).$$

Так как во всех этих БФУ номер первой остаточной функции меньше номера второй остаточной, то необходимое условие для получения безынверсных настроек выполняется. Применяя мультиплексорный метод, определим настройки модуля:

$$f_1=F_2(3),$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1; x_1)=\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2),$$
$$z_1=\mathrm{MX}(0, 0; x_1)=0,$$
$$z_2=\mathrm{MX}(0, 1; x_1)=x_1;$$

$$f_2=F_2(3),$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_2; x_1)=\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2),$$
$$z_1=\mathrm{MX}(0, 1; x_1)=x_1,$$
$$z_2=\mathrm{MX}(0, 0; x_1)=0;$$

$$f_3=F_2(3),$$
$$\mathrm{MX}(Q_1, Q_3; x_1)=\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2),$$
$$z_1=\mathrm{MX}(0, 1; x_1)=x_1,$$
$$z_2=\mathrm{MX}(1, 1; x_1)=1;$$

$$f_4 = F_2(3),$$
$$\mathrm{MX}(Q_2, Q_3; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2),$$
$$z_1 = \mathrm{MX}(1, 1; x_1) = 1,$$
$$z_2 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1.$$

Таким образом, в данном случае необходимое условие для получения безынверсных настроек является также и достаточным: $z_i = \{0, x_1, 1\}$.

Построенная порождающая функция позволяет дополнительно реализовать БФУ $f_5 = x_1 \# x_2 \# x_3 = \mathrm{MX}(Q_1, Q_2; x_1)$:

$$f_5 = F_2(3),$$
$$\mathrm{MX}(Q_1, Q_2; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2),$$
$$z_1 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1,$$
$$z_2 = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1,$$

что делает его универсальным в классе пороговых функций трех переменных при $z_1 = \{0, x_1, 1\}$, $z_2 = \{0, !x_1, x_1, 1\}$. Таким образом, в данном случае указанное необходимое условие не является достаточным.

Модуль УЛМ3 с другими настройками на функцию f_5 описан в [5, 18, 19].

Определим порождающую формулу модуля. Так как $Q_0 \leqslant Q_1 \leqslant$ $\leqslant Q_2 \leqslant Q_3$, то

$$F_2(3) = Q_0 \vee Q_1 z_2 \vee Q_2 z_1 \vee Q_3 z_1 z_2 =$$
$$= x_2 x_3 z_2 \vee (x_2 \vee x_3) z_1 \vee z_1 z_2 = z_1 (z_2 \vee x_2 \vee x_3) \vee z_2 x_2 x_3 =$$
$$= \mathrm{MX}(z_2 x_2 x_3,\ z_2 \vee x_2 \vee x_3;\ z_1).$$

Полученные порождающие формулы могут быть реализованы схемами из четырех и трех логических элементов (рис. 7.7, 7.8).

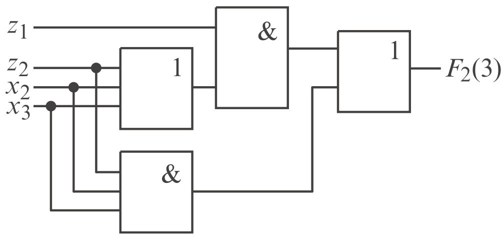

Рис. 7.7

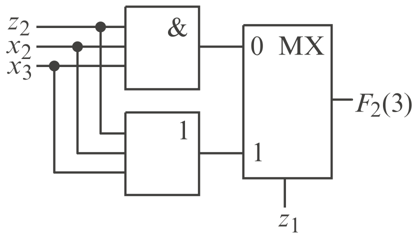

Рис. 7.8

Так как функция $F_2(3)$ является самодвойственной (разд. 10.10 и [20]), то

$$F_2(3) = (z_1 \oplus z_2)(z_1 \oplus x_2)(z_1 \oplus x_3) \oplus z_1.$$

Эта порождающая формула модуля реализуется схемой из пяти логических элементов (рис. 7.9). Построенная порождающая функция модуля может быть реализована мультиплексорным методом схемой из двух мажоритарных элементов (рис. 4.16). Для рассмотренного модуля в дальнейшем будем использовать обозначение, приведенное на рис. 7.10.

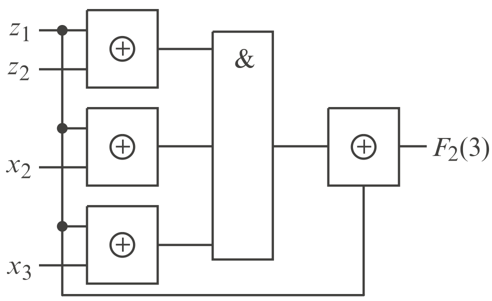

Рис. 7.9

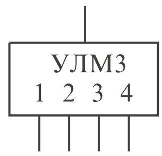

Рис. 7.10

При представлении порождающей формулы в дизъюнктивной нормальной форме модуль может быть реализован схемой (рис. 7.11).

