Глава 6

Использование мультиплексорного метода для реализации схем в различных элементных базисах

6.1. Реализация булевых функций схемами из двухвходовых элементов И—НЕ (ИЛИ—НЕ)

Этот элемент реализует булеву функцию $F(a, b) = \left|1110\right|^T = !(ab) = = !a \vee !b$.

При $n - k = 0$ справедливы соотношения:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = !(\Phi_1 \Phi_2);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; \Phi_1, \Phi_2).$$

При $n - k = 1$ для функции f, состоящей из двух типов фрагментов $\{1, !x_n\}$, справедливы соотношения:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = !(\Phi x_n);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(1, !x_n; \Phi).$$

Для булевых функций, состоящих из двух типов фрагментов $\{!Q, 1\}$, справедливы соотношения:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = !(\Phi Q);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(1, !Q; \Phi).$$

Пример 6.1. Декомпозировать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left|1011\ 1110\right|^T$$

по образу рассматриваемого элемента.

Так как при $n - k = 1$ БФУ содержит только разрешенные фрагменты, то

$$f(x_1, x_2, x_3) = !(\Phi x_3);$$
$$\mathrm{MX}(!x_3, 1, 1, !x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(1, !x_3; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !(x_1 \oplus x_2).$$

Пример 6.2. Декомпозировать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0001\ 1111\ 1111\ 0001\right|^T$$

по образу рассматриваемого элемента.

При $n - k = 1$ БФУ не может быть декомпозирована, так как содержит три типа фрагментов $\{0, x_n, 1\}$. Однако в данном случае может быть выполнена декомпозиция по подфункции $Q = !(x_3 x_4)$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = !(\Phi Q);$$
$$\mathrm{MX}(!Q, 1, 1, !Q; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(1, !Q; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !(x_1 \oplus x_2).$$

Пример 6.3. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2) = \left|0110\right|^T = !x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 = x_1 \oplus x_2$$

схемой из рассматриваемых элементов.

Так как столбец значений БФУ содержит запрещенный фрагмент длиной два (тип фрагмента — x_2), от которого нельзя избавиться при перестановке переменных, то логическое уравнение составим при $n - k = 0$:

$$x_1 \oplus x_2 = !(\Phi_1 \Phi_2);$$
$$\mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет девять решений. В семи из них по крайней мере одна из остаточных является функцией «равнозначность», которая декомпозируется не проще заданной БФУ. Среди оставшихся двух решений выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 1; x_1, x_2) = !x_1 \vee x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee !x_2.$$

Столбец значений функции Φ_1 содержит запрещенный фрагмент длиной два, поэтому для реализации этой функции составим уравнение при $n - k = 0$:

$$!x_1 \vee x_2 = !(\Phi_{11}\Phi_{12});$$
$$\text{MX}(1,1,0,1; x_1, x_2) = \text{MX}(1,1,1,0; \Phi_{11}, \Phi_{12}).$$

Это уравнение имеет 27 решений, среди которых выберем следующее:

$$\Phi_{11} = \text{MX}(0,0,1,1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_{12} = \text{MX}(1,1,1,0; x_1, x_2) = !(x_1 x_2).$$

Столбец значений функции Φ_2 содержит только разрешенные фрагменты длиной два, и поэтому составим и решим уравнение при $n - k = 1$:

$$x_1 \vee !x_2 = !(\Phi x_2);$$
$$\text{MX}(!x_2, 1; x_1) = \text{MX}(1, !x_2; \Phi);$$
$$\Phi = \text{MX}(1,0; x_1) = !x_1.$$

Так как в данном случае переменная $!x_1$ недоступна, то заданная БФУ реализуется неминимальной схемой из пяти элементов. Это связано с видом использованной декомпозиции для функции Φ_2. Для этой БФУ при $n - k = 2$ можно записать:

$$x_1 \vee !x_2 = !(\Phi_{21}\Phi_{22});$$
$$\text{MX}(1,0,1,1; x_1, x_2) = \text{MX}(1,1,1,0; \Phi_{21}, \Phi_{22}).$$

Это уравнение имеет 27 решений, среди которых выберем следующее:

$$\Phi_{21} = \text{MX}(1,1,1,0; x_1, x_2) = !(x_1 x_2);$$
$$\Phi_{22} = \text{MX}(0,1,0,1; x_1, x_2) = x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется с помощью предлагаемого метода схемой из четырех элементов, такой же, как получена в [1] путем перебора.

Пример 6.4. Определить класс БФУ, которые оптимально реализуются только при применении соотношения $f = !(\Phi x_n)$.

При использовании этого соотношения может быть построена только каскадная схема.

Для булевой функции n переменных, реализуемой каскадно, известно [2], что столбец ее значений должен состоять не более чем из двух типов фрагментов длиной 2, 4, ..., $2^n - 1$. Из изложенного следует, что БФУ этого класса могут состоять только из таких фрагментов длиной два, как 1 и $!x_n$.

Рассмотрим каскад из двух элементов И—НЕ, для которого может быть записано соотношение:

$$f(\Phi, x_{n-1}, x_n) = \left| 1010\ 1011 \right|^T = \Phi x_{n-1} \vee !x_n.$$

Таким образом, БФУ этого класса могут состоять из фрагментов длиной четыре только следующих двух типов: $!x_n, !x_{n-1} \vee !x_n$.

Рассмотрим каскад из трех элементов И—НЕ, для которого может быть записано соотношение

$$f(\Phi, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \left| 1011\ 1011\ 1011\ 1010 \right|^T =$$

$$= (!\Phi \vee !x_{n-2}) x_{n-1} \vee !x_n.$$

Таким образом, БФУ этого класса могут состоять из фрагментов длиной восемь только следующих двух типов: $x_{n-1} \vee !x_n$, $!x_{n-2} x_{n-1} \vee !x_n$.

Каскад из четырех элементов И—НЕ описывается формулой

$$f = (\Phi x_{n-3} \vee !x_{n-2}) x_{n-1} \vee !x_n.$$

БФУ этого класса могут состоять из фрагментов длиной 16 только следующих двух типов: $!x_{n-2} x_{n-1} \vee !x_n$, $(x_{n-3} \vee !x_{n-2}) x_{n-1} \vee !x_n$.

Продолжая этот анализ, можно показать, как это сделано в [3], что рассматриваемый каскад реализует только булевы формулы, в которых знаки & и $\vee$ чередуются, а чередование инверсий начинается после двух первых букв. При этом при нечетных n формулы начинаются с дизъюнкции инверсий, а при четных n — с конъюнкции.

Аналогичные результаты могут быть получены и для двухвходовых элементов ИЛИ—НЕ.

6.2. Реализация булевых функций схемами из трехвходовых монотонных модулей

Для функций, монотонных по переменной x_i, выполняется соотношение

$$f(x_i = 0) \leqslant f(x_i = 1).$$

При этом в [4] приведены следующие соотношения:

$$f(x_i = 0) f(x_i = 1) = f(x_i = 0);$$
$$f(x_i = 0) \vee f(x_i = 1) = f(x_i = 1);$$
$$f = f(x_i = 0) \vee x_i f(x_i = 1).$$

Для функций, монотонных по переменной $!x_i$, выполняется соотношение

$$f(x_i=0) \geqslant f(x_i=1).$$

При этом в [4] приведены следующие соотношения:

$$f(x_i=0)\, f(x_i=1) = f(x_i=1);$$
$$f(x_i=0) \vee f(x_i=1) = f(x_i=0);$$
$$f = !x_i\, f(x_i=0) \vee f(x_i=1).$$

Простейший модуль рассматриваемого типа описывается БФУ

$$F(a, b, c) = \left|0001\ 1111\right|^T = a \vee bc.$$

При перестановке входных переменных эта функция порождает еще два типа столбцов:

$$F(b, a, c) = F(c, a, b) = \left|0011\ 0111\right|^T;$$
$$F(c, b, a) = F(b, c, a) = \left|0101\ 0111\right|^T.$$

1. При $n - k = 0$ справедливы уравнения:

$$f = \Phi_1 \vee \Phi_2\Phi_3,\ f = \Phi_2 \vee \Phi_1\Phi_3,\ f = \Phi_3 \vee \Phi_1\Phi_2.$$

Каждое из этих уравнений имеет $3^{t_0} \cdot 5^{t_1}$ решений.

2. При $n - k = 1$ справедливы уравнения:

$$f = \Phi_1 \vee \Phi_2 x_n,\quad f = \mathrm{MX}(0, x_n, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$f = \Phi_2 \vee \Phi_1 x_n,\quad f = \mathrm{MX}(0, 1, x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$f = x_n \vee \Phi_1\Phi_2,\quad f = \mathrm{MX}(x_n, x_n, x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Первые два уравнения имеют 2^{t_1} решений, а третье — 3^{t_2} решений.

С помощью первых двух уравнений реализуются БФУ, столбцы которых состоят из трех типов фрагментов длиной два — $\{0, x_n, 1\}$, а с помощью третьего — БФУ, столбцы значений которых состоят только из двух типов фрагментов — $\{x_n, 1\}$.

Частным случаем для первых двух уравнений является разложение БФУ, монотонных по переменной x_n:

$$f = f(x_n=0) \vee x_n f(x_n=1).$$

3. При $n - k = 2$ справедливы уравнения:

$$f = \Phi \vee x_{n-1} x_n, \quad f = \mathrm{MX}(x_{n-1} x_n, 1; \Phi);$$
$$f = x_{n-1} \vee \Phi x_n, \quad f = \mathrm{MX}(x_{n-1}, x_{n-1} \vee x_n; \Phi);$$
$$f = x_n \vee \Phi x_{n-1}, \quad f = \mathrm{MX}(x_n, x_{n-1} \vee x_n; \Phi).$$

С помощью этих уравнений реализуются БФУ, столбцы которых состоят соответственно из следующих типов фрагментов длиной четыре: $\{x_{n-1} x_n, 1\}$, $\{x_{n-1}, x_{n-1} \vee x_n\}$, $\{x_n, x_{n-1} \vee x_n\}$.

4. При $n - k = 1$ справедливы уравнения:

$$f = \Phi_1 \vee \Phi_2 !x_n, \quad f = \mathrm{MX}(0, !x_n, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$f = \Phi_2 \vee \Phi_1 !x_n, \quad f = \mathrm{MX}(0, 1, !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$f = !x_n \vee \Phi_1 \Phi_2, \quad f = \mathrm{MX}(!x_n, !x_n, !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Первые два уравнения имеют 2^{t_1} решений, а третье — 3^{t_3} решений.

С помощью первых двух уравнений реализуются БФУ, столбцы которых состоят из трех типов фрагментов длиной два — $\{0, !x_n, 1\}$, а с помощью третьего — БФУ, столбцы значений которых состоят только из двух типов фрагментов — $\{!x_n, 1\}$.

Частным случаем для первых двух уравнений является разложение БФУ, монотонных по переменной $!x_n$:

$$f = !x_n f(x_n = 0) \vee f(x_n = 1).$$

5. При $n - k = 2$ по образу рассматриваемого элемента могут быть декомпозированы только БФУ, содержащие два типа фрагментов Q_0 и Q_1 длиной четыре, для которых выполняется одно из соотношений:

$$Q_0 !\Phi \vee Q_1 \Phi = \Phi \vee \tilde{x}_{n-1} \tilde{x}_n;$$
$$Q_0 !\Phi \vee Q_1 \Phi = \tilde{x}_{n-1} \vee \Phi \tilde{x}_n;$$
$$Q_0 !\Phi \vee Q_1 \Phi = \tilde{x}_n \vee \Phi \tilde{x}_{n-1}.$$

6. Рассматриваемый модуль позволяет также проводить декомпозицию по подфункции Q:

$$f = \Phi_1 \vee \Phi_2 Q, \quad f = \mathrm{MX}(0, Q, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$f = \Phi_2 \vee \Phi_1 Q, \quad f = \mathrm{MX}(0, 1, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$f = Q \vee \Phi_1 \Phi_2, \quad f = \mathrm{MX}(Q, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Пример 6.5. Декомпозировать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left|0001 \ 0111\right|^T$$

по образу рассматриваемого модуля.

При $n - k = 2$ БФУ не может быть декомпозирована.

При $n - k = 1$ используем первое уравнение для переменной x_3:

$$f = \Phi_1 \vee \Phi_2 x_3;$$

$$\mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2;$$

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Таким образом, $f = x_1 x_2 \vee (x_1 \oplus x_2) x_3$ и $f = x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2) x_3$, причем в обоих решениях $\Phi_1 = f(x_3 = 0)$ и только во втором — $\Phi_2 = f(x_3 = 1)$. Так как во втором решении обе функции двух переменных монотонны, то заданная БФУ может быть реализована схемой из трех модулей.

Пример 6.6. Декомпозировать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1111\ 0110\ 0110\ 0000 \right|^T,$$

немонотонную по переменной x_4, по образу рассматриваемого модуля.

Выполним декомпозицию по функции $Q = x_3 \oplus x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi_1 \vee \Phi_2 Q;$$

$$\mathrm{MX}(1, Q, Q, 0; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, Q, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди двух решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; x_1, x_2) = !x_1 \vee !x_2.$$

6.3. Реализация булевых функций схемами из WOS-модулей

Известны работы [5, 6], авторы которых пытались определить наиболее логически эффективные БФУ трех переменных.

Так, в [5] на основе исследования композиций таких БФУ сделан вывод, что наиболее эффективной является функция

$$F(a, b, c) = \left| 0010\ 1101 \right|^T = a \oplus b!c.$$

Авторы этой работы не обратили внимания на то, что столбец значений указанной БФУ состоит из четырех типов фрагментов длиной два, и не изложили метод реализации БФУ схемами из элементов, описываемых такой функцией.

В [7] был рассмотрен подход к реализации БФУ, заданных ТИ, на однотипных трехвходовых элементах, у которых столбец значений функции, описывающей функционирование каждого из них, состоит из четырех типов фрагментов длиной два. Подход состоит из трех этапов: преобразование заданной ТИ в новую, учитывающую свойства используемого элемента; построение по новой ТИ канонической таблицы, специфической для данного элемента; построение по этой таблице искомой схемы.

