Г л а в а 5

Реализация булевых функций схемами из мультиплексоров

5.1. Методы реализации булевых функций схемами из мультиплексоров «2 в 1»

5.1.1. Модификация канонического метода Блоха

Известен канонический метод Блоха [1], который основан на графической форме представления разложения Шеннона заданной функции и всех ее остаточных последовательно, по крайним левым входным переменным таблицы истинности (ТИ). Метод позволяет весьма эффективно строить схемы из переключательных контактов.

Этот метод применим также и для построения схем из мультиплексоров (MX) «2 в 1». Он состоит в следующем: по ТИ с фиксированным порядком входных переменных строится каноническая структура (КС); эта структура минимизируется за счет объединения кустов, помеченных одинаковыми цифрами; в минимизированной КС каждый куст заменяется мультиплексором.

Число мультиплексоров в построенной таким образом схеме, на входы которой подаются только безынверсные входные переменные, равно $N - 1$, где N — максимальный номер куста в КС. Эта схема может быть упрощена за счет замены переменной или ее инверсией каждого мультиплексора, на 2-входы которого подаются константы 0 и 1.

Предлагаемая модификация канонического метода позволяет непосредственно строить схемы, в которых на 2-входы мультиплексоров кроме указанных констант может подаваться также одна из переменных и (или) ее инверсия. Эта модификация состоит в изменении первого этапа канонического метода, т. е. в построении по ТИ с фиксированным порядком входных переменных модифицированной КС (МКС), кусты которой могут кодироваться не только цифрами, но и входными переменными и их инверсиями.

Число мультиплексоров в схеме, равное $N - 1$, как и в каноническом методе, может минимизироваться также за счет перестановки столбцов значений входных переменных в исходной таблице истинности.

Пример 5.1. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0000\ 1101\ 1011\ 0110 \right|^T.$$

На рис. 5.1 приведена МКС, построенная по ТИ, а на рис. 5.2 — схема из шести мультиплексоров, изоморфная этой МКС.

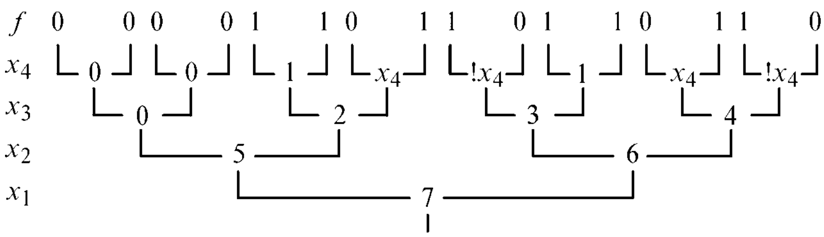

Рис. 5.1

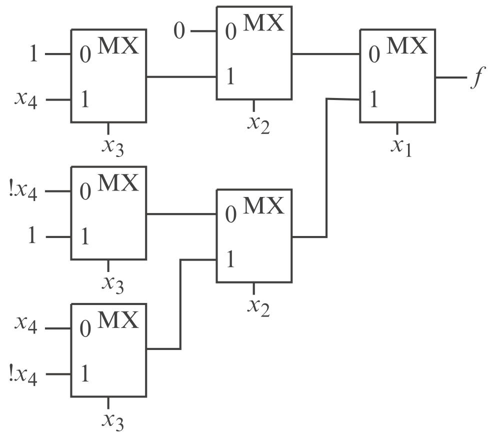

Рис. 5.2

Изменим порядок расположения в таблице истинности на «зеркальный». При этом для ее перестроения воспользуемся двухэтапным методом Блоха, который состоит в следующем:

— на первом этапе столбцы входных переменных переставляются в требуемом порядке без изменения столбца значений функции (табл. 5.1);

— на втором этапе строки измененной ТИ располагаются в лексикографическом порядке, образуя искомую ТИ (табл. 5.2).

Т а б л и ц а 5.1

x_4	x_3	x_2	$\mathbf{x_1}$	f
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	0
1	1	1	0	1
0	0	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	1	0	1	1
0	0	1	1	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

Т а б л и ц а 5.2

x_4	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

На рис. 5.3 приведена МКС, построенная по преобразованной ТИ, а на рис. 5.4 — схема из четырех мультиплексоров, изоморфная МКС.