Это позволило на пяти микросхемах малого уровня интеграции реализовать четыре модуля УЛМ3 с прямым и инверсным выходами каждый, которые образовали одну из микросборок среднего уровня интеграции с 20 внешними выводами. Это, в свою очередь, позволило согласовать большое число внешних выводов пяти микросхем, помещающихся в корпус микросборки, с существенно меньшим числом ее внешних выводов, обеспечивая при этом высокую логическую эффективность микросборки [21].

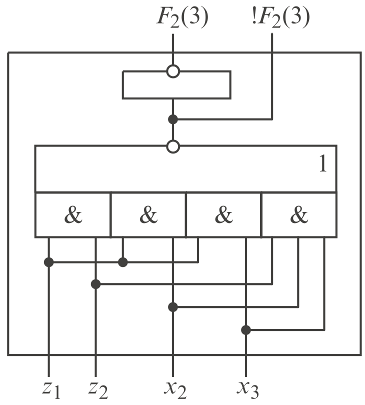

Рис. 7.11

7.2.5. Объединение различных «половинок» булевых функций, *PN*-однотипных с заданными функциями

Рассмотрим этот метод применительно к формулам, бесповторным в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из h букв.

Выполним разложение Шеннона по одной и той же переменной каждой из заданных БФ, так чтобы число разнотипных фрагментов длиной 2^{n-1} было минимальным.

Разобьем полученные разнотипные фрагменты на основе принципа двойственности на две группы так, чтобы:

— если в первой группе находится некоторый фрагмент, соответствующий бесповторной пороговой формуле, то двойственный ему фрагмент должен находиться во второй группе;

— в первой группе должны оказаться все фрагменты, отличные от констант, соответствующие фрагментам представителей *NPN*-типов непороговых бесповторных формул;

— в первой группе, по возможности, должны выполняться отношения покрытия.

Предположим, что G_l — некоторый фрагмент первой группы. Если выполнить назначение функций Q следующим образом:

$$Q_i = G_l \text{, где } i = 0, \ldots, 2^{n-1} - 1;$$
$$Q_r = !G_l \text{, где } 2^{n-1} \leqslant r \leqslant i + 2^{n-1} \leqslant 2^n - 1,$$

и построить функцию V, которая объединяет фрагменты первой группы, то формула

$$F = z_1 \oplus V$$

может использоваться в качестве порождающей формулы модуля.

При этом, например, если $V = \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_2, z_3)$, то

$$F = \text{MX}(Q_0, \ldots, Q_7; z_1, z_2, z_3),$$

где $Q_4 = !Q_0$, $Q_5 = !Q_1$, $Q_6 = !Q_2$, $Q_7 = !Q_3$.

Следовательно, если первая группа содержит R фрагментов, то модуль имеет число входов, определяемое соотношением

$$B_4 = h - 1 + \,]\log R[\, + 1 = h + \,]\log R[\,.$$

Изложенный метод базируется на следующем свойстве булевых функций: в разложении Шеннона по одной переменной заданной функции замена каждой остаточной функции, не являющейся константой, на антидвойственную функцию (разд. 10.5 и [20]) позволяет строить новую функцию, *PN*-однотипную с заданной.

При этом отметим, что для бесповторных пороговых формул при разложении Шеннона по переменной с наибольшим весом одна из остаточных функций является константой. Для бесповторных непороговых формул обе остаточные функции не являются константами.

Пример 7.4. Построить модуль УЛМ3, используя предлагаемый метод.

Разобьем на основе принципа двойственности разнотипные фрагменты, найденные в предыдущем примере, на две группы: $\{G_0 = 0, G_1 = x_2 x_3\}$ и $\{G_2 = x_2 \vee x_3, G_3 = 1\}$.

Выполним назначение функций Q_i: $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_2 x_3$, $Q_2 = {}$ $= !Q_0 = 1$, $Q_3 = !Q_1 = !x_2 \vee !x_3$.

При этом порождающая функция модуля имеет вид:

$$F_3(z_1, z_2, x_2, x_3) = \left|\, 0000 \;\; 0001 \;\; 1111 \;\; 1110 \,\right|^T.$$

Представим порождающую формулу модуля в мультиплексорной форме:

$$F_3(3) = \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2).$$

Запишем заданные БФ или однотипные с ними через функции Q_i:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \text{MX}(Q_0, Q_1; x_1) = x_1 x_2 x_3,\\
f_{21} &= \text{MX}(Q_0, Q_3; x_1) = x_1(!x_2 \vee !x_3),\\
f_3 &= \text{MX}(Q_1, Q_2; x_1) = x_1 \vee x_2 x_3,\\
f_{41} &= \text{MX}(Q_2, Q_3; x_1) = !x_1 \vee !x_2 \vee !x_3.
\end{aligned}$$