Недостатки этого подхода состоят в том, что, во-первых, для каждого из существующих 24 типов трехвходовых элементов, обладающих указанным выше свойством, приходится разрабатывать свой метод синтеза, а во-вторых, он не применим для других типов элементов. В [8] такой метод разработан применительно к WOS-модулям, предложенным в [6].

В [8] в качестве WOS-модуля рассматривается элемент, который описывается БФ вида:

$$F(a, b, c) = \left|1011\ 0100\right|^T = 1 \oplus a \oplus c \oplus bc = !a \oplus !bc.$$

Используем предлагаемый универсальный мультиплексорный метод применительно к синтезу схем на этих модулях, специфика которых определяется в результате анализа их функциональных возможностей.

1. В данном случае существуют 3! = 6 порядков записи этой функции (табл. 6.1).

Таблица 6.1

№	Порядок переменных	Транспонированный столбец значений	Фрагменты			
1	*a, b, c*	1011 0100	!*c*	1	*c*	0
2	*a, c, b*	1101 0010	1	*b*	0	!*b*
3	*b, a, c*	1001 1100	!*c*	*c*	1	0
4	*b, c, a*	1001 1010	!*a*	*a*	!*a*	!*a*
5	*c, a, b*	1100 0110	1	0	*b*	!*b*
6	*c, b, a*	1010 0110	!*a*	!*a*	*a*	!*a*

2. Если каждой строке этой таблицы для фрагментов длиной один ($n - k = 0$) сопоставить переменные Φ_1, Φ_2, Φ_3, то получим шесть декомпозиций заданной функции f:

$$1.\ f = !\Phi_1 \oplus !\Phi_2\Phi_3;\ 2.\ f = !\Phi_1 \oplus !\Phi_3\Phi_2;\ 3.\ f = !\Phi_2 \oplus !\Phi_1\Phi_3;$$
$$4.\ f = !\Phi_3 \oplus !\Phi_1\Phi_2;\ 5.\ f = !\Phi_2 \oplus !\Phi_3\Phi_1;\ 6.\ f = !\Phi_3 \oplus !\Phi_2\Phi_1.$$

Каждая из этих декомпозиций может быть найдена для произвольной БФУ, однако нахождение каждой такой декомпозиции с определенными свойствами функций Φ_1, Φ_2 и Φ_3 связано с огромным перебором вариантов, число которых равно $4^{t_0+t_1} = 4^{2^n}$.

3. Если каждой строке этой таблицы для фрагментов длиной два ($n - k = 1$) сопоставить переменные Φ_1, Φ_2, x_n, то получим шесть декомпозиций заданной функции f:

$$
\begin{aligned}
&1.\ f = !\Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_n = \mathrm{MX}(!x_n, 1, x_n, 0; \Phi_1, \Phi_2);\\
&2.\ f = !\Phi_1 \oplus !x_n \Phi_2 = \mathrm{MX}(1, x_n, 0, !x_n; \Phi_1, \Phi_2);\\
&3.\ f = !\Phi_2 \oplus !\Phi_1 x_n = \mathrm{MX}(!x_n, x_n, 1, 0; \Phi_1, \Phi_2);\\
&4.\ f = !x_n \oplus !\Phi_1 \Phi_2 = \mathrm{MX}(!x_n, x_n, !x_n, !x_n; \Phi_1, \Phi_2);\\
&5.\ f = !\Phi_2 \oplus !x_n \Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, x_n, !x_n; \Phi_1, \Phi_2);\\
&6.\ f = !x_n \oplus !\Phi_2 \Phi_1 = \mathrm{MX}(!x_n, !x_n, x_n, !x_n; \Phi_1, \Phi_2).
\end{aligned}
$$

Для соотношений 1, 2, 3, 5 существует единственное решение (набор функций Φ_1 и Φ_2) для произвольной БФУ.

Соотношения 4 и 6 применимы для БФУ, столбцы значений которых состоят только из фрагментов $!x_n$ и x_n. Число решений в этих случаях равно 3^{t_2}. Для рассматриваемого модуля при $n - k = 0$, 1 нет необходимости иметь в наличии инверсные входные переменные.

4. Если каждой строке этой таблицы для фрагментов длиной четыре ($n - k = 2$) сопоставить переменные Φ, x_{n-1}, x_n, то получим шесть декомпозиций заданной функции f:

$$
\begin{aligned}
&1.\ f = !\Phi \oplus !x_{n-1} x_n = \mathrm{MX}(x_{n-1} \vee !x_n, !x_{n-1} x_n; \Phi);\\
&2.\ f = !\Phi \oplus !x_n x_{n-1} = \mathrm{MX}(!x_{n-1} \vee x_n, x_{n-1} !x_n; \Phi);\\
&3.\ f = !x_{n-1} \oplus !\Phi x_n = \mathrm{MX}\big(!(x_{n-1} \oplus x_n), !x_{n-1}; \Phi\big);\\
&4.\ f = !x_n \oplus !\Phi x_{n-1} = \mathrm{MX}\big(!(x_{n-1} \oplus x_n), !x_n; \Phi\big);\\
&5.\ f = !x_{n-1} \oplus !x_n \Phi = \mathrm{MX}(!x_n, x_{n-1} \oplus x_n; \Phi);\\
&6.\ f = !x_n \oplus !x_{n-1} \Phi = \mathrm{MX}(!x_{n-1}, x_{n-1} \oplus x_n; \Phi).
\end{aligned}
$$

Каждое из этих соотношений может быть применено к соответствующему классу БФУ. Так, например, первое из них применимо к БФУ, столбцы значений которых образованы из фрагментов только двух типов:

$$Q_0 = \left| 1011 \right|^T = x_{n-1} \vee !x_n, \ Q_1 = \left| 0100 \right|^T = !x_{n-1} x_n.$$

Для каждого из этих классов решение, если оно существует, единственно.

Отметим, что i-е соотношение при $n - k = 2$ содержит в том числе и все решения, которые могут быть получены для i-х соотношений при $n - k = 1, 2$. При этом i-е соотношение при $n - k = 1$ содержит в том числе и все решения, которые могут быть получены для i-го соотношения при $n - k = 2$.

При $n - k = 2$ и доступности прямых и инверсных входных переменных нет необходимости запоминать разрешенные фрагменты длиной четыре, а вместо этого достаточно проверить два условия:

— число типов фрагментов в столбце значений должно быть равно двум;

— должно выполняться одно из трех соотношений:

$$Q_0!\Phi \vee Q_1\Phi = !\Phi \oplus \widetilde{x}_{n-1}\widetilde{x}_n;$$
$$Q_0!\Phi \vee Q_1\Phi = !x_{n-1} \oplus \widetilde{\Phi}\widetilde{x}_n;$$
$$Q_0!\Phi \vee Q_1\Phi = !x_n \oplus \widetilde{\Phi}\widetilde{x}_{n-1}.$$

5. Из соотношений при $n - k = 1$ могут быть получены также шесть соотношений для проведения декомпозиций по функции $Q(X_1)$:

$$1.\ f = !\Phi_1 \oplus !\Phi_2 Q = \mathrm{MX}(!Q, 1, Q, 0; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$2.\ f = !\Phi_1 \oplus !Q!\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, Q, 0, !Q; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$3.\ f = !\Phi_2 \oplus !\Phi_1 Q = \mathrm{MX}(!Q, Q, 1, 0; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$4.\ f = !Q \oplus !\Phi_1\Phi_2 = \mathrm{MX}(!Q, Q, !Q, !Q; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$5.\ f = !\Phi_2 \oplus !Q\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, Q, !Q; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$6.\ f = !Q \oplus !\Phi_2\Phi_1 = \mathrm{MX}(!Q, !Q, Q, !Q; \Phi_1, \Phi_2).$$

В заключение отметим, что при синтезе на каждом шаге декомпозиция должна выполняться начиная с максимальной величины $n - k$, что позволяет сократить перебор.

Пример 6.7. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1001\ 1010\ 1010\ 1001 \right|^T$$

схемой из WOS-модулей.

Столбец значений этой БФУ состоит из двух типов фрагментов длиной четыре: $Q_0 = !(x_3 \oplus x_4)$, $Q_1 = !x_4$.

Используя четвертое соотношение при $n - k = 2$, составим и решим уравнение:

$$f = !x_4 \oplus !\Phi x_3;$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_0; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2).$$

Для реализации функции Ф, применяя четвертое соотношение при $n - k = 1$, составим и решим уравнение:

$$\Phi = !x_2 \oplus !\Phi_1 \Phi_2;$$
$$\mathrm{MX}(x_2, !x_2; x_1) = \mathrm{MX}(!x_2, x_2, x_2, x_2; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из двух WOS-модулей:

$$a = x_2,\ \ b = 0,\ \ c = !x_1,\ \Phi = !x_2 \oplus !x_1 = x_1 \oplus x_2;$$
$$a = x_4,\ \ b = \Phi,\ \ c = x_3,\ \ f = !x_4 \oplus !\Phi x_3 = (\Phi \vee !x_3) \oplus x_4 =$$
$$= \big((x_1 \oplus x_2) \vee !x_3 \big) \oplus x_4.$$

Пример 6.8. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0101\ \ 0110\ \ 0110\ \ 0101 \right|^T$$

схемой из WOS-модулей.

Столбец значений этой БФУ состоит из двух типов фрагментов длиной четыре: $Q_0 = x_4$, $Q_1 = x_3 \oplus x_4$. Эти фрагменты являются разрешенными, так как выполняется соотношение

$$x_4 !\Phi \vee (x_3 \oplus x_4)\Phi = x_4 \oplus x_3 \Phi.$$

Составим и решим уравнение:

$$f = x_4 \oplus x_3 \Phi;$$
$$\mathrm{MX}(x_4, x_3 \oplus x_4, x_3 \oplus x_4, x_4; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(x_4, x_3 \oplus x_4; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2).$$

Реализация функции Ф приведена в предыдущем примере. Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из двух WOS-модулей:

$$a = !x_1,\ \ b = 0,\ \ \ \ c = x_2,\ \ \Phi = x_1 \oplus x_2;$$
$$a = !x_4,\ \ b = !x_3,\ \ c = \Phi,\ \ f = !x_4 \oplus x_3 \Phi = (x_1 \oplus x_2) x_3 \oplus x_4.$$

Пример 6.9. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1001\ \ 1010\ \ 1010\ \ 0101 \right|^T$$

схемой из WOS-модулей.

Столбец значений этой БФУ при $n - k = 2$ не реализуется, так как он содержит три типа фрагментов длиной четыре. Выбирая первое соотношение при $n - k = 1$, составим и решим уравнение:

$$f = !\Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_4;$$
$$\mathrm{MX}(!x_4, x_4, !x_4, !x_4, !x_4, !x_4, x_4, x_4; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(!x_4, 1, x_4, 0; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3);$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Для реализации функции Φ_1 вновь выберем первое соотношение при $n - k = 1$:

$$\Phi_1 = !\Phi_{11} \oplus !\Phi_{12} x_3;$$
$$\mathrm{MX}(x_3, 0, 0, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(!x_3, 1, x_3, 0; \Phi_{11}, \Phi_{12});$$
$$\Phi_{11} = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; x_1, x_2);$$
$$\Phi_{12} = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2).$$

Декомпозируем функцию Φ_{11}:

$$\Phi_{11} = !\Phi_{111} \oplus !\Phi_{112} x_2;$$
$$\mathrm{MX}(1, !x_2; x_1) = \mathrm{MX}(!x_2, 1, x_2, 0; \Phi_{111}, \Phi_{112});$$
$$\Phi_{111} = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_{112} = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1.$$

Декомпозируем функцию Φ_{12}:

$$\Phi_{12} = !\Phi_{121} \oplus !\Phi_{122} x_2;$$
$$\mathrm{MX}(x_2, 1; x_1) = \mathrm{MX}(!x_2, 1, x_2, 0; \Phi_{121}, \Phi_{122});$$
$$\Phi_{121} = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1;$$
$$\Phi_{122} = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех WOS-модулей:

$$a = !x_1, \quad b = x_1, \quad c = x_2, \quad \Phi_{12} = x_1 \oplus !x_1 x_2 = x_1 \vee x_2;$$
$$a = 0, \quad b = !x_1, \quad c = x_2, \quad \Phi_{11} = 1 \oplus x_1 x_2 = !x_1 \vee !x_2;$$
$$a = \Phi_{11}, \; b = \Phi_{12}, \; c = x_3, \quad \Phi_1 = !\Phi_{11} \oplus !\Phi_{12} x_3 = x_1 x_2 \vee !x_1 !x_2 x_3;$$
$$a = \Phi_1, \quad b = 0, \quad c = x_4, \quad f = !\Phi_1 \oplus (!0) x_4 =$$
$$= (!x_1 \vee !x_2)(x_1 \vee x_2 \vee !x_3) \oplus x_4.$$

Пример 6.10. Декомпозировать мажоритарную функцию трех переменных $f(x_1, x_2, x_3) = \left|0001\ \ 0111\right|^T$ по образу WOS-модулей.

Используя первое соотношение при $n - k = 1$, составим и решим уравнение:

$$f = !\Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_3;$$
$$\mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(!x_3, 1, x_3, 0; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; x_1, x_2) = !x_1 \vee !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !(x_1 \oplus x_2).$$

Таким образом, $f = x_1 x_2 \oplus (x_1 \oplus x_2) x_3$.

Пример 6.11. Реализовать БФУ [9]

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0111\ \ 1011\ \ 0111\ \ 0111\right|^T$$

схемой из WOS-модулей.