При использовании рассматриваемого метода число мультиплексоров «2 в 1», требующихся для реализации произвольной БФУ, существенно зависящей от n переменных, определяется соотношением

$$n-1 \leqslant L(n) \leqslant 2^{n-1}-1.$$

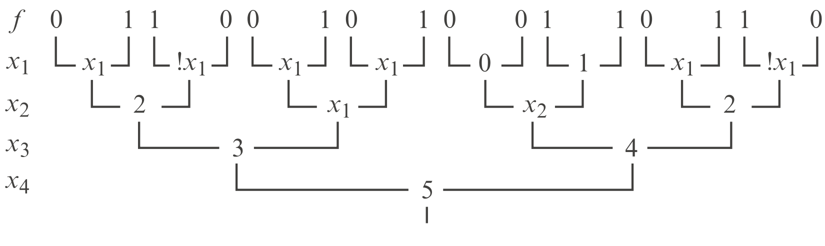

Рис. 5.3

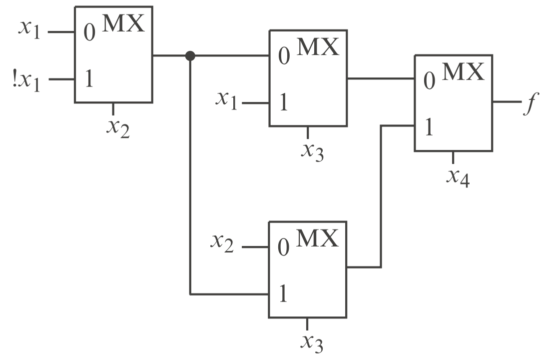

Рис. 5.4

Недостатки рассмотренного метода состоят в том, что

— для заданной ТИ в ходе синтеза в каждом ярусе применяются одни и те же входные переменные;

— мультиплексоры в схеме соединяются одинаково: выход предыдущего элемента соединяется с 2-входом по крайней мере одного из последующих элементов.

5.1.2. Распределительный метод

Этот метод является частным случаем мультиплексорного метода, но менее трудоемок.

Метод является графической формой представления разложения Шеннона заданной функции и всех ее остаточных последовательно, по крайним правым входным переменным ТИ.

Столбец значений произвольной БФУ *n* переменных в общем случае может состоять из четырех типов фрагментов — $\{0, !x_n, x_n, 1\}$. Из 4! = 24 вариантов расположения этих символов на входах МХ «4 в 1» выберем следующий: $g_0 = 0$, $g_1 = x_n$, $g_2 = !x_n$, $g_3 = 1$. При этом уравнение, определяющее разложение функции *f* по переменной x_n, имеет вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{MX}(0, x_n, !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет единственное решение. Удивительным является тот факт, что

$$\text{MX}(0, x_n, !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2) = \text{MX}(\Phi_1, \Phi_2; x_n).$$

Из этого соотношения следует, что МХ «4 в 1» может быть заменен на МХ «2 в 1». Таким образом, исходное уравнение приобретает вид

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{MX}(\Phi_1, \Phi_2; x_n).$$

Это уравнение, имеющее единственное решение, может быть найдено весьма оригинально: функцию Φ_1 образуют значения заданной БФУ, расположенные на позициях с четными номерами, а функцию Φ_2 — значения заданной БФУ с нечетными номерами. Это позволяет, не записывая указанные уравнения, проводить распределение значений функции непосредственно в ходе построения схемы, выполняемого от выхода к входам. При этом входы различных элементов, имеющие одинаковые пометки, объединяются, а элементы, которые имеют одинаковую пометку 2-входов, исключаются.

Пример 5.2. Реализовать БФУ, рассмотренную в предыдущем примере.

На рис. 5.5 приведена схема, построенная по исходной ТИ, а на рис. 5.6 — по преобразованной (табл.5.2).