Так как во всех этих функциях номер первой остаточной меньше номера второй остаточной, то необходимое условие для получения безынверсных настроек выполняется. Применяя мультиплексорный метод, определим настройки модуля:

$$
\begin{gathered}
f_1 = F_3(3), \\
\mathrm{MX}(Q_0, Q_1; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2), \\
z_1 = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0, \\
z_2 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_{21} = F_3(3), \\
\mathrm{MX}(Q_0, Q_3; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2), \\
z_1 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1, \\
z_2 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_3 = F_3(3), \\
\mathrm{MX}(Q_1, Q_2; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2), \\
z_1 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1, \\
z_2 = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_{41} = F_3(3), \\
\mathrm{MX}(Q_2, Q_3; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; z_1, z_2), \\
z_1 = \mathrm{MX}(1, 1; x_1) = 1, \\
z_2 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1.
\end{gathered}
$$

Таким образом, в данном случае необходимое условие для получения безынверсных настроек не является достаточным и $z_i = \{0, !x_1, x_1, 1\}$.

Так как в данном случае $V = z_2 x_2 x_3$, то

$$F_3(3) = z_1 \oplus z_2 x_2 x_3.$$

Эта порождающая формула реализуется схемой из двух логических элементов (рис. 7.12).

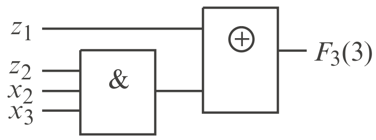

Рис. 7.12

Основы изложенного метода описаны в [22].

7.2.6. Объединение различных фрагментов, меньших чем «половинки» заданных булевых функций

Пример 7.5. При $k = 2$ построить модуль УЛМ3.

В данном случае в порождающей функции модуля объединяются различные «четвертинки» столбцов значений заданных функций.

Выполним для каждой БФ разложение Шеннона одновременно по переменным x_1 и x_2 и представим эти формулы в мультиплексорной форме:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_3; x_1, x_2);$$
$$f_2 = x_1 (x_2 \vee x_3) = \mathrm{MX}(0, 0, x_3, 1; x_1, x_2);$$
$$f_3 = x_1 \vee x_2 x_3 = \mathrm{MX}(0, x_3, 1, 1; x_1, x_2);$$
$$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \mathrm{MX}(x_3, 1, 1, 1; x_1, x_2).$$

В данном случае $G_0 = 0,\ G_1 = x_3,\ G_2 = 1$ и $R = 3$.

Назначим функции Q_i, вводя функцию Q_2, отсутствующую среди выделенных фрагментов: $Q_0 = 0,\ Q_1 = x_3, Q_2 = !x_3, Q_3 = 1.$

Для каждой из заданных БФ построим мультиплексорную декомпозицию вида:

$$f_t = \mathrm{MX}(Q_0, \ldots, Q_3; \Phi_1^t, \Phi_2^t),$$

определив функции Φ_1^t и Φ_2^t. Найденные функции подставим в правую часть этого выражения. При этом

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_0, Q_0, Q_1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1^1, \Phi_2^1),$$
$$\Phi_1^1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0; x_1, x_2) = 0,$$
$$\Phi_2^1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$
$$f_1 = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; 0, x_1 x_2);$$

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_0, Q_1, Q_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1^2, \Phi_2^2),$$
$$\Phi_1^2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$
$$\Phi_2^2 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1,$$
$$f_2 = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_1 x_2, x_1);$$

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_3, Q_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1^3, \Phi_2^3),$$
$$\Phi_1^3 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1,$$
$$\Phi_2^3 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2,$$
$$f_3 = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_1, x_1 \vee x_2);$$

$$\mathrm{MX}(Q_1, Q_3, Q_3, Q_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1^4, \Phi_2^4),$$

$$\Phi_1^4 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2,$$

$$\Phi_2^4 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 1; x_1, x_2) = 1,$$

$$f_4 = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_1 \vee x_2, 1).$$

Из сопоставления построенных декомпозиций следует, что в качестве порождающей формулы в данном случае может быть выбрана БФУ вида:

$$F_4(3) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2),$$

где $\Phi_1 = x_1 \# z_1 \# z_2$, $\Phi_2 = x_1 \# z_3 \# z_4$, $z_1 = z_3 = \{0, 1, x_2\}$, $z_2 = z_4 = \{0, 1\}$. Если в эту порождающую формулу подставить выражения для функций Q_i, то

$$F_4(3) = \mathrm{MX}(\Phi_1, \Phi_2; x_3).$$

Таким образом, в данном случае может быть построена схема, представленная на рис. 7.13.