Столбец значений этой БФУ при $n - k = 2$ не реализуется, так как он содержит три типа фрагментов длиной четыре. Выбирая первое соотношение при $n - k = 1$, составим и решим уравнение:

$$f = !\Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_4;$$
$$\mathrm{MX}(x_4, 1, !x_4, 1, x_4, 1, x_4, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(!x_4, 1, x_4, 0; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0; x_1, x_2, x_3);$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

Для функции Φ_1 также не могут быть применены соотношения при $n - k = 2$. Вновь выберем первое соотношение при $n - k = 1$:

$$\Phi_1 = !\Phi_{11} \oplus !\Phi_{12} x_3;$$
$$\mathrm{MX}(!x_3, 0, !x_3, !x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(!x_3, 1, x_3, 0; \Phi_{11}, \Phi_{12});$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2);$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2).$$

Используем первое соотношение при $n - k = 2$ для функций $\Phi_{11} = \Phi_{12} = \Phi$:

$$\Phi = !\Phi_0 \oplus !x_1 x_2;$$
$$\mathrm{MX}(!x_1 x_2, !x_1 x_2; 0) = \mathrm{MX}(x_1 \vee !x_2, !x_1 x_2; \Phi_0);$$
$$\Phi_0 = \mathrm{MX}(1, 1; 0) = 1.$$

Таким образом, предлагаемый универсальный метод строит схему из трех WOS-модулей, найденную в [9] с помощью весьма специфичного метода:

$$a=1,\quad b=x_1,\ c=x_2,\ \Phi=!x_1x_2;$$
$$a=\Phi,\quad b=\Phi,\ c=x_3,\ \Phi_1=!\Phi!x_3=(x_1\vee !x_2)!x_3;$$
$$a=\Phi_1,\ b=x_3,\ c=x_4,\ f=!\Phi_1\oplus !x_3x_4=$$
$$=(!x_1x_2\vee x_3)\oplus !x_3x_4=(!x_1x_2\oplus x_4)\vee x_3.$$

Из полученной БФ следует, что она монотонна по x_3:

$$f(x_1,x_2,x_4,x_3)=\left|0111\ 1101\ 0111\ 0111\right|^T.$$

Эта функция содержит два типа фрагментов длиной четыре, но они не являются разрешенными, так как функция $(x_3\vee x_4)!\Phi\vee\vee(!x_3\vee x_4)\Phi$ не сводится к желаемому образу.

Применяя второе соотношение при $n-k=1$, составим и решим уравнение:

$$f=!\Phi_1\oplus !x_3\Phi_2;$$
$$\mathrm{MX}(x_3,1,1,x_3,x_3,1,x_3,1;x_1,x_2,x_4)=$$
$$=\mathrm{MX}(1,x_3,0,!x_3;\Phi_1,\Phi_2);$$
$$\Phi_1=\mathrm{MX}(0,0,0,0,0,0,0,0;x_1,x_2,x_4)=0;$$
$$\Phi_2=\mathrm{MX}(1,0,0,1,1,0,1,0;x_1,x_2,x_4)=x_3.$$

Для функции Φ_2 выполняется четвертое соотношение при $n-k=2$:

$$\Phi_2=!x_4\oplus !\Phi x_2;$$
$$\mathrm{MX}(!x_2\oplus x_4,!x_4;x_1)=\mathrm{MX}(!x_2\oplus x_4,!x_4;\Phi);$$
$$\Phi=\mathrm{MX}(0,1;x_1)=x_1.$$

Таким образом, заданная БФУ с помощью предлагаемого метода может быть реализована схемой всего лишь из д в у х WOS-модулей:

$$a=x_4,\ b=x_1,\ c=x_2,\ \Phi_2=!x_1x_2\oplus !x_4;$$
$$a=0,\quad b=x_3,\ c=\Phi_2,\ f=1\oplus !x_3(!x_1x_2\oplus !x_4)=$$
$$=(!x_1x_2\oplus x_4)\vee x_3.$$

Из приведенного примера следует, что и для данного типа модулей, реализующих произвольные БФУ при наличии только безынверсных входных переменных, использование свойства их монотонности по одной переменной обеспечило упрощение схемы.

6.4. Реализация булевых функций схемами из модулей, универсальных в классе пороговых функций трех переменных

В разд. 7.2.4 построена порождающая формула (ПФ) такого модуля, которая при равной доступности прямых и инверсных входных переменных имеет вид:

$$F = z_1 (z_2 \vee x_2 \vee x_3) \vee z_2 x_2 x_3 .$$

При этом показано, что $z_1 = \{0, x_1, 1\}$, $z_2 = \{0, !x_1, x_1, 1\}$.

Так как этот модуль также универсален в классе произвольных БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из трех букв и в его ПФ объединены представители типов положительно монотонных бесповторных БФ в этом базисе, то число таких модулей, требующихся для реализации одноэтапным формульным методом произвольной БФ в указанном базисе из h букв, удовлетворяет соотношению

$$\left]\frac{h-1}{2}\right[\leqslant L(h,3) \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{3}\right[.$$

Из этого соотношения, в частности, следует, что $2 \leqslant L(5, 3) \leqslant 3$.

Для более эффективного использования этих модулей их настройка должна осуществляться не только константами, переменными и инверсиями переменных, но и функциями. В общем случае эти функции могут подаваться на любые входы модуля.

Ниже будет показано, что это достигается при применении мультиплексорного метода, который, в частности, обеспечивает $L(5, 3) = 2$ (пример *3.22*).

Этот результат позволяет более эффективно реализовать БФ, которые формульным методом реализуются по приведенной выше верхней оценке. Так, например, при $h = 16$ справедливо соотношение $8 \leqslant L(16, 3) \leqslant 10$, а выражение $f = (x_1 x_2 \vee x_3 x_4)(x_5 x_6 \vee \vee x_7 x_8) \vee (x_9 x_{10} \vee x_{11} x_{12})(x_{13} x_{14} \vee x_{15} x_{16})$ реализуется формульным методом, схемой из десяти модулей. Совместное использование формульного и мультиплексорного методов позволяет в данном случае построить схему из девяти модулей.

Изменим обозначения входных переменных в порождающей формуле модуля [10—12]:

$$F(a, b, c, d) = a(b \vee c \vee d) \vee bcd =$$
$$= \left|0000\ 0001\ 0111\ 1111\right|^T = \left|0\ 1\ 7\ 15\right|^T .$$

Покажем, что более глубокое исследование функциональных возможностей модуля позволяет его настраивать на реализацию более широкого класса функций по сравнению с заложенным при его проектировании.

1. На первый взгляд кажется, что модуль реализует только одну БФУ четырех переменных, которая приведена выше. Однако это не так, если учесть возможность переобозначения входных переменных и подачи на входы модуля не только переменных, но и их инверсий.

Для определения БФУ, порождаемых за счет переобозначения переменных, построим для ПФ модуля 4! = 24 таблицы истинности, каждой из которых соответствует определенный порядок переменных a, b, c, d. Результаты этого построения объединены в табл. 6.2, в которой фрагменты длиной четыре транспонированных столбцов значений заданы десятичными эквивалентами.

Таблица 6.2

№	Порядок переменных	Столбец значений	Тип столбца	№	Порядок переменных	Столбец значений	Тип столбца
1	*a, b, c, d*	0 1 7 15	1	13	*c, a, b, d*	0 7 1 15	2
2	*a, b, d, c*	0 1 7 15	1	14	*c, a, d, b*	0 7 1 15	2
3	*a, c, b, d*	0 1 7 15	1	15	*c, b, a, d*	1 3 3 7	3
4	*a, c, d, b*	0 1 7 15	1	16	*c, b, d, a*	1 5 5 7	4
5	*a, d, b, c*	0 1 7 15	1	17	*c, d, a, b*	1 3 3 7	3
6	*a, d, c, b*	0 1 7 15	1	18	*c, d, b, a*	1 5 5 7	4
7	*b, a, c, d*	0 7 1 15	2	19	*d, a, b, c*	0 7 1 15	2
8	*b, a, d, c*	0 7 1 15	2	20	*d, a, c, b*	0 7 1 15	2
9	*b, c, a, d*	1 3 3 7	3	21	*d, b, a, c*	1 3 3 7	3
10	*b, c, d, a*	1 5 5 7	4	22	*d, b, c, a*	1 5 5 7	4
11	*b, d, a, c*	1 3 3 7	3	23	*d, c, a, b*	1 3 3 7	3
12	*b, d, c, a*	1 5 5 7	4	24	*d, c, b, a*	1 5 5 7	4

Если еще раз изменить обозначение переменных и зафиксировать порядок расположения новых переменных, то каждой из этих таблиц истинности будет соответствовать своя функция (тип декомпозиций) четырех переменных.

Пусть при $n - k = 0$ эта БФУ зависит от переменных Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, при $n - k = 1$ — от переменных Φ_1, Φ_2, Φ_3, x_n, при $n - k = 2$ — от переменных Φ_1, Φ_2, x_{n-1}, x_n, а при $n - k = 3$ — от переменных Φ, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n.

2. При $n - k = 0$ поиск решений с требуемыми свойствами связан с огромным перебором, и поэтому в дальнейшем этот случай не рассматривается.

3. Заданный модуль не универсален при $n - k = 1$, так как ни одна из строк этой таблицы не содержит всех четырех типов фрагментов длиной два. Так, например, строке 1 (табл. 6.2) соответствуют декомпозиции вида:

$$f = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_n, x_n, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) =$$
$$= \Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee x_n) \vee \Phi_2\Phi_3 x_n;$$

строке 7 — декомпозиции вида:

$$f = \mathrm{MX}(0, 0, x_n, 1, 0, x_n, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) =$$
$$= \Phi_2(\Phi_1 \vee \Phi_3 \vee x_n) \vee \Phi_1\Phi_3 x_n;$$

строке 9 — декомпозиции вида:

$$f = \mathrm{MX}(0, x_n, 0, 1, 0, 1, x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) =$$
$$= \Phi_3(\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee x_n) \vee \Phi_1\Phi_2 x_n;$$

строке 10 — декомпозиции вида:

$$f = \mathrm{MX}(0, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n, x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) =$$
$$= (\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3) x_n \vee \Phi_1\Phi_2\Phi_3.$$

Первые три соотношения при их выполнении порождают $3^{t_0+t_1} \cdot 2^{t_2}$ декомпозиций, а четвертое — 6^{t_2} декомпозиций. Например, для БФУ $f = |0101\ 0011|^T$ все четыре соотношения порождают по 36 декомпозиций, а для БФУ $f_1 = |0101\ 0111|^T$ первые три соотношения порождают по 24 декомпозиции, а четвертое — 216 декомпозиций.

Каждое из приведенных соотношений содержит по три одинаковых типа фрагментов $\{0, x_n, 1\}$, и поэтому каждое из них может использоваться при декомпозиции произвольной БФУ, положительно монотонной по переменной x_n. Для заданной БФУ, принадлежащей указанному классу, из четырех приведенных выше соотношений должно выбираться то, которое порождает наиболее простые функции Φ_1, Φ_2, Φ_3. Например, простейшую декомпозицию для БФУ $f_1(x_1, x_2, x_3)$ обеспечивает четвертое соотношение:

$$\Phi_1 = x_1, \Phi_2 = x_2, \Phi_3 = 1, f_1 = (\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3) x_3 \vee \Phi_1\Phi_2\Phi_3.$$

Класс декомпозируемых функций при $n - k = 1$ может быть расширен в случае, если можно применять инверсию переменной x_n. При этом может декомпозироваться каждая БФУ, столбец значений которой образован фрагментами $(0, !x_n, 1)$, а во всех приведенных декомпозициях символ x_n должен быть заменен на символ $!x_n$.

Таким образом, модуль позволяет декомпозировать булевы функции, монотонные по переменной x_n или $!x_n$.

Для декомпозиции функций, не монотонных по этой переменной, можно построить БФ и по ней определить, имеет ли она монотонную переменную. При наличии такой переменной она должна использоваться в ТИ в качестве крайней правой.

4. При $n - k = 2$ строке 1 (табл. 6.2) соответствуют декомпозиции вида:

$$f = \text{MX}(0, x_{n-1} x_n, x_{n-1} \vee x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1 (\Phi_2 \vee x_{n-1} \vee x_n) \vee \Phi_2 x_{n-1} x_n;$$

строке 7 — декомпозиции вида:

$$f = \text{MX}(0, x_{n-1} \vee x_n, x_{n-1} x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_2 (\Phi_1 \vee x_{n-1} \vee x_n) \vee \Phi_1 x_{n-1} x_n;$$

строке 9 — декомпозиции вида:

$$f = \text{MX}(x_{n-1} x_n, x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1} \vee x_n; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= x_{n-1} (\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee x_n) \vee \Phi_1 \Phi_2 x_n;$$

строке 10 — декомпозиции вида:

$$f = \text{MX}(x_{n-1} x_n, x_n, x_n, x_{n-1} \vee x_n; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= (\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee x_{n-1}) x_n \vee \Phi_1 \Phi_2 x_{n-1}.$$

Первым двум соотношениям соответствуют одинаковые фрагменты, и если решение существует, то оно единственно. Третье соотношение может породить 2^{t_3} решений (t_3 — число фрагментов x_{n-1} в булевой функции f), а четвертое — 2^{t_2} решений.

Из изложенного следует, что рассматриваемый модуль позволяет декомпозировать три класса функций, каждый из которых определяется следующей номенклатурой фрагментов длиной четыре в их столбцах значений: $\{0, x_{n-1} x_n, x_{n-1} \vee x_n, 1\}$, $\{x_{n-1}, x_{n-1} x_n, x_{n-1} \vee x_n\}$, $\{x_n, x_{n-1} x_n, x_{n-1} \vee x_n\}$, причем в каждом из этих классов могут быть выделены подклассы, каждый из которых определяется только некоторыми фрагментами из соответствующего множества фрагментов.

Отметим, что при построении ПФ этого модуля применялись первое соотношение и фрагменты только первого класса. Таким образом, модуль позволяет декомпозировать более широкий, чем предполагалось при его проектировании, класс БФУ при $n - k = 2$, которые могут быть реализованы схемами, содержащими меньшее число модулей.