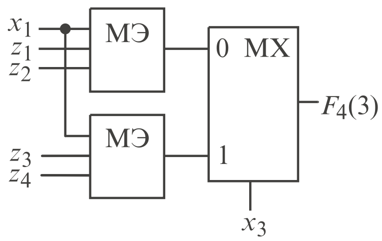

Рис. 7.13

Эта схема по всем показателям менее эффективна по сравнению со схемами, построенными с помощью предлагаемого метода при $k = 0, 1$.

Пример эффективного объединения «четвертинок» заданных функций при $n = 3$ приведен в следующем разделе (пример *7.8*).

При $n = 3$ «восьмушки» заданных БФУ формируются при $k = n$ и поэтому в данном случае не рассматриваются.

Пример эффективного объединения «восьмушек» функций при $n = 5$ приведен в разд. 8.2.

7.3. Модифицированный мультиплексорный метод

1. При $k = \{0, \dots, n-1\}$ зафиксируем величину k.

2. Выберем k переменных и проведем разложение Шеннона каждой из заданных БФУ одновременно по всем этим переменным. В результате формируется система соотношений вида:

$$f_t = \mathrm{MX}(g_0^t, \dots, g_{2^k-1}^t; x_1, \dots, x_k),$$

где $t = 1, \dots, N$.

3. В функции f_t выбираются разнотипные фрагменты G_j^t, где $j = \{0, \dots, R_t - 1\}$; R_t — число разнотипных фрагментов в функции f_t.

4. Определяется величина $R = \max(R_1, \dots, R_N)$.

5. Определяется величина $m =]\log R[$.

6. Для функции f_t выполним назначение функций Q_i^t, где $i = 0, \dots, 2^m - 1$.

7. Для функции f_t построим мультиплексорную декомпозицию вида:

$$f_t = \mathrm{MX}(Q_0^t, \dots, Q_{2^m-1}^t; \Phi_1^t, \dots, \Phi_m^t).$$

8. Объединим функции Q_i^t ($i = \mathrm{const}$, $t = 1, \dots, N$) в порождающую функцию, которую обозначим символом Q_i. Эта функция в общем случае зависит от d информационных и v настроечных или информационно-настроечных переменных. Значения переменных d и v зависят от свойств функций Q_i^t и метода их объединения в ПФ.

9. Объединим функции Φ_j^t ($j = \mathrm{const}$, $t = 1, \dots, N$) в порождающую функцию, которую обозначим символом Φ_j. Эта функция в общем случае зависит от p информационных и w настроечных или информационно-настроечных переменных. Значения переменных p и w зависят от свойств функций Φ_j^t и метода их объединения в ПФ.

10. Построим БФ вида:

$$F = \mathrm{MX}(Q_0, \dots, Q_{2^m-1}; \Phi_1, \dots, \Phi_m), \tag{7.2}$$

которая является искомой порождающей формулой модуля.

Такому построению модуля соответствует стандартная схема, приведенная на рис. 7.14.

Специфика заданных или выбранных в ходе построения модуля функций, однотипных с заданными, может резко упростить стандартную схему, например за счет исключения одного ПЗУ.

Пример 7.6. При $k = 1$ построить модуль УЛМ3.

Предположим, что модуль должен реализовать путем настройки следующие формулы: $f_1 = x_1 x_2 x_3$, $f_2 = (!x_1 \vee x_2) x_3$, $f_3 = x_1 x_2 \vee x_3$, $f_4 = !x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

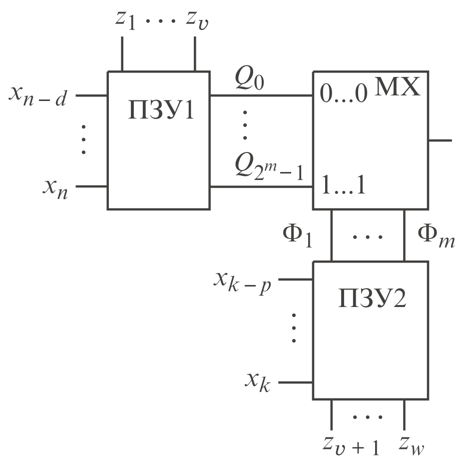

Рис. 7.14

Выполним для каждой из этих БФ разложение Шеннона по переменной x_1:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 = \text{МХ}(0, x_2 x_3; x_1);$$

$$f_2 = (!x_1 \vee x_2) x_3 = \text{МХ}(x_3, x_2 x_3; x_1);$$

$$f_3 = x_1 x_2 \vee x_3 = \text{МХ}(x_3, x_2 \vee x_3; x_1);$$

$$f_4 = !x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \text{МХ}(1, x_2 \vee x_3; x_1).$$

На основе построенных декомпозиций следует, что

$$Q_0 = z_1,\ Q_1 = z_2 \# x_2 \# x_3,\ \Phi = x_1,$$

где $z_1 = \{0, x_3, 1\}$, $z_2 = \{0, 1\}$.

При этом порождающая формула модуля имеет вид:

$$F_5(3) = \text{МХ}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Подставляя в это соотношение выражения для функций Q_i и Ф, получим искомую порождающую формулу:

$$F_5(3) = \text{МХ}(z_1, z_2 \# x_2 \# x_3; x_1).$$

Этой формуле соответствует схема с пятью входами, состоящая из двух трехвходовых элементов (рис. 7.15).

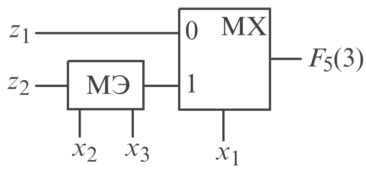

Рис. 7.15

Пример 7.7. При k = 2 построить модуль УЛМ3.

Предположим первоначально, что модуль должен реализовать путем настройки следующие формулы: $f_1 = x_1 x_2 x_3$, $f_2 = x_1(x_2 \vee x_3)$, $f_3 = x_1 \vee x_2 x_3$, $f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

Выполним для каждой из этих БФ разложение Шеннона одновременно по переменным x_1 и x_2 и представим эти формулы в мультиплексорной форме:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_3; x_1, x_2);$$
$$f_2 = x_1(x_2 \vee x_3) = \mathrm{MX}(0, 0, x_3, 1; x_1, x_2);$$
$$f_3 = x_1 \vee x_2 x_3 = \mathrm{MX}(0, x_3, 1, 1; x_1, x_2);$$
$$f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \mathrm{MX}(x_3, 1, 1, 1; x_1, x_2).$$

Перечислим разнотипные фрагменты в каждой из формул: $\{0, x_3\}$, $\{0, x_3, 1\}$, $\{0, x_3, 1\}$, $\{x_3, 1\}$.

В данном случае $R_1 = R_4 = 2$, $R_2 = R_3 = 3$, и поэтому R = 3.

Заменим формулы f_2 и f_3 на *PN*-однотипные формулы f_{21} и f_{31}, такие что $R_{21} = R_{31} = 2$. Это позволяет получить R = 2.

Такими формулами являются: $f_{21} = (x_1 \vee x_2)x_3$, $f_{31} = x_1 x_2 \vee x_3$.

При этом набор БФ, реализуемых модулем путем настройки, приобретает вид:

$$f_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_3; x_1, x_2);$$
$$f_{21} = \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, x_3; x_1, x_2);$$
$$f_{31} = \mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 1; x_1, x_2);$$
$$f_4 = \mathrm{MX}(x_3, 1, 1, 1; x_1, x_2).$$

Для каждой из этих формул построим мультиплексорную декомпозицию:

$$f_1 = \mathrm{MX}(0, x_3; \Phi^1),$$
$$\mathrm{MX}(0, 0, 0, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3; \Phi^1),$$
$$\Phi^1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$
$$f_1 = \mathrm{MX}(0, x_3; x_1 x_2);$$

$$f_{21} = \mathrm{MX}(0, x_3; \Phi^2),$$
$$\mathrm{MX}(0, x_3, x_3, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3; \Phi^2),$$
$$\Phi^2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2,$$
$$f_{21} = \mathrm{MX}(0, x_3; x_1 \vee x_2);$$

$$f_{31} = \mathrm{MX}(x_3, 1; \Phi^3),$$

$$\mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(x_3, 1; \Phi^3),$$

$$\Phi^3 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$f_{31} = \mathrm{MX}(x_3, 1; x_1 x_2);$$

$$f_4 = \mathrm{MX}(x_3, 1; \Phi^4),$$

$$\mathrm{MX}(x_3, 1, 1, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(x_3, 1; \Phi^4),$$

$$\Phi^4 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2,$$

$$f_4 = \mathrm{MX}(x_3, 1; x_1 \vee x_2).$$

На основе построенных декомпозиций следует, что

$$Q_0 = z_1,\ Q_1 = z_2,\ \Phi = z_3 \# x_1 \# x_2,$$

где $z_1 = \{0, x_3\}$, $z_2 = \{x_3, 1\}$, $z_3 = \{0, 1\}$.

При этом порождающая формула модуля имеет вид:

$$F_6(3) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Подставляя в это соотношение выражения для функций Q_i и Ф, получим искомую порождающую формулу:

$$F_6(3) = \mathrm{MX}(z_1, z_2; z_3 \# x_1 \# x_2).$$

Этой формуле соответствует схема с пятью входами, состоящая из двух трехвходовых элементов (рис. 7.16).

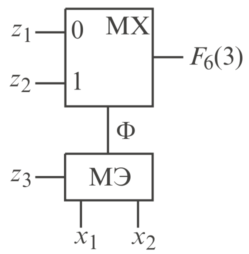

Рис. 7.16

Таким образом, переход от объединения «половинок» функций к объединению их «четвертинок» не упростил модуль.

Пример 7.8. При k = 2 построить модуль УЛМ3.