Если кроме переменных x_{n-1} и x_n доступны также и их инверсии, то каждое из приведенных соотношений порождает еще по три монотонных по этим переменным соотношения. Например, первое из них порождает соотношения:

$$f = \mathrm{MX}(0, !x_{n-1}x_n, !x_{n-1} \vee x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1(\Phi_2 \vee !x_{n-1} \vee x_n) \vee \Phi_2 !x_{n-1} x_n;$$
$$f = \mathrm{MX}(0, x_{n-1}!x_n, x_{n-1} \vee !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1(\Phi_2 \vee x_{n-1} \vee !x_n) \vee \Phi_2 x_{n-1} !x_n;$$
$$f = \mathrm{MX}(0, !x_{n-1}!x_n, !x_{n-1} \vee !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1(\Phi_2 \vee !x_{n-1} \vee !x_n) \vee \Phi_2 !x_{n-1} !x_n.$$

Таким образом, при использовании рассматриваемого модуля по двум последним переменным, x_{n-1} и x_n, только БФУ, которые содержат фрагменты $x_{n-1} \oplus x_n$ и/или $!(x_{n-1} \oplus x_n)$, не могут быть разложены.

5. При $n - k = 3$ возможны четыре соотношения:

$$f = \mathrm{MX}(x_{n-2}x_{n-1}x_n, x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n; \Phi) =$$
$$= \Phi(x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n) \vee x_{n-2}x_{n-1}x_n;$$
$$f = \mathrm{MX}\big(x_{n-2}, x_{n-1} \vee x_n, x_{n-2} \vee x_{n-1}x_n; \Phi\big) =$$
$$= x_{n-2}(x_{n-1} \vee x_n \vee \Phi) \vee x_{n-1}x_n\Phi;$$
$$f = \mathrm{MX}\big(x_{n-1}(x_{n-2} \vee x_n), x_{n-1} \vee x_{n-2}x_n; \Phi\big) =$$
$$= x_{n-1}(x_{n-2} \vee x_n \vee \Phi) \vee x_{n-2}x_n\Phi;$$
$$f = \mathrm{MX}\big((x_{n-2} \vee x_{n-1})x_n, x_{n-2}x_{n-1} \vee x_n; \Phi\big) =$$
$$= x_n(x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee \Phi) \vee x_{n-2}x_{n-1}\Phi,$$

каждое из которых при равной доступности прямых и инверсных входных переменных порождает по семь соответствующих «монотонных» соотношений.

6. Кроме рассмотренных вариантов разложения БФУ по одной, двум и трем переменным, на основе соотношений для $n - k = 1$ при замене $x_n = Q$ могут быть построены соотношения для проведения разложений по подфункции Q. Это позволяет расширить класс БФУ, декомпозируемых по образу рассматриваемого модуля. Например, если БФУ при $n - k = 2$ содержит три типа фрагментов $\{0, x_{n-1} \oplus x_n, 1\}$, то такая функция может быть декомпозирована, в то время как разложение по двум переменным, x_{n-1} и x_n, не может быть выполнено.

7. Из изложенного следует, что рассматриваемый модуль при проведении декомпозиции мультиплексорным методом «сверху вниз» не позволяет декомпозировать при $n - k > 0$ произвольную БФУ, в то время как при ее проведении формульным методом «снизу вверх» произвольная БФУ всегда может быть декомпозирована. Это объясняется тем, что при применении формульного метода производится изменение метрики: вместо числа переменных n используется число букв h.

Из изложенного также следует, что в тех случаях, когда мультиплексорный метод неприменим, а именно:

при $n - k = 0$ — из-за огромного объема перебора;

при $n - k > 0$ — из-за отсутствия в реализуемой БФУ «разрешенных» фрагментов;

при $n > 5$ — из-за громоздкости табличного определения функций Φ_j бывает целесообразно при ручном синтезе применять формульный метод для определения остаточных функций, которые могут быть реализованы мультиплексорным методом.

Пример 6.12. Определить с помощью мультиплексорного метода настройку модуля на реализацию функции $f = x_1 \# x_2 \# x_3$.

Используя первое соотношение при $n - k = 2$, составим и решим уравнение:

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = \Phi_1 (\Phi_2 \vee x_2 \vee x_3) \vee \Phi_2 x_2 x_3;$$
$$\mathrm{MX}(x_2 x_3, x_2 \vee x_3; x_1) = \mathrm{MX}(0, x_2 x_3, x_2 \vee x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1.$$

Таким образом, $a = x_1$, $b = !x_1$, $c = x_2$, $d = x_3$.

Еще более простое решение, которое не было заложено при проектировании модуля, может быть получено из четвертого соотношения при $n - k = 1$:

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = (\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3) x_3 \vee \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3;$$
$$\mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; x_1, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, x_3, x_3, x_3, x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Среди 36 решений этого уравнения имеется следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

Таким образом, $a = x_3$, $b = x_1$, $c = x_1$, $d = x_2$ [11, 12].

Пример 6.13. Реализовать схемой из рассматриваемых модулей мажоритарную функцию пяти переменных

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathrm{MX}(0, x_4 x_5, x_4 x_5, x_4 \vee$$
$$\vee x_5, x_4 x_5, x_4 \vee x_5, x_4 \vee x_5, 1; x_1, x_2, x_3).$$

Применяя первое соотношение при $n - k = 2$, составим и решим уравнение:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_4 \vee x_5) \vee \Phi_2 x_4 x_5;$$

$$\text{MX}(0, x_4 x_5, x_4 x_5, x_4 \vee x_5, x_4 x_5, x_4 \vee x_5, x_4 \vee$$

$$\vee x_5, 1; x_1, x_2, x_3) = \text{MX}(0, x_4 x_5, x_4 \vee x_5, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3;$$

$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

Отметим, что полученное решение описывает двоичный одноразрядный сумматор.

Так как функция Φ_1 реализуется модулем путем настройки, а функция Φ_2 может быть представлена в виде:

$$\Phi_2 = !\Phi_1(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3,$$

то заданная БФУ реализуется схемой из трех модулей, один из которых должен иметь прямой и инверсный выходы.

6.5. Реализация булевых функций схемами из 3-универсальных немонотонных модулей

Незначительно усложним порождающую функцию модуля, универсального в классе пороговых функций трех переменных:

$$F(a, b, c, d) = a(!b \vee c \vee !d) \vee bcd = \left| 0000 \;\; 0001 \;\; 1111 \;\; 1011 \right|^T.$$

При этом сохраняется возможность реализации путем настройки представителей всех *PN*-типов формул в базисе {&, ∨, !} из трех букв:

$$a = 0 \;\; F = bcd, \qquad a = !b \;\; F = cd \vee !b,$$

$$a = 1 \;\; F = !b \vee c \vee !d, \;\; a = b \;\; F = (c \vee !d)\, b,$$

а вместо реализации путем настройки мажоранты трех переменных появляется возможность разложения произвольной БФУ по крайней правой входной переменной в ее таблице истинности, так как

$$F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, x_n) = \Phi_1(!\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee !x_n) \vee \Phi_2 \Phi_3 x_n =$$

$$= \text{MX}(0, 0, 0, x_n, 1, 1, !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Модуль также обеспечивает реализацию разложения Шеннона по одной переменной, так как при b = 1 он выполняет функцию мультиплексирования $F = a!d \vee cd$.

Следовательно, этот модуль позволяет проводить синтез «сверху вниз» с помощью разложения по одной входной переменной, а также «снизу вверх» с помощью двухэтапного формульного метода, так как приведенные выше представители *PN*-типов содержат инверсии. Следовательно, в данном случае

$$L(h, n) \leqslant \left(\left]\frac{2(h-1)}{3}\right[, 2^{n-1} - 1 \right).$$

Не выполняя полного исследования функциональных возможностей модуля, приведем пример, демонстрирующий эффективность мультиплексорного метода.

Пример 6.14. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0000\ 1011\ 0001\ 1111 \right|^T =$$
$$= (x_1 \vee x_3 \vee !x_4) x_2 \vee x_1 x_3 x_4.$$

При $n - k = 1$ составим уравнение:

$$(x_1 \vee x_3 \vee !x_4) x_2 \vee x_1 x_3 x_4 =$$
$$= \Phi_1 (!\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee !x_4) \vee \Phi_2 \Phi_3 x_4;$$
$$\text{MX}(0, 0, !x_4, 1, 0, x_4, 1, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(0, 0, 0, x_4, 1, 1, !x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3);$$

Среди $3^3 \cdot 3^3 = 729$ решений этого уравнения имеется следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 \vee x_2 !x_3;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1.$$

Функция Φ_2 выполняется модулем путем настройки при $a = x_2$, $b = 1$, $c = x_1$, $d = x_3$.

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из двух модулей. При этом у первого модуля все входы используются как информационные ($a = x_2$, $b = \Phi_2$, $c = x_1$, $d = x_4$), а у второго только один вход является настроечным.

При применении двухэтапного формульного метода заданная БФ может быть реализована только схемой из трех модулей.

6.6. Реализация булевых функций схемами из трехмембранных пневматических реле Р-3Ф серии УСЭППА

Этот элемент реализует БФУ [13, 14]

$$F(a, b, c, d) = \left|0001\ 0000\ 1101\ 1111\right|^T =$$

$$= \left|1\ 0\ 13\ 15\right|^T = a(b \vee !c) \vee !bcd.$$

Рассматриваемый элемент реализует путем настройки представителей всех *PN*-типов бесповторных формул в базисе {&, ∨, !} из трех букв [10]:

$$\begin{array}{ll} a = 0 \quad F = !bcd, & a = b \quad F = b \vee cd, \\ a = !b \quad F = !b(!c \vee d), & a = 1 \quad F = b \vee !c \vee d, \end{array}$$

что позволяет при использовании двухэтапного формульного метода реализовать БФ в указанном базисе из h букв схемами, число модулей в которых удовлетворяет неравенству

$$L(h) \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{3}\right[.$$

Этот элемент позволяет также реализовать при $d = !a$ $F = a \oplus !bc$, а при $b = 0$ $F = a!c \vee cd$. Так как на основе этих соотношений могут быть выполнены разложения Рида и Шеннона соответственно, то модуль является универсальным для построения на его основе схем, реализующих произвольные БФУ n переменных, для которых

$$L(n) \leqslant 2^{n-1} - 1.$$

Следовательно,

$$L(h, n) \leqslant \min\left(\left]\frac{2(h-1)}{3}\right[, 2^{n-1} - 1\right).$$

Выполним более глубокое исследование функциональных возможностей этого элемента.

1. Для определения БФУ, порождаемых за счет переобозначения переменных, построим для ПФ элемента 4! = 24 таблицы истинности (транспонированные столбцы значений), каждой из которых соответствует определенный порядок переменных a, b, c, d. Результаты этого построения объединены в табл. 6.3.

Т а б л и ц а 6.3

№	Порядок переменных	Столбец значений	Номер столбца и его тип	№	Порядок переменных	Столбец значений	Номер столбца и его тип
1	*a, b, c, d*	1 0 13 15	1/1	13	*c, a, b, d*	0 15 4 7	13/3
2	*a, b, d, c*	1 0 11 15	2/2	14	*c, a, d, b*	0 15 2 7	14/4
3	*a, c, b, d*	0 4 15 7	3/3	15	*c, b, a, d*	3 5 3 3	9/7
4	*a, c, d, b*	0 2 15 7	4/4	16	*c, b, d, a*	5 3 5 5	10/7
5	*a, d, b, c*	0 4 11 15	5/5	17	*c, d, a, b*	3 3 1 11	15/10
6	*a, d, c, b*	0 2 13 15	6/6	18	*c, d, b, a*	5 5 1 13	16/11
7	*b, a, c, d*	1 13 0 15	7/1	19	*d, a, b, c*	0 11 4 15	17/5
8	*b, a, d, c*	1 11 0 15	8/2	20	*d, a, c, b*	0 13 2 15	18/6
9	*b, c, a, d*	3 5 3 3	9/7	21	*d, b, a, b*	2 3 7 3	19/8
10	*b, c, d, a*	5 3 5 5	10/7	22	*d, b, c, a*	4 5 7 5	20/9
11	*b, d, a, c*	2 7 3 3	11/8	23	*d, c, a, b*	3 1 3 11	21/10
12	*b, d, c, a*	4 7 5 5	12/9	24	*d, c, b, a*	5 1 5 13	22/11

Если еще раз изменить обозначение переменных и зафиксировать порядок расположения новых переменных, то каждой из этих ТИ будет соответствовать своя функция (тип декомпозиций) четырех переменных.

Пусть при $n - k = 0$ эта БФУ зависит от переменных Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, при $n - k = 1$ — от переменных Φ_1, Φ_2, Φ_3, x_n, при $n - k = 2$ — от переменных Φ_1, Φ_2, x_{n-1}, x_n, а при $n - k = 3$ — от переменных Φ, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n.

2. При $n - k = 0$ поиск решений с требуемыми свойствами связан с огромным перебором, и поэтому в дальнейшем этот случай не рассматривается.

3. Заданный модуль универсален при $n - k = 1$, так как 2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14, 17, 19, 20 и 21-я строки этой таблицы (всего 12 строк) содержат все четыре типа фрагментов длиной два. Так, например, строке 2 соответствует декомпозиция вида:

$$f = \mathrm{MX}(0, x_n, 0, 0, !x_n, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) =$$
$$= \Phi_1(!x_n \vee \Phi_2) \vee x_n!\Phi_2\Phi_3.$$

Это позволяет разложить произвольную БФУ по крайней правой переменной x_n в ТИ. Частным случаем разложения по этой переменной является настройка элемента на реализацию функции мультиплексора «2 в 1». Используя строку 8 таблицы, получим:

$$f = \mathrm{MX}(0, x_n, !x_n, 1, 0, 0, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) =$$
$$\Phi_2(!x_n \vee \Phi_1) \vee x_n!\Phi_1\Phi_3.$$

Эта БФУ при Φ_1 = 0 приобретает вид: $f = \Phi_2!x_n \vee \Phi_3 x_n$. При этом $a = \Phi_2$, $b = 0$, $c = x_n$, $d = \Phi_3$.

4. Если в соотношениях для $n - k = 1$ выполнить подстановку $x_n = Q$, то появляется возможность разложения заданной функции по подфункции Q, применяя рассматриваемый образ декомпозиции.

5. Переходя к случаю $n - k = 2$ и используя переменные Φ_1, Φ_2, x_{n-1}, x_n, можно получить 22 типа декомпозиций, из которых одиннадцать отличаются номенклатурой фрагментов длиной четыре (табл. 6.3). Например, первой строке таблицы соответствует декомпозиция вида:

$$f = \mathrm{MX}(x_{n-1}x_n, 0, !x_{n-1} \vee x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1(!x_{n-1} \vee \Phi_2) \vee x_{n-1}x_n!\Phi_2,$$

а девятой строке — декомпозиция вида:

$$f = \mathrm{MX}(x_{n-1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-1}; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= x_{n-1}(\Phi_1 \vee !\Phi_2) \vee x_n!\Phi_1\Phi_2.$$

Таким образом, рассматриваемый элемент позволяет декомпозировать 11 классов БФУ, каждый из которых определяется номенклатурой фрагментов длиной четыре в их столбцах значений:

$$\{0, x_{n-1}x_n, !x_{n-1} \vee x_n, 1\}, \{0, x_{n-1}x_n, x_{n-1} \vee !x_n, 1\},$$
$$\{0, !x_{n-1}x_n, x_{n-1} \vee x_n, 1\}, \{0, x_{n-1}!x_n, x_{n-1} \vee x_n, 1\},$$
$$\{0, !x_{n-1}x_n, x_{n-1} \vee !x_n, 1\}, \{0, x_{n-1}!x_n, !x_{n-1} \vee x_n, 1\},$$
$$\{x_{n-1}, x_n\}, \{x_{n-1}, x_{n-1}!x_n, x_{n-1} \vee x_n\}, \{x_n, !x_{n-1}x_n, x_{n-1} \vee x_n\},$$
$$\{x_{n-1}, x_{n-1}!x_n, x_{n-1} \vee !x_n\}, \{x_n, x_{n-1}x_n, !x_{n-1} \vee x_n\},$$

причем в каждом классе (за исключением седьмого) могут быть выделены подклассы, каждый из которых образован не всеми фрагментами соответствующего класса.

Из изложенного следует, что если столбец значений реализуемой БФУ содержит хотя бы один фрагмент длиной четыре, не принадлежащий множеству

$$\{0, x_{n-1}x_n, x_{n-1}!x_n, x_{n-1}, !x_{n-1}x_n, x_n,$$
$$x_{n-1} \vee x_n, x_{n-1} \vee !x_n, !x_{n-1} \vee x_n, 1\},$$

то эта функция неразложима по переменным x_{n-1} и x_n.

Если для этих переменных доступны также и их инверсии, то каждая из рассмотренных декомпозиций порождает по три декомпозиции, что с учетом повторений увеличивает число декомпозируемых классов БФУ с 11 до 26. Так, например, первая декомпозиция, соответствующая первой строке табл. 6.3, порождает три декомпозиции вида:

$$f = \mathrm{MX}(x_{n-1}!x_n, 0, !x_{n-1} \vee !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1(!x_{n-1} \vee \Phi_2) \vee x_{n-1}!x_n!\Phi_2;$$
$$f = \mathrm{MX}(!x_{n-1}x_n, 0, x_{n-1} \vee x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1(x_{n-1} \vee \Phi_2) \vee !x_{n-1}x_n!\Phi_2$$

(совпадает по номенклатуре фрагментов со строкой 3 табл. 6.3);

$$f = \mathrm{MX}(!x_{n-1}!x_n, 0, x_{n-1} \vee !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= \Phi_1(x_{n-1} \vee \Phi_2) \vee !x_{n-1}x_n!\Phi_2,$$

а вторая декомпозиция, соответствующая строке 9 табл. 6.3, порождает:

$$f = \mathrm{MX}(!x_{n-1}, x_n, !x_{n-1}, !x_{n-1}; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= !x_{n-1}(\Phi_1 \vee !\Phi_2) \vee x_n\,!\Phi_1\Phi_2,$$
$$f = \mathrm{MX}(x_{n-1}, !x_n, x_{n-1}, x_{n-1}; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= x_{n-1}(\Phi_1 \vee !\Phi_2) \vee !x_n\,!\Phi_1\Phi_2,$$
$$f = \mathrm{MX}(!x_{n-1}, !x_n, !x_{n-1}, !x_{n-1}; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= !x_{n-1}(\Phi_1 \vee !\Phi_2) \vee !x_n\,!\Phi_1\Phi_2.$$

Это расширяет множество реализуемых фрагментов еще на четыре фрагмента: $\{!x_{n-1}, x_n, !x_{n-1}!x_n, !x_{n-1} \vee !x_n\}$.

Таким образом, неразложимыми по двум крайним правым переменным таблицы истинности в этом случае являются БФУ, в столбцах значений которых встречаются фрагменты $x_{n-1} \oplus x_n$ и $!(x_{n-1} \oplus x_n)$, а также БФУ, номенклатура фрагментов в столбцах значений которых не входит в 26 классов, указанных выше. При этом отметим, что если ТИ заданной БФУ при некотором порядке переменных не содержит «разрешенную» номенклатуру фрагментов, то не исключена возможность, что после построения ТИ с другим порядком переменных БФУ будет относиться к классу функций, разложимых по указанным переменным.

6. При $n - k = 3$ по табл. 6.3 также могут быть построены различные декомпозиции. Так, например, первой ее строке соответствует декомпозиция

$$f = \mathrm{MX}(!x_{n-2}x_{n-1}x_n, x_{n-2} \vee !x_{n-1} \vee x_n; \Phi) =$$
$$= \Phi_1(x_{n-2} \vee !x_{n-1}) \vee x_{n-2}x_{n-1}x_n.$$

При этом отметим, что с увеличением величины $n - k$ класс БФУ, декомпозируемых по заданному образу, уменьшается.

Пример 6.15. Определить возможность декомпозиции БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1111\ 0100\ 0111\ 0000 \right|^T =$$
$$= \left| 15\ \ 4\ \ 7\ \ 0 \right|^T = (!x_1 \vee x_3 \vee x_4)!x_2 \vee !x_1!x_3 x_4$$

по образу рассматриваемого элемента.

Этот столбец значений состоит из фрагментов длиной четыре третьего типа (табл. 6.3). Используя, например, строку 3 этой таблицы, получим:

$$(!x_1 \vee x_3 \vee x_4)!x_2 \vee !x_1!x_3 x_4 = \Phi_1(x_3 \vee !\Phi_2) \vee !x_3 x_4 \Phi_2;$$
$$\mathrm{MX}(1, !x_3 x_4, x_3 \vee x_4, 0; x_1, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}(0,\ !x_3 x_4, 1, x_3 \vee x_4; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0; x_1, x_2) = !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2.$$

Таким образом, $a = !x_2$, $b = x_3$, $c = x_1 \oplus x_2$, $d = x_4$.

Пример 6.16. Определить возможность декомпозиции БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 1011\ 0000\ 1111\ 1000 \right|^T =$$
$$= \left| 11\ \ 0\ \ 15\ \ 8 \right|^T = (x_1 \vee x_3 \vee !x_4)!x_2 \vee x_1!x_3!x_4$$

по образу рассматриваемого элемента.

При $n - k = 2$ только при «прямых» входных переменных набор фрагментов ($G_0 = x_3 \vee !x_4, G_1 = 0, G_2 = 1, G_3 = !x_3!x_4$) не является разрешенным. Однако если учесть, что в данном случае первой строке табл. 6.3 соответствуют фрагменты $Q_0 = x_3 x_4$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = !x_3 \vee \vee x_4$, $Q_3 = 1$, то можно записать и решить уравнение:

$$(x_1 \vee x_3 \vee !x_4)!x_2 \vee x_1!x_3!x_4 = \Phi_1(x_3 \vee \Phi_2) \vee !x_3!x_4!\Phi_2;$$
$$\mathrm{MX}(x_3 \vee !x_4, 0, 1, !x_3!x_4; x_1, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}(!x_3!x_4, 0, x_3 \vee !x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0; x_1, x_2) = !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2.$$

Таким образом, $a = !x_2$, $b = x_1 \oplus x_2$, $c = !x_3$, $d = !x_4$.

Пример 6.17. Определить возможность декомпозиции БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|1000\ 0000\ 0000\ 0001\right|^T =$$
$$= !x_1!x_2!x_3!x_4 \vee x_1x_2x_3x_4$$

по образу рассматриваемого элемента.

Разложение при $n - k = 2, 3$ не выполнить. Проведем разложение по переменной x_4, применяя строку *2* табл. 6.3:

$$!x_1!x_2!x_3!x_4 \vee x_1x_2x_3x_4 = \Phi_1(!x_4 \vee \Phi_2) \vee x_4!\Phi_2\Phi_3;$$
$$\text{MX}(!x_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x_4; x_1, x_2) =$$
$$= \text{MX}(0, x_4, 0, 0, !x_4, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Среди 729 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_1!x_2!x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = 0;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3.$$

Таким образом, $a = !x_1!x_2!x_3$, $b = 0$, $c = x_4$, $d = x_1x_2x_3$.

Обратим внимание, что в данном случае

$$f = \Phi_1!x_4 \vee \Phi_3x_4.$$

Пример 6.18. Реализовать БФУ, рассмотренную в предыдущем примере.

Настройка выходного элемента определена в предыдущем примере. Реализуем теперь функции Φ_1 и Φ_3. Реализуем функцию Φ_1, используя при $n - k = 2$ первую строку табл. 6.3 с учетом требуемых инверсий:

$$!x_1!x_2!x_3 = \Phi_{11}(x_2 \vee \Phi_2) \vee !x_2!x_3\Phi_{12};$$
$$\text{MX}(!x_2!x_3, 0; x_1) = \text{MX}(!x_2!x_3, 0, x_2 \vee !x_3, 1; \Phi_{11}, \Phi_{21});$$
$$\Phi_{11} = \text{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_{12} = \text{MX}(0, 1; x_1) = x_1.$$

Таким образом, $a = 0$, $b = x_1$, $c = !x_2$, $d = !x_3$.

Так как формула Φ_3 отличается от формулы Φ_1 только расстановкой инверсий, то $a = 0$, $b = !x_1$, $c = x_2$, $d = x_3$.

Следовательно, мультиплексорный метод строит в данном случае схему из трех элементов, в то время как двухэтапный формульный метод реализует эту БФУ схемой из четырех элементов.

6.7. Реализация булевых функций схемами из модулей, универсальных в классе произвольных булевых функций трех переменных

Из изложенного в разд. 3.2.5 следует, что если при фиксированном значении $n - k$ порождающая функция модуля содержит в качестве фрагментов все БФУ $n - k$ переменных, то произвольная БФУ всегда может быть разложена по $n - k$ крайним правым входным переменным.

Поэтому можно утверждать, что любые модули, при построении которых применяются какие-либо классификации [10], не являются универсальными разложителями по крайним правым t входным переменным, так как любая классификация позволяет сократить номенклатуру фрагментов, объединяемых в модуль, чем обычно и пользуются для сокращения числа переменных в ПФ модуля.

При $t = 3$, например в [15], описан модуль, при построении которого использовалась *PN*-классификация, с пятью входами и одним выходом, а при $t = 4$, например в [16], описан модуль, который построен с применением *NPN*-классификации, с семью входами и двумя выходами — прямым и инверсным.

Если при $n = t$ реализация БФУ на таких модулях осуществляется с помощью таблиц настройки, то при $n > t$ методы синтеза схем в базисе этих модулей в литературе не описывались.

Рассмотрим три таких метода на примере модуля с $t = 3$.

Первый из этих методов (двухэтапный формульный метод) состоит в использовании этих модулей как универсальных в классе произвольных БФ в базисе $\{\&, \vee, \oplus, !\}$, что приводит к следующей оценке сложности:

$$L(h) \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{3}\right[.$$

Второй метод является модификацией двухэтапного формульного метода и основан на выделении в заданной БФ подформул, зависящих от трех переменных.

Третьим методом является мультиплексорный метод. Этот метод, так как порождающая функция модуля содержит фрагменты $\{0, !x_n, x_n, 1\}$, позволяет проводить с помощью такого модуля многократное разложение по крайней правой входной переменной заданной БФУ и всех ее остаточных, до тех пор пока они не будут зависеть от трех и менее переменных. При этом в худшем случае $2^{n-3} - 1$ элементов применяются в режиме разложителя, а 2^{n-3} элементов — в режиме модулей, универсальных в классе БФУ трех и менее переменных. Следовательно,

$$L(n) \leqslant 2^{n-2} - 1.$$

Из изложенного следует, что

$$L(h,n) \leqslant \min\left(\left]\frac{2(h-1)}{3}\right[, 2^{n-2}-1 \right).$$

Для более эффективного использования модуля исследуем его функциональные возможности. Для упрощения это исследование будем проводить не при всех перестановках переменных на входах модуля, а только при фиксированном их порядке.

Запишем ТИ порождающей функции модуля [15] и выполним исследование ее функциональных возможностей:

$$F(a,b,c,d,e) = \left|0000\ 0001\ 1110\ 1001\ 0111\ 1000\ 0110\ 1111\right|^{T}.$$

1. Так как при $n - k = 0$ выбор решения с требуемыми свойствами связан с огромным перебором, этот случай в дальнейшем не рассматривается.

2. При $n - k = 1$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = \Phi_4$, $e = x_n$:

$$f = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_n, 1, !x_n, !x_n, x_n, x_n, 1, !x_n, 0, x_n, !x_n, 1, 1; \\ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это соотношение обеспечивает разложения произвольной булевой функции f по переменной x_n при применении заданного образа. При этом число решений равно $4^{t_0+t_1+t_2+t_3}$.

3. При $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = \Phi_4$, $e = Q$:

$$f = \mathrm{MX}(0, 0, 0, Q, 1, !Q, !Q, Q, Q, 1, !Q, 0, Q, !Q, 1, 1; \\ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это соотношение обеспечивает разложения булевой функции f по подфункции Q при использовании заданного образа. При выделении подфункции Q число решений равно $4^{t_0+t_1+t_4+t_5}$.