С целью упрощения модуля вновь изменим набор объединяемых формул. При этом заменим формулы f_{21} и f_4 на *PN*-однотипные.

Такими формулами, не изменяющими значения R = 2, являются формулы $f_{22} = (!x_1 \vee !x_2)x_3$ и $f_{41} = !x_1 \vee !x_2 \vee x_3$.

Выполним для каждой БФ из нового множества разложение Шеннона одновременно по переменным x_1 и x_2 и представим эти формулы в мультиплексорной форме:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_3; x_1, x_2);$$
$$f_{22} = (!x_1 \vee !x_2)x_3 = \mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 0; x_1, x_2);$$
$$f_{31} = x_1 x_2 \vee x_3 = \mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 1; x_1, x_2);$$
$$f_{41} = !x_1 \vee !x_2 \vee x_3 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, x_3; x_1, x_2).$$

Для каждой из этих формул построим мультиплексорную декомпозицию:

$$f_1 = \mathrm{MX}(0, x_3; \Phi^1),$$
$$\mathrm{MX}(0, 0, 0, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3; \Phi^1),$$
$$\Phi^1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$
$$f_1 = \mathrm{MX}(0, x_3; x_1 x_2);$$

$$f_{22} = \mathrm{MX}(x_3, 0; \Phi^2),$$
$$\mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 0; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(x_3, 0; \Phi^2),$$
$$\Phi^2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$
$$f_{22} = \mathrm{MX}(x_3, 0; x_1 x_2);$$

$$f_{31} = \mathrm{MX}(x_3, 1; \Phi^3),$$
$$\mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(x_3, 1; \Phi^3),$$
$$\Phi^3 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$
$$f_{31} = \mathrm{MX}(x_3, 1; x_1 x_2);$$

$$f_{41} = \mathrm{MX}(1, x_3; \Phi^4),$$
$$\mathrm{MX}(1, 1, 1, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(1, x_3; \Phi^4),$$
$$\Phi^4 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2,$$
$$f_{41} = \mathrm{MX}(1, x_3; x_1 x_2).$$

На основе построенных декомпозиций следует, что

$$Q_0 = z_1,\ Q_1 = z_2,\ \Phi = x_1 x_2,$$

где $z_i = \{0, x_3, 1\}$.

При этом порождающая формула модуля имеет вид:

$$F_7(3) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Подставляя в это соотношение выражения для функций Q_i и Ф, получим искомую порождающую формулу:

$$F_7(3) = \mathrm{MX}(z_1, z_2; x_1 x_2).$$

Этой формуле соответствует схема, наиболее простая из известных схем модуля УЛМ3 с четырьмя входами (рис. 7.17). В этой схеме входы x_1 и x_2 являются информационными, а входы z_1 и z_2 — информационно-настроечными.

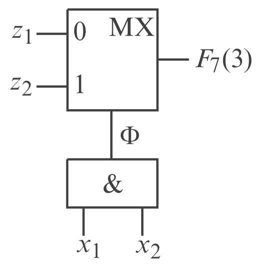

Рис. 7.17

Таким образом, модификация мультиплексорного метода позволила эффективно объединить «четвертинки» заданных БФУ, что не удавалось выполнить при непосредственном применении мультиплексорного метода.

Модификация мультиплексорного метода была впервые использована при построении модуля УЛМ3 [23], порождающая формула которого имеет вид:

$$F_8(3) = \mathrm{MX}(z_1, z_2; !x_1 x_2).$$

Эта формула совпадает с порождающей формулой трехмембранного пневматического реле Р-3Ф, которое входит в состав серии пневматических элементов УСЭППА [24, 25].

Основы изложенного в настоящем разделе метода описаны в [26].

7.4. Дополнительные методы

7.4.1. Использование преобразований булевых функций

В разд. 1.7 рассмотрены новые преобразования БФУ вида:

$$f = \left(!f(x_i{=}0)!x_i \vee f(x_i{=}1)x_i\right) \oplus !x_i = f_1 \oplus !x_i;$$
$$f = \left(f(x_i{=}0)!x_i \vee !f(x_i{=}1)x_i\right) \oplus x_i = f_2 \oplus !x_i.$$

Из этих соотношений следует, что $f_1 = f \oplus !x_i$, $f_2 = f \oplus x_i$.
Известно также, что $f_3 = f = f \oplus 0$; $f_4 = !f = f \oplus 1$.
Таким образом, модуль с порождающей формулой

$$F = f \oplus z$$

при $z = \{0, 1\}$ может породить две функции, при $z = \{0, !x_i$ или x_i, $1\}$ — три функции, при $z = \{0, !x_i, x_i, 1\}$ — четыре функции, а при $z = \{0, !x_1, x_1, \ldots, !x_n, x_n, 1\}$ — 2^{n+1} функций.