4. При $n - k = 2$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = x_{n-1}$, $e = x_n$:

$$f = \mathrm{MX}(0, x_{n-1}x_n, !x_{n-1} \vee !x_n, !(x_{n-1} \oplus x_n), x_{n-1} \vee \\ \vee x_n, !x_{n-1}!x_n, x_{n-1} \oplus x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Это соотношение обеспечивает единственное разложение каждой булевой функции f, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

5. При $n - k = 3$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = x_{n-2}$, $d = x_{n-1}$, $e = x_n$:

$$f = \mathrm{MX}(x_{n-2}x_{n-1}x_n, !x_{n-2} \# !x_{n-1} \# !x_n \vee x_{n-2}x_{n-1}x_n, !x_{n-2} \oplus \\ \oplus !x_{n-1}!x_n, x_{n-2} \vee (x_{n-1} \oplus x_n); \Phi_1, \Phi_2).$$

Это соотношение обеспечивает единственное разложение каждой булевой функции *f*, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

6. При $n-k=4$, $a=\Phi$, $b=x_{n-3}$, $c=x_{n-2}$, $d=x_{n-1}$, $e=x_n$:

$$f=\mathrm{MX}\big(!x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n\vee x_{n-3}(!x_{n-2}\#!x_{n-1}\#!x_n),$$

$$!x_{n-2}(!x_{n-3}x_{n-1}\vee(x_{n-1}\oplus x_n))\vee x_{n-2}(x_{n-3}\vee!x_{n-1}!x_n);\Phi\big).$$

Это соотношение обеспечивает единственное разложение каждой булевой функции *f*, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

Пример 6.19. Определить настройку модуля на реализацию функции мультиплексирования $f(x_1,x_2,x_3)=\left|0001\ 1011\right|^T=x_1!x_3\vee\vee x_2x_3$.

При $n-k=1$ составим уравнение:

$$x_1!x_3\vee x_2x_3=F(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,x_3);$$
$$\mathrm{MX}(0,x_3,!x_3,1;x_1,x_2)=$$
$$=\mathrm{MX}(0,0,0,x_3,1,!x_3,!x_3,x_3,x_3,1,!x_3,0,x_3,!x_3,1,1;$$
$$\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4).$$

Это уравнение имеет 256 решений, среди которых выберем следующее:

$$\Phi_1=\mathrm{MX}(0,0,1,1;x_1,x_2)=x_1;$$
$$\Phi_2=\mathrm{MX}(0,0,1,1;x_1,x_2)=x_1;$$
$$\Phi_3=\mathrm{MX}(0,1,0,1;x_1,x_2)=x_2;$$
$$\Phi_4=\mathrm{MX}(1,1,1,1;x_1,x_2)=1.$$

Следовательно, $a=x_1$, $b=x_1$, $c=x_2$, $d=1$, $e=x_3$.

Пример 6.20. Реализовать ПФ модуля, универсального в классе пороговых БФУ трех переменных,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left|0000\ 0001\ 0111\ 1111\right|^T=$$

$$=x_1(x_2\vee x_3\vee x_4)\vee x_2x_3x_4.$$

При $n-k=2$ составим и решим уравнение:

$$x_1(x_2\vee x_3\vee x_4)\vee x_2x_3x_4=F(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,x_3,x_4);$$
$$\mathrm{MX}(0,x_3x_4,x_3\vee x_4,1;x_1,x_2)=$$
$$=\mathrm{MX}(0,x_3x_4,!x_3\vee!x_4,!(x_3\oplus x_4),x_3\vee x_4,!x_3!x_4,x_3\oplus$$
$$\oplus x_4,1;\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3);$$

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

При $n - k = 1$ составим уравнение:

$$x_1 x_2 = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, x_2);$$
$$\mathrm{MX}(0, x_2; x_1) = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_2, 1, !x_2, !x_2, x_2, x_2,$$
$$1, !x_2, 0, x_2, !x_2, 1, 1; \Phi_{21}, \Phi_{22}, \Phi_{23}, \Phi_{24}).$$

Среди 16 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_{21} = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1;$$
$$\Phi_{22} = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_{23} = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_{24} = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0.$$

Таким образом, заданная порождающая функция реализуется схемой из двух модулей, в то время как формульный метод строит в данном случае схему из трех модулей.

6.8. Реализация булевых функций схемами из модулей Препараты—Мюллера

В [17] предложены модули, универсальные в классе произвольных булевых функций t переменных, на информационные входы которых подаются переменные $x_1, \ldots, x_t$, а на каждый из настроечных входов может быть подан один из следующих символов: $\{0, 1, !x_1, \ldots, !x_t, x_1, \ldots, x_t\}$.

Настройка этих модулей на реализацию заданной булевой функции t переменных производится по преобразованной ТИ [17, 18]. Однако методы реализации БФУ при $n > t$ схемами из таких модулей в литературе не описаны.

Рассмотрим три таких метода.

Первый из них (формульный метод) состоит в использовании этих модулей как универсальных в классе произвольных БФ в базисе $\{\&, \vee, \oplus, !\}$, что приводит к следующей оценке сложности:

$$L(h) \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{t}\right[.$$

Второй метод является модификацией двухэтапного формульного метода и основан на выделении в заданной БФ подформул, зависящих от t переменных.

Третьим методом является мультиплексорный метод. Предположим, что $t = 3$. Этот метод, так как ПФ модуля содержит фрагменты $\{0, !x_n, x_n, 1\}$, позволяет проводить с помощью этого элемента многократное разложение по крайней правой входной переменной заданной БФУ и всех ее остаточных, до тех пор пока они не будут зависеть от трех и менее переменных. При этом в худшем случае $2^{n-3}-1$ элементов применяются в режиме разложителя, а 2^{n-3} элементов — в режиме модулей, универсальных в классе булевых функций трех и менее переменных. Следовательно,

$$L(n) \leqslant 2^{n-2}-1.$$

Из изложенного следует, что при $t = 3$

$$L(h, n) \leqslant \min\left(\left]\frac{2(h-1)}{3}\right[, 2^{n-2}-1 \right).$$

Для более эффективного применения модуля исследуем его функциональные возможности. Для упрощения это исследование будем проводить не при всех перестановках переменных на его входах, а только при фиксированном их порядке.

Запишем ТИ порождающей функции модуля [17, 18]:

$$F(a, b, c, d, e, f) = \left| 0000\ 0000\ 0001\ 0001\ 0110\ 1000\ 0111 \right.$$
$$\left. 1001\ 1000\ 0110\ 1001\ 0111\ 1110\ 1110\ 1111\ 1111 \right|^T =$$
$$= a\big(!d!e!f \vee d(e \oplus f)\big) \vee b\big(!d(e \oplus f) \vee d!e!f \big) \vee cef.$$

1. Так как при $n - k = 0$ выбор решения с требуемыми свойствами связан с огромным перебором, этот случай в дальнейшем не рассматривается.

2. При $n - k = 1$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = \Phi_4$, $e = \Phi_5$, $f = x_n$:

$$f_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, x_n, 0, x_n, x_n, !x_n, !x_n, 0, x_n, 1, !x_n, x_n, !x_n,$$
$$0, x_n, !x_n, !x_n, x_n, x_n, 1, 1, !x_n, 1, !x_n, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

Это соотношение обеспечивает разложения произвольной булевой функции f_1 по переменной x_n при использовании заданного образа. При этом число решений равно $8^{t_0+t_1+t_2+t_3}$.

3. При $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = \Phi_4$, $e = \Phi_5$, $f = Q$:

$$f_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, Q, 0, Q, Q, !Q, !Q, 0, Q, 1, !Q, Q, !Q,$$
$$0, Q, !Q, !Q, Q, Q, 1, 1, !Q, 1, !Q, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

Это соотношение обеспечивает разложения булевой функции f_1 по подфункции Q при применении заданного образа. При выделении подфункции Q число решений равно $8^{t_0+t_1+t_4+t_5}$.

4. При $n-k=2$, $a=\Phi_1$, $b=\Phi_2$, $c=\Phi_3$, $d=\Phi_4$, $e=x_{n-1}$, $f=x_n$:

$$f_1=\text{MX}\big(0,0,x_{n-1}x_n,x_{n-1}x_n,x_{n-1}\oplus x_n,!x_{n-1}!x_n,x_{n-1}\vee \\ \vee x_n,!(x_{n-1}\oplus x_n),!x_{n-1}!x_n,x_{n-1}\oplus x_n,!(x_{n-1}\oplus x_n),x_{n-1}\vee \\ \vee x_n,!x_{n-1}\vee !x_n,!x_{n-1}\vee !x_n,1,1;\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4\big).$$

Это соотношение обеспечивает разложения каждой булевой функции f_1, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

5. При $n-k=3$, $a=\Phi_1$, $b=\Phi_2$, $c=\Phi_3$, $d=x_{n-2}$, $e=x_{n-1}$, $f=x_n$:

$$f_1=\text{MX}\big(0,x_{n-1}x_n,!x_{n-2}(x_{n-1}\oplus x_n)\vee x_{n-2}!x_{n-1}!x_n,!x_{n-2}\#\\ \# x_{n-1}\# x_n\vee x_{n-2}!x_{n-1}!x_n,!x_{n-2}!x_{n-1}!x_n\vee x_{n-2}(x_{n-1}\oplus x_n),x_{n-2}\#\\ \# x_{n-1}\# x_n\vee !x_{n-2}!x_{n-1}!x_n,!x_{n-1}\vee !x_n,1;\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3\big).$$

Это соотношение обеспечивает единственное разложение каждой булевой функции f_1, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

6. Так же могут быть записаны соотношения при $n-k=4$, $a=\Phi_1$, $b=\Phi_2$, $c=x_{n-3}$, $d=x_{n-2}$, $e=x_{n-1}$, $f=x_n$ и при $n-k=5$, $a=\Phi$, $b=x_{n-4}$, $c=x_{n-3}$, $d=x_{n-2}$, $e=x_{n-1}$, $f=x_n$.

Пример 6.21. Определить настройку модуля на реализацию БФУ

$$f_1(x_1,x_2,x_3)=\left|0110\ 1001\right|^T=x_1\oplus x_2\oplus x_3.$$

Составим уравнение при $n-k=2$:

$$x_1\oplus x_2\oplus x_3=F(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,x_2,x_3);$$

$$\text{MX}\big(x_2\oplus x_3,!(x_2\oplus x_3);x_1\big)=\text{MX}\big(0,0,x_2x_3,x_2x_3,x_2\oplus \\ \oplus x_3,!x_2!x_3,x_2\vee x_3,!(x_2\oplus x_3),!x_2!x_3,x_2\oplus x_3,!(x_2\oplus x_3),x_2\vee \\ \vee x_3,!x_2\vee !x_3,!x_2\vee !x_3,1,1;\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4\big).$$

Это уравнение имеет четыре решения:

$$\begin{cases}\Phi_1=\text{MX}(0,0;x_1)=0,\\ \Phi_2=\text{MX}(1,1;x_1)=1,\\ \Phi_3=\text{MX}(0,1;x_1)=x_1,\\ \Phi_4=\text{MX}(0,1;x_1)=x_1;\end{cases}\qquad \begin{cases}\Phi_1=\text{MX}(0,1;x_1)=x_1,\\ \Phi_2=\text{MX}(1,0;x_1)=!x_1,\\ \Phi_3=\text{MX}(0,1;x_1)=x_1,\\ \Phi_4=\text{MX}(0,0;x_1)=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1, \\ \Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1, \\ \Phi_3 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1, \\ \Phi_4 = \mathrm{MX}(1, 1; x_1) = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1; x_1) = 1, \\ \Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0, \\ \Phi_3 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1, \\ \Phi_4 = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1. \end{cases}$$

При этом отметим, что известный метод [17, 18] позволяет определить только первое из этих решений (табл. 6.4).

Т а б л и ц а 6.4

j	x_1	x_2	x_3	f_1	Φ_j
1	0	0	0	0	0
	1	0	1	0	
	1	1	0	0	
2	0	0	1	1	1
	0	1	0	1	
	1	0	0	1	
3	0	1	1	0	x_1
	1	1	1	1	

Пример 6.22. Реализовать ПФ модуля, универсального в классе пороговых БФУ трех переменных,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ 0001\ 0111\ 1111\right|^T =$$

$$= x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4.$$

При $n - k = 2$ составим и решим уравнение:

$$x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4 = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, x_3, x_4);$$

$$\mathrm{MX}(0, x_3 x_4, x_3 \vee x_4, 1; x_1, x_2) =$$

$$= \mathrm{MX}\big(0, 0, x_3 x_4, x_3 x_4, x_3 \oplus x_4, !x_3!x_4, x_3 \vee x_4, !(x_3 \oplus$$
$$\oplus x_4), !x_3!x_4, x_3 \oplus x_4, !(x_3 \oplus x_4), x_3 \vee$$
$$\vee x_4, !x_3 \vee !x_4, !x_3 \vee !x_4, 1, 1;\ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\big).$$

Это уравнение имеет 16 решений, среди которых нет решений, содержащих только одну функцию Φ_j, зависящую от переменных x_1 и x_2. Поэтому выберем следующее решение:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2;$$
$$\Phi_4 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0; x_1, x_2) = 0.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из трех модулей.

Пример 6.23. Реализовать БФУ

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0111\ 0001\ 1110\ 0110 \right|^T =$$
$$= !x_1 x_3 x_4 \vee x_1 \big((!x_2 \vee x_4)!x_3 \vee x_3!x_4 \vee !x_2(x_3 \oplus x_4) \big).$$

Модифицированный формульный метод строит в данном случае схему из пяти модулей:

$$f_0 = (!x_2 \vee x_4)!x_3 \vee x_3!x_4, \quad f_2 = !x_2(x_3 \oplus x_4),$$
$$f_3 = x_1(f_0 \vee f_2), \quad f_4 = !x_1 x_3 x_4, \quad f_1 = f_3 \vee f_4.$$

При $n - k = 2$ составим и решим уравнение:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, x_3, x_4);$$
$$\mathrm{MX}(x_3 \vee x_4, x_3 x_4, !x_3 \vee !x_4, x_3 \oplus x_4; x_1, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}\big(0, 0, x_3 x_4, x_3 x_4, x_3 \oplus x_4, !x_3!x_4, x_3 \vee x_4, !(x_3 \oplus$$
$$\oplus x_4), !x_3!x_4, x_3 \oplus x_4, !(x_3 \oplus x_4), x_3 \vee$$
$$\vee x_4, !x_3 \vee !x_4, !x_3 \vee !x_4, 1, 1;\ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \big).$$

Это уравнение имеет 16 решений, среди которых выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0; x_1, x_2) = !x_2;$$
$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1;$$
$$\Phi_4 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ четырех переменных реализуется одним модулем, универсальным в классе произвольных БФУ трех переменных.