Если не все заданные БФУ можно объединить в ПФО с помощью предложенного соотношения, то они могут быть разбиты на группы, для каждой из которых это соотношение можно использовать. После этого полученные формулы могут быть объединены в порождающую формулу модуля одним из изложенных методов.

Пример 7.9. Построить модуль УЛМ3, применяя рассмотренный метод.

Выберем формулу $f = x_1 x_2 x_3$. Построим ПФО вида:

$$F_9(3) = z \oplus f = z \oplus x_1 x_2 x_3.$$

При $z = 0$ $F_9(3) = x_1 x_2 x_3$, при $z = !x_1$ $F_9(3) = !x_1 \vee x_2 x_3$, при $z = x_1$ $F_9(3) = x_1(!x_2 \vee !x_3)$, при $z = 1$ $F_9(3) = !x_1 \vee !x_2 \vee !x_3$.

Таким образом, схема (рис. 7.18) с четырьмя входами, состоящая из двух логических элементов, является искомым модулем.

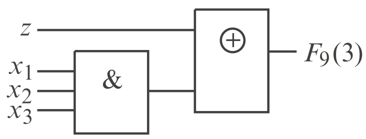

Рис. 7.18

При этом отметим, что построенный модуль [27] имеет три информационных и один настроечный вход, в то время как аналогичный модуль (рис. 7.12) имеет два информационных и два информационно-настроечных входа при одинаковых алфавитах настройки: $0, !x_1, x_1, 1$.

7.4.2. Использование *NPN*-классификации

Этот метод известен [13, 14] и приводится для общности.

Разобьем, исходя из принципа двойственности, заданное множество БФУ на два подмножества (группы). Построим одним из известных методов порождающую функцию для БФУ первой группы. Тогда инверсия ПФ позволяет получить булевы функции, однотипные с функциями второй группы. При этом соответствующий модуль может иметь либо два выхода (прямой и инверсный), либо один выход, соединенный с двухвходовым элементом НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, один из входов которого подключен к схеме, реализующей ПФ, а на второй его вход могут подаваться константы 0 и 1.

Пример 7.10. Построить модуль УЛМЗ, применяя предлагаемый подход.

Сформируем на основе принципа двойственности две группы формул:

$$\{f_1 = x_1 x_2 x_3, \qquad f_3 = x_1 \vee x_2 x_3\} \text{ и}$$
$$\{f_2 = x_1(x_2 \vee x_3), \ \ f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3\}.$$

Построим методом «покрывающих деревьев» порождающую формулу для первой группы формул: $F = x_1 \# x_2 x_3 \# z_1$, где $z_1 =$ $= \{0, 1\}$. Тогда искомая порождающая формула может быть записана следующим образом:

$$F_{10}(3) = F \oplus z_2 = (x_1 \# x_2 x_3 \# z_1) \oplus z_2.$$

Эта порождающая формула реализуется схемой (рис. 7.19) с пятью входами, состоящей из трех логических элементов. При этом $z_i = \{0, 1\}$.

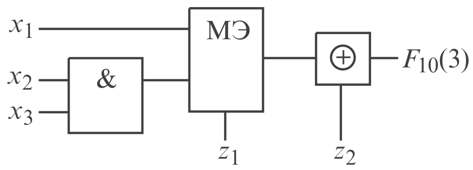

Рис. 7.19

Из приведенного примера следует, что использование этого метода в данном случае неэффективно.

В заключение главы отметим, что, применяя в методе «покрывающих деревьев» вместо трехвходовых мажоритарных элементов мультиплексоры «2 в 1», может быть построен однородный настраиваемый каскад Майтра [3] из двух ячеек (рис. 7.20), который явля-

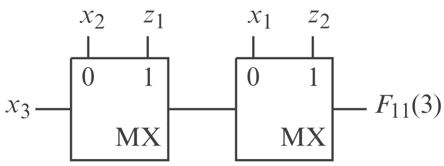

Рис. 7.20

ется модулем УЛМ3 как в рассмотренном базисе, так и в базисе {&, ∨, ⊕, !}. В первом случае $z_i = \{0, 1\}$, а во втором — $z_1 = \{0, !x_2, 1\}$, $z_2 = \{0, !x_1, 1\}$.

В следующей главе рассмотренные выше методы применяются для построения более сложных модулей.

Выводы

1. Предложен мультиплексорный метод построения порождающих функций многофункциональных логических модулей из элементов с односторонней проводимостью (функциональных элементов) по заданному списку булевых функций *n* переменных. Этот метод является аналитическим и в отличие от известного также аналитического метода позволяет объединять в порождающую функцию не только сами БФУ, но и различные фрагменты их столбцов значений (например, «половинки»), что обычно позволяет сократить число переменных в порождающей функции, соответствующих входам модуля.