Следовательно, мультиплексорный метод позволяет использовать кроме тех БФУ, которые закладывались в модуль при проектировании (все БФУ трех переменных), также и ряд других функций, которые модуль может реализовать путем настройки, так как его порождающая функция в этом случае зависит от шести переменных. Это объясняется тем, что мультиплексорный метод позволяет увеличить по сравнению с другими методами число входов модулей, применяемых в качестве информационных входов.

6.9. Реализация булевых функций схемами из 4-универсальных модулей

Этот модуль (разд. 8.2 и [19]) имеет порождающую функцию вида:

$$F(a, b, c, d, e, f) =$$
$$= \begin{vmatrix} 0000\ 0000\ 0000\ 0001\ 0000\ 0111\ 0111\ 0111 \\ 0001\ 0001\ 0001\ 1111\ 0111\ 1111\ 1111\ 1111 \end{vmatrix}^T =$$
$$= a\Big(b(c \vee d \vee e \vee f) \vee cd \vee ef\Big) \vee b(c \vee d)(e \vee f) \vee cdef.$$

Модуль путем настройки $(a, b, c = \{0, x_1, 1\},\ d = x_2,\ e = x_3, f = = x_4)$ реализует представителей всех десяти *PN*-типов БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из четырех букв.

При использовании формульного метода в данном случае справедливо соотношение:

$$\left]\frac{h-1}{3}\right[\leqslant L(h, 4) \leqslant \left]\frac{h-1}{2}\right[.$$

Для более эффективного применения модуля исследуем его функциональные возможности. Для упрощения это исследование будем проводить не при всех перестановках переменных на входах модуля, а только при фиксированном их порядке.

1. Так как при $n - k = 0$ выбор решения с требуемыми свойствами связан с огромным перебором, этот случай в дальнейшем не рассматривается.

2. При $n - k = 1$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = \Phi_4$, $e = \Phi_5$, $f = x_n$ и доступности только «прямых» входных переменных модуль позволяет реализовать БФУ, у которых столбцы значений состоят из фрагментов из множества $\{0, x_n, 1\}$. Для булевой функции f_1 этого класса справедливы соотношения:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, x_n);$$
$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x_n, 0, 0, x_n, 1, x_n,$$
$$1, x_n, 1, 0, x_n, 0, x_n, 0, x_n, 1, 1, x_n, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1;$$
$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

Для функций рассматриваемого класса это уравнение имеет $12^{t_0} \cdot 12^{t_1} \cdot 8^{t_3}$ решений.

3. При $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = \Phi_4$, $e = \Phi_5$, $f = Q$ и доступности только «прямых» входных переменных модуль позволяет реализовать БФУ, у которых столбцы значений состоят из фрагментов из множества $\{0, Q, 1\}$. Для булевой функции f_1 этого класса справедливо соотношение:

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, Q);$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, Q, 0, 0, Q, 1, Q, 1, Q,$$
$$1, 0, Q, 0, Q, 0, Q, 1, 1, Q, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

Для функций рассматриваемого класса это уравнение имеет $12^{t_0} \cdot 12^{t_1} \cdot 8^{t_5}$ решений.

4. При $n - k = 2$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = \Phi_4$, $e = x_{n-1}$, $f = x_n$:

$$f_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_{n-1}x_n, 0, x_{n-1} \vee x_n, x_{n-1} \vee x_n, x_{n-1} \vee x_n,$$
$$x_{n-1}x_n, x_{n-1}x_n, x_{n-1}x_n, 1, x_{n-1} \vee x_n, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это соотношение обеспечивает разложения каждой булевой функции f_1, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов. При этом число решений определяется соотношением $4^{t_0+t_1+t_6+t_7}$.

5. При $n - k = 3$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = \Phi_3$, $d = x_{n-2}$, $e = x_{n-1}$, $f = x_n$:

$$f_1 = \mathrm{MX}\big(0, x_{n-2}x_{n-1}x_n, x_{n-2}(x_{n-1} \vee x_n), x_{n-1} \vee x_n, x_{n-1}x_n,$$
$$x_{n-2} \vee x_{n-1}x_n, x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\big).$$

Это соотношение обеспечивает единственное разложение каждой булевой функции f_1, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

6. При $n - k = 4$, $a = \Phi_1$, $b = \Phi_2$, $c = x_{n-3}$, $d = x_{n-2}$, $e = x_{n-1}$, $f = x_n$:

$$f_1 = \mathrm{MX}\big(x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n, (x_{n-3} \vee x_{n-2})(x_{n-1} \vee x_n),$$
$$x_{n-3}x_{n-2} \vee x_{n-1}x_n, x_{n-3} \vee x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n; \Phi_1, \Phi_2\big).$$

Это соотношение обеспечивает единственное разложение каждой булевой функции f_1, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

7. При $n - k = 5$, $a = \Phi$, $b = x_{n-4}$, $c = x_{n-3}$, $d = x_{n-2}$, $e = x_{n-1}$, $f = x_n$:

$$f_1 = \mathrm{MX}\big(x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n \vee x_{n-4}(x_{n-3} \vee x_{n-2})(x_{n-1} \vee x_n),$$
$$(x_{n-3} \vee x_{n-2})(x_{n-1} \vee x_n) \vee x_{n-4}(x_{n-3} \vee x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n); \Phi\big).$$

Это соотношение обеспечивает единственное разложение каждой булевой функции f_1, фрагменты которой принадлежат указанному в этой мультиплексорной форме множеству фрагментов.

8. Если кроме переменных доступны также и их инверсии, то класс функций, реализуемых рассматриваемым модулем, существенно расширяется. Так, например, для отрицательно монотонных БФУ по переменной x_n их разложения могут определяться на основе решения уравнения:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, !x_n);$$

$$f_1(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, !x_n, 0, 0, !x_n, 1, !x_n, 1, !x_n, 1, 0, !x_n,$$

$$0, !x_n, 0, !x_n, 1, 1, !x_n, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

Для функций рассматриваемого класса это уравнение имеет $12^{t_0} \cdot 12^{t_1} \cdot 8^{t_3}$ решений.

Пример 6.24. Реализовать ПФ модуля, универсального в классе пороговых БФУ трех переменных,

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ 0001\ 0111\ 1111\right|^T =$$

$$= x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4.$$

При $n - k = 3$ составим и решим уравнение:

$$x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4 =$$

$$= \Phi_1\big(\Phi_2(\Phi_3 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee \Phi_3 x_2 \vee x_3 x_4\big) \vee$$

$$\vee \Phi_2(\Phi_3 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \vee \Phi_3 x_2 x_3 x_4;$$

$$\text{MX}(x_2 x_3 x_4, x_2 \vee x_3 \vee x_4; x_1) = \text{MX}\big(0, x_2 x_3 x_4, x_2(x_3 \vee x_4),$$

$$x_3 \vee x_4, x_3 x_4, x_2 \vee x_3 x_4, x_2 \vee x_3 \vee x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\big);$$

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1; x_1) = x_1;$$

$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1; x_1) = x_1;$$

$$\Phi_3 = \text{MX}(1, 0; x_1) = !x_1.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется при $a = x_1$, $b = x_1$, $c = !x_1$, $d = x_2$, $e = x_3$, $f = x_4$.

Следовательно, мультиплексорный метод позволил использовать дополнительные функциональные возможности модуля — реализовать на одном модуле БФ не из четырех, а из семи букв.

Формульный метод строит в данном случае схему из двух модулей.

Пример 6.25. Реализовать БФУ

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$

$$\left|0111\ 0111\ 0000\ 0111\ 0001\ 0001\ 0001\ 1111\right|^T =$$

$$= x_1 x_2 x_3 \vee (!x_1 !x_2 \vee x_2 x_3) x_4 \vee \big(!x_1(!x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_4\big) x_5.$$

Формульный метод строит в данном случае схему из пяти модулей.

При $n - k = 3$ составим и решим уравнение:

$$x_1 x_2 x_3 \vee (!x_1 !x_2 \vee x_2 x_3) x_4 \vee \big(!x_1 (!x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_4 \big) x_5 =$$
$$= \Phi_1 \big(\Phi_2 (\Phi_3 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \vee \Phi_3 x_3 \vee x_4 x_5 \big) \vee$$
$$\vee \Phi_2 (\Phi_3 \vee x_3)(x_4 \vee x_5) \vee \Phi_3 x_3 x_4 x_5;$$
$$\mathrm{MX}(x_4 \vee x_5, x_3 (x_4 \vee x_5), x_4 x_5, x_3 \vee x_4 x_5; x_1, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}\big(0, x_3 x_4 x_5, x_3 (x_4 \vee x_5), x_4 \vee x_5, x_4 x_5,$$
$$x_3 \vee x_4 x_5, x_3 \vee x_4 \vee x_5, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \big);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1;$$
$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !x_1 !x_2 \vee x_1 x_2.$$

Так как формула Φ_3 содержит четыре буквы, то она может быть реализована одним модулем.

Таким образом, заданная БФУ может быть реализована схемой из двух модулей.

6.10. Реализация булевых функций схемами из одного типа функциональных преобразователей СБИС программируемой логики

Рассмотрим в качестве примера использование мультиплексорного метода для синтеза схем в базисе функционального преобразователя СБИС программируемой логики семейства АСТ2 фирмы «Actel» [20]. В этом преобразователе комбинационная схема описывается соотношением

$$F = \mathrm{MX}(a, b, c, d; \Phi_1, \Phi_2),$$

где $\Phi_1 = ef, \Phi_2 = g \vee h.$

Пример 6.26. Декомпозировать по образу рассматриваемого преобразователя БФУ

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ 0101\ 0111\ 1110\right|^T =$$
$$= (!x_1 x_4 \vee x_1 !x_3) x_2 \vee x_1 (!x_2 x_4 \vee x_3 !x_4).$$

При $n - k = 1$ предположим, что $Q_0 = 0,\ Q_1 = x_4,\ Q_2 = !x_4,\ Q_3 = 1.$

Запишем и решим уравнение в МФ:

$$\text{MX}(Q_0, Q_0, Q_1, Q_1, Q_1, Q_3, Q_3, Q_2; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3);$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_1 x_2 \vee x_1(!x_2 \vee !x_3).$$

Таким образом, заданная БФУ декомпозируется следующим образом: $a = 0$, $b = x_4$, $c = !x_4$, $d = 1$, $e = x_1$, $f = x_2 \vee x_3$, $g = !x_1 x_2$, $h = x_1(!x_2 \vee !x_3)$.

При $n - k = 2$ предположим, что $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_4$, $Q_2 = x_3 \vee x_4$, $Q_3 = !x_3 \vee !x_4$.

Запишем и решим уравнение в МФ:

$$\text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_1, x_2) = \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = x_1,\ \Phi_2 = x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ декомпозируется следующим образом: $a = 0$, $b = x_4$, $c = x_3 \vee x_4$, $d = !x_3 \vee !x_4$, $e = x_1$, $f = 1$, $g = x_2$, $h = 0$.

Пример 6.27. Декомпозировать по образу рассматриваемого преобразователя БФУ

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0001\ 0101\ 0001\ 1111\right|^T =$$
$$= (x_1 \vee x_4)x_2 \vee x_3 x_4.$$

При $n - k = 2$ предположим, что $Q_0 = x_3 x_4$, $Q_1 = x_4$, $Q_2 = x_3 x_4$, $Q_3 = 1$.

Запишем и решим уравнение в МФ:

$$\text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_1, x_2) = \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = x_1,\ \Phi_2 = x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ декомпозируется следующим образом: $a = c = x_3 x_4$, $b = x_4$, $c = x_3 \vee x_4$, $d = 1$, $e = x_1$, $f = 1$, $g = x_2$, $h = 0$.

При $n - k = 1$ предположим, что $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_4$, $Q_2 = !x_4$, $Q_3 = 1$.

Запишем и решим уравнение в МФ:

$$\text{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_1, Q_0, Q_1, Q_3, Q_3; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_3.$$

Таким образом, заданная БФУ не только декомпозируется, но и реализуется с помощью одного рассматриваемого преобразователя: $a=0$, $b=x_4$, $c=!x_4$, $d=1$, $e=x_1$, $f=x_2$, $g=x_2$, $h=x_3$.

6.11. Реализация булевых функций большого числа переменных

При большом числе переменных ($n \geqslant 6$) задание произвольной, полностью определенной БФУ с помощью ТИ весьма громоздко. Поэтому при таких значениях n булевы функции обычно задаются в виде булевых формул.

Мультиплексорный метод при таком задании БФУ может применяться после разложения Шеннона, проведения эвристической декомпозиции и/или использования формульного метода.

Пример 6.28. Реализовать схемой из 3-универсальных модулей БФ

$$f=(x_1x_2 \vee x_3x_4)x_5 \vee (x_6 \vee x_7)(x_8 \vee x_9).$$

Формульный метод строит в данном случае схему из пяти модулей: $f_1=x_1x_2$, $f_2=f_1 \vee x_3x_4$, $f_3=x_6 \vee x_7$, $f_4=f_3(x_8 \vee x_9)$, $f = f_2x_5 \vee f_4$.

При применении 5-универсального модуля формульный метод строит схему из двух модулей:

$$f_1=(x_1x_2 \vee x_3x_4)x_5, \quad f=f_1 \vee (x_6 \vee x_7)(x_8 \vee x_9).$$

В примере *3.22* показано, что каждая из этих формул реализуется с помощью мультиплексорного метода схемой из двух 3-универсальных модулей.

Таким образом, совместное применение формульного и мультиплексорного методов позволяет реализовать заданную БФ схемой из четырех заданных модулей.