2. При фиксированном значении *k* предлагаемый метод позволяет объединять в порождающую функцию модуля различные фрагменты, являющиеся функциями $n - k$ переменных. Эти фрагменты выбираются из порождающей функции для образования заданной БФУ в общем случае с помощью функций *k* переменных, подаваемых на «нижние» входы мультиплексора, входящего в стандартные схемы модулей. При $k = 0$ на эти входы подаются константы 0 и 1, а при $k = 1$ кроме констант подается крайняя левая переменная таблицы истинности заданных БФУ, а возможно, и ее инверсия.

3. Предложено определять каждую настройку модуля на реализацию заданной БФУ с помощью решения логического уравнения в мультиплексорной форме.

4. Если в мультиплексорном методе при фиксированном *k* в порождающую функцию объдиняются различные фрагменты, входящие во все заданные БФУ, то в его модификации для каждой БФУ определяются фрагменты и функции настройки на ее реализацию, а в порождающую функцию модуля мультиплексорно объединяются порождающие функции, построенные для фрагментов, расположенных на определенных позициях, и функций настройки для всех заданных БФУ.

5. Кроме универсального мультиплексорного метода и его модификации рассмотрены также дополнительные методы построения порождающих функций.

6. С помощью мультиплексорного метода построены порождающие функции большого числа модулей, которые защищены 26 авторскими свидетельствами СССР. Построение этих модулей описывается в гл. 8. Общее число авторских свидетельств, полученных автором на модули из функциональных элементов, равно 31.

Литература

1. *Yau S. S., Tang C. K.* Universal logic modules and their applications // IEEE Trans. on Computers. 1970. N 2.

2. *Preparata F. P., Muller D. E.* Generation of near-optimal universal boolean functions // J. Comp. and System Sciences. 1970. N 2.

3. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.

4. *Дулепов Е. Г.* Многофункциональные симметрические схемы // Автоматика и телемеханика. 1970. № 5.

5. *Cohen S., Winder R. O.* Threshold gate building blocks // IEEE Trans. on Computers. 1969. N 9.

6. *Попов Ю. А., Воронин А. Т., Сладков А. Б.* Вопросы проектирования схем с высоким уровнем интеграции на основе КНС-технологии // Дискретные системы. Т. 1. Симпозиум IFAC. Рига: Зинатне, 1974.

7. *Якубайтис Э. А.* Логические автоматы и микромодули. Рига: Зинатне, 1975.

8. *Якубайтис Э. А.* Теория автоматов. Многофункциональные логические модули // Итоги науки и техники: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1976. № 13.

9. *Малев В. А.* Структурная избыточность в логических устройствах. М.: Связь, 1978.

10. *Мищенко В. А., Козюминский В. Д., Семашко А. Н.* Многофункциональные автоматы и элементная база цифровых ЭВМ. М.: Радио и связь, 1981.

11. *Пупырев Е. И.* Перестраиваемые автоматы и микропроцессорные системы. М.: Наука, 1984.

12. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Унифицированные логические схемы. Л.: ИПК СП, 1981.

13. *Варшавский В. И., Песчанский В. А., Мараховский В. Б.* Многофункциональные логические модули, реализующие все функции трех и четырех переменных // Тез. докл. II Всесоюз. совещ. по теории релейных устройств и конечных автоматов. Рига, 1971.

14. *Stone H. E.* Universal logic modules // Recent developments in switching theory / Ed. A. Makhopadhyay. New York: Acad. Press, 1971.

15. *Стародубцев Н. А.* Соотношения для числа настроек многофункциональных логических модулей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1972. № 4.

16. *Викентьев Л. Ф., Аляев Ю. А., Шалыто А. А.* и др. Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1361539 // Бюл. изобр. 1987. № 47.

17. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Вопросы выбора и применения многофункциональных логических модулей // Дискретные системы. Т. 1. Симпозиум IFAC. Рига: Зинатне, 1974.

18. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* и др. Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 813787 // Бюл. изобр. 1981. № 10.

19. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1070693 // Бюл. изобр. 1984. № 4.

20. *Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1283744 // Бюл. изобр. 1987. № 2.

21. *Микросхемы* гибридные сложные — микросборки «Пакет». Руководство по применению. Отраслевой стандарт. ОСТ 5.8354—74.

22. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: ИПК СП, 1983.

23. *Артюхов В. Л., Вольский В. Е., Шалыто А. А.* Логический модуль. А. с. СССР № 798806 // Бюл. изобр. 1981. № 3.

24. *Юдицкий С. А., Тагаевская А. А., Ефремова Т. К.* и др. Агрегатное построение пневматических систем управления. М.: Энергия, 1973.

25. *Вольский В. Е., Пушин Ю. Н., Юнг В. Н.* Проектирование пневматических систем управления судовыми энергетическими установками. Л.: Судостроение, 1975.

26. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: ИПК СП, 1984.

27. *Артюхов В. Л., Фишман Л. М., Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1096636 // Бюл. изобр. 1984. № 21.