Пример 6.29. Реализовать схемой из модулей, универсальных в классе пороговых функций трех переменных, БФ

$$f=(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2 \vee (x_4 \vee x_5)(x_6 \vee x_7).$$

Формульный метод строит в данном случае схему из пяти модулей:

$$f_1=(x_1 \vee x_2)x_3,\ f_2=f_1 \vee x_1x_2,\ f_3=x_4 \vee x_5,$$
$$f_4=f_3(x_6 \vee x_7),\ f=f_2 \vee f_4.$$

Эвристическая декомпозиция и формульный метод строят совместно схему из четырех модулей:

$$f_1=x_1 \# x_2 \# x_3,\ f_2=x_4 \vee x_5,\ f_3=f_2(x_6 \vee x_7),\ f=f_1 \vee f_3.$$

Эвристическая декомпозиция и мультиплексорный метод строят совместно схему из трех модулей:

$$f_1 = x_1 \# x_2 \# x_3,\ f_2 = f_1 \vee x_4 \vee x_5,$$
$$f = f_2(f_1 \vee x_6 \vee x_7) \vee f_1 x_6 x_7.$$

6.12. Реализация автоматов с памятью схемами, использующими триггеры

Известен табличный метод реализации автоматов с памятью, использующий таблицы возбуждения триггеров [21].

Этот метод был усовершенствован в [22]. Однако и в этой редакции он является весьма громоздким. При этом формулы для возбуждения входов триггеров определяются в результате доопределения функций возбуждения и выбора значений констант в них [23].

В [21] для рассматриваемой задачи был предложен аналитический метод решения систем логических уравнений с одним и двумя неизвестными, однако уже при двух неизвестных этот метод весьма громоздок [24].

В [24, 25] был предложен более простой аналитический метод, позволяющий свести решение систем логических уравнений с m неизвестными к последовательному решению $k \leqslant m$ логических уравнений с одним неизвестным.

Пример 6.30. Решить уравнение $x_1 z \vee x_2 = S!z \vee !R\,z$ относительно переменных R и S.

Решение этой задачи при применении метода, изложенного в [24, 25], может быть разбито на две части.

Полагая, что $z_1 = x_1 z \vee x_2$, решим уравнение $z_1 = S!z \vee !R\,z$. В [25] показано, что

$$R = !z_1 z \vee h_1!z,\quad S = z_1!z \vee h_2 z,$$

где h_1 и h_2 — произвольные БФУ от переменных R и S.

Подставляя в эти соотношения выражение для z_1, получим:

$$R = !(x_1 z \vee x_2)z \vee h_1!z = !x_1!x_2 z \vee h_1!z;$$
$$S = (x_1 z \vee x_2)!z \vee h_2 z = x_2!z \vee h_2 z.$$

Полагая $h_1 = !x_1!x_2$ и $h_2 = x_2$, получим: $R = !x_1!x_2$, $S = x_2$.

Достоинство изложенного метода состоит в том, что он является аналитическим, а недостаток — в относительной трудоемкости.

Для применения определенных типов триггеров могут быть использованы более простые подходы.

Так, в [26, 27] показано, что *JK*-триггер является универсальным, так как функция, описывающая его функционирование,

$$z_1 = J!z \vee !Kz = S!z \vee !Rz$$

может применяться для разложения Шеннона по переменной *z*.

Это свойство может использоваться для решения логических уравнений.

Пример 6.31. Решить уравнение $x_1 z \vee x_2 = S!z \vee !Rz$ относительно переменных *R* и *S*.

Полагая $z_1 = x_1 z \vee x_2$, получим, что при $z = 0$ $z_1 = x_2$, а при $z = 1$ $z_1 = x_1 \vee x_2$.

Таким образом,

$$x_2!z \vee (x_1 \vee x_2)z = S!z \vee !Rz.$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$S = x_2, \ R = !x_1!x_2.$$

Из изложенного следует, что общее решение для *JK*-триггера имеет вид:

$$J = z_1(X, z = 0), \ K = !z_1(X, z = 1).$$

В [27] показано, что для функций переходов, положительно монотонных по переменной *z*, универсальным является *S*-триггер, функционирование которого описывается соотношением

$$z_1 = S \vee !Rz.$$

Пример 6.32. Решить уравнение $x_1 z \vee x_2 = S \vee !Rz$ относительно переменных *R* и *S*.

Непосредственно из этого уравнения следует, что

$$R = !x_1, \ S = x_2.$$

Соотношения для определения функций возбуждения *T*-триггеров приведены в [26, 27].

Для других типов триггеров найти простые аналитические решения, аналогичные приведенным для *JK*- и *S*-триггеров, не удается.

Покажем, что мультиплексорный метод позволяет с единых позиций решать поставленную задачу по крайней мере тех типов триггеров, функции переходов которых приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

R	S	z	JK	S	R	E
			z_1	z_1	z_1	z_1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1

Из рассмотрения этой таблицы следует, что только столбец значений *JK*-триггера содержит все четыре типа фрагментов длиной два, что обеспечивает разложение произвольной функции переходов по крайней правой входной переменной. Остальные триггеры реализуют лишь монотонные функции переходов.

Пример 6.33. Реализовать автомат $z_1(x_1, x_2, z) = \left|0011\ 0111\right|^T = x_1 z \vee x_2$ на *JK*-триггере.

При $n - k = 1$ составим и решим уравнение:

$$x_1 z \vee x_2 = S!z \vee !Rz;$$

$$\mathrm{MX}(0, 1, z, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(z, 1, 0, !z; R, S);$$

$$R = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1!x_2;$$

$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

Пример 6.34. Реализовать автомат $z_1(x_1, x_2, z) = \left|0011\ 0111\right|^T = x_1 z \vee x_2$ на *S*-триггере.

При $n - k = 1$ составим уравнение:

$$x_1 z \vee x_2 = S \vee !Rz;$$

$$\mathrm{MX}(0, 1, z, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(z, 1, 0, 1; R, S).$$

Это уравнение имеет четыре решения:

$$R = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1!x_2,$$
$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$

$$R = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !(x_1 \oplus x_2),$$
$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$

$$R = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1,$$
$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$

$$R = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 1; x_1, x_2) = !x_1 \vee x_2,$$
$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

Простейшим является третье решение. Таким образом, если подход, рассмотренный в примере *6.32*, позволяет получить только одно решение (правда, простейшее), то мультиплексорный метод обеспечивает возможность получения большего числа решений.

Пример 6.35. Реализовать автомат $z_1(x_1, x_2, z) = |0011\ 0111|^T = x_1 z \vee x_2$ на R-триггере.

При $n - k = 1$ составим уравнение:

$$x_1 z \vee x_2 = !R(S \vee z);$$
$$\mathrm{MX}(0, 1, z, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(z, 1, 0, 0; R, S).$$

Это уравнение имеет два решения, из которых первое является более простым:

$$R = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1!x_2,$$
$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$

$$R = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1!x_2,$$
$$S = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 1; x_1, x_2) = !x_1 \vee x_2.$$

Пример 6.36. Реализовать автомат $z_1(x_1, x_2, z) = |0011\ 0111|^T = x_1 z \vee x_2$ на E-триггере.

При $n - k = 1$ составим уравнение:

$$x_1 z \vee x_2 = !R \,\#\, S \,\#\, z;$$
$$\mathrm{MX}(0, 1, z, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(z, 1, 0, z; R, S).$$

Это уравнение имеет два решения:

$$R = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1!x_2,$$
$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$

$$R = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0; x_1, x_2) = !x_2,$$
$$S = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Пример 6.37. Построить булевы формулы для программной реализации счетного триггера на *R*-триггерах.

Известно, например, из [27], что счетный триггер может быть описан системой булевых формул, в которой переобозначение переменной *z* будет выполнено в дальнейшем:

$$z(x,\ y,\ z) = \left|0011\ 0101\right|^{T} = !xy \vee xz;$$

$$y(x,\ y,\ z) = \left|0101\ 1100\right|^{T} = !xy \vee x!\,z.$$

Обе формулы положительно монотонны по определенным переменным: первая — по переменным *y* и *z*, а вторая — по переменной *y*. Составим уравнения так, чтобы в каждом из них в правой части упоминалась та переменная, которая используется в обозначении функции в левой части соответствующего соотношения, приведенного выше:

$$!xy \vee xz = !R_1(S_1 \vee z);$$
$$!xy \vee x!\,z = !R_2(S_2 \vee y).$$

Решим первое уравнение, записав его в МФ:

$$\mathrm{MX}(0, 1, z, z; x,\ y) = \mathrm{MX}(z, 1, 0, 0; R_1, S_1).$$

Это уравнение имеет два решения:

$$R_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x,\ y) = !x!\,y,$$
$$S_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x,\ y) = !x\,y;$$

$$R_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x,\ y) = !x!\,y,$$
$$S_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 0; x,\ y) = !x.$$

Решим второе уравнение, записав его в МФ:

$$\mathrm{MX}(y,\ y, 1, 0; x,\ z) = \mathrm{MX}(y, 1, 0, 0; R_2, S_2).$$

Это уравнение имеет два решения:

$$R_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x,\ z) = xz,$$
$$S_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0; x,\ z) = x!\,z;$$

$$R_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x,\ z) = xz,$$
$$S_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x,\ z) = x.$$

Выбирая вторые решения и вводя переобозначения переменной z, получим искомую СБФ:

$$R_1 = !x!y, \quad S_1 = !x, \quad z_1 = !R_1(S_1 \vee z),$$
$$R_2 = xz, \quad S_2 = x, \quad y = !R_2(S_2 \vee y),$$
$$z = z_1.$$

Выводы

1. Рассмотрено использование мультиплексорного метода для синтеза комбинационных схем в различных элементных базисах, известных из литературы. На примерах продемонстрирована эффективность этого метода. Мультиплексорный метод позволяет применять кроме тех булевых функций t переменных, которые закладывались в модуль при проектировании, также и ряд других функций, которые модуль может реализовать путем настройки, так как его порождающая функция зависит от числа переменных, большего t. Это объясняется тем, что мультиплексорный метод позволяет увеличить по сравнению с другими методами число входов модулей, используемых в качестве информационных входов, за счет увеличения количества решений, известного в каждом конкретном случае.

При этом, в частности, удалось доказать, что произвольная БФ в базисе И, ИЛИ, НЕ из пяти букв реализуется схемой из двух 3-универсальных модулей, в то время как для формульного метода верхняя оценка числа модулей в этом случае равна трем. На примере показано, что для модулей Препараты—Мюллера вместо получаемой известным методом единственной настройки на заданную БФУ предлагаемый метод позволяет найти большее число вариантов настройки.

2. Показано, как применять мультиплексорный метод для построения автоматов с памятью, использующих триггеры. Этот метод универсален и существенно менее трудоемок, чем известные также универсальные методы.

Литература

1. *Hellerman L.* A catalogue of three-variable or-invert and-invert logical circuits // IEEE Trans. on Electronic Computers. 1963. N 6.

2. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Реализация булевых формул однородными мультиплексорными и мажоритарными каскадами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 5.

3. *Артюхов В. Л., Розенблюм Л. Я., Шалыто А. А.* Логические возможности некоторых типов каскадных структур // Сети связи и дискретные устройства управления. М.: Наука, 1976.

4. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов // Сети передачи информации и их автоматизация. М.: Наука, 1965.
5. *Данем Б., Норт Д.* Проблема выбора логически эффективных основных ячеек и их соединений // Синтез релейных структур. М.: Наука, 1965.
6. *Patt Y. N.* A complex logic module for the synthesis of combinational switching circuits // Proc. 1967 AFIPS, Spring Joint Comput. Conf.
7. *Блох А. Ш.* Граф-схемы и их применение. Минск: Вышэйшая школа, 1975.
8. *Блох А. Ш., Павловский А. И.* Логические сети из трехвходовых операторов // Автоматика и вычисл. техника. 1980. № 4.
9. *Блох А. Ш., Павловский А. И.* Синтез логических схем на трехвходовом операторе // Доклады АН БССР. 1979. № 7.
10. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.
11. *Cohen S., Winder R.* Threshold gate building blocks // IEEE Trans. on Computers. 1969. № 9.
12. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А., Фишман Л. М.* Многофункциональный логический модуль. А.с. СССР № 813787 // Бюл. изобр. 1979. № 10.
13. *Вольский В. Е., Пушин Ю. Н., Юнг В. Н.* Проектирование пневматических систем управления судовыми энергетическими установками. Л.: Судостроение, 1975.
14. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А., Вольский В. Е.* Логический модуль. А. с. СССР № 798806 // Бюл. изобр. 1981. № 3.
15. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А., Фишман Л. М.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 760451 // Бюл. изобр. 1980. № 32.
16. *Варшавский В. И., Мараховский В. Б., Песчанский В. А.* Многофункциональные модули, реализующие все функции трех и четырех переменных // II Всесоюз. совещ. по теории релейных устройств и конечных автоматов. Тез. докл. Рига, 1971.
17. *Preparata F. P., Muller D. E.* Generation of near-optimal universal boolean functions // J. Comp. and System Science. 1970. N 2.
18. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы: Унифицированные логические схемы. Л.: ИПК СП, 1981.
19. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 758141 // Бюл. изобр. 1980. № 31.
20. *Антонов А. П., Мелехин В. Ф., Филиппов А. С.* Обзор элементной базы фирмы ALTERA. СПб.: ЭФО, 1997.
21. *Фистер М.* Логическое проектирование цифровых вычислительных машин. Киев: Техника, 1964.
22. *Агаханян Т. М., Плеханов С. П.* Интегральные триггеры устройств автоматики. М.: Машиностроение, 1978.
23. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Судовые управляющие системы. Л.: ИПК СП, 1982.
24. *Пухальский Г. И.* Логическое проектирование цифровых устройств радиотехнических систем. Л.: ЛГУ, 1976.
25. *Пухальский Г. И., Новосельцева Т. Я.* Цифровые устройства. СПб.: Политехника, 1996.
26. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1968.
27. *Шалыто А. А.* SWITCH-технология. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. СПб.: Наука, 1998.