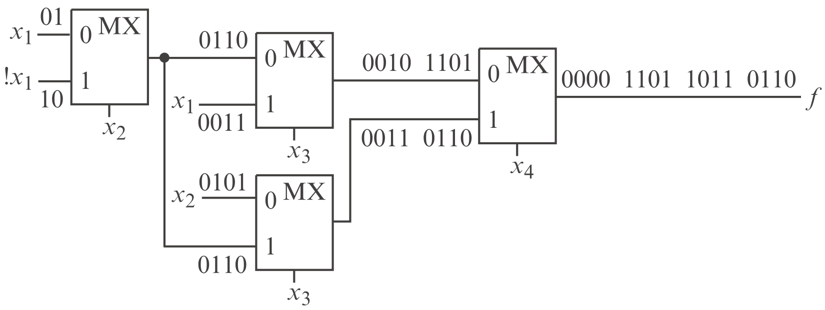

Рис. 5.5

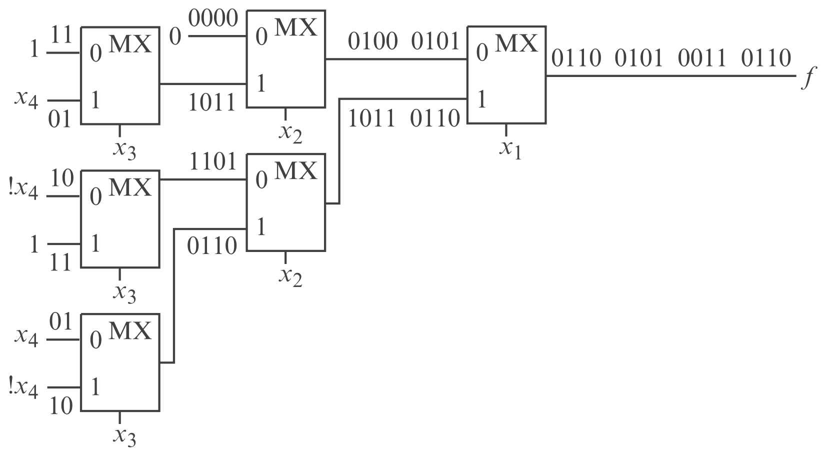

Рис. 5.6

Из приведенного примера следует, что для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ этот метод строит ту же схему, что и модификация канонического метода по функции $f(x_n, \ldots, x_1)$, и наоборот. Таким образом, вместо перестановки столбцов значений входных переменных в ТИ и построения с помощью любого из этих методов двух схем (по исходной и преобразованной ТИ с «зеркальным» порядком входных переменных) можно непосредственно по исходной ТИ построить две схемы, применяя к ней оба метода, и выбрать простейшую из них.

Предложенный метод обладает теми же недостатками, что и модификация канонического метода, и для него справедливы оценки, приведенные в предыдущем разделе.

Пример 5.3. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0001\ 0001\ 0001\ 1111\right|^T.$$

На рис. 5.7 приведена схема, построенная по исходной ТИ. В этой схеме элемент, имеющий одинаковые пометки входов, может быть исключен (рис. 5.8).

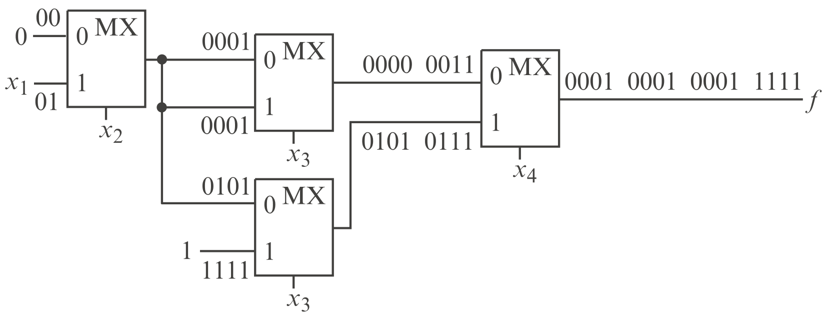

Рис. 5.7

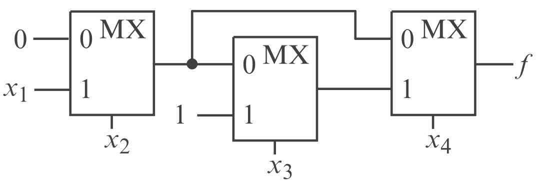

Рис. 5.8

Модификация канонического метода также строит в данном случае схему из трех мультиплексоров «2 в 1».

5.1.3. Мультиплексорный метод с настраиваемым образом декомпозиции

Метод состоит в том, что на *i*-м шаге построения схемы при минимально возможном значении $n - k \geqslant 1$ проводится мультиплексорное разложение на основе составления и решения относительно функции Φ_i уравнения вида

$$f_i = \mathrm{MX}(g_{0i}, g_{1i}; \Phi_i),$$

где f_i — заданная БФУ или любая ее остаточная, столбец значений которой состоит только из двух типов фрагментов — g_{0i} и g_{1i}.

Рассмотрим сначала применение этого метода к классу функций n переменных, у которых столбец значений состоит только из двух типов фрагментов каждой из перечисленных длин: $j = 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$.

Для этого класса функций рассматриваемый метод строит однородные каскадные схемы из $n - 1$ мультиплексоров «2 в 1», которые будем называть каскадами первого типа, а указанное выше свойство столбца значений — условием каскадности [2]. Эти схемы являются также и бесповторными, так как в них одна и та же входная переменная не подается на входы различных элементов, в то время как на входы одного элемента одновременно могут быть поданы входная переменная и ее инверсия. В этих схемах выход предыдущего элемента соединяется с 1-входом следующего элемента.

Пример 5.4. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0110\ 1001\ 1001\ 0110 \right|^T .$$

Так как в этой функции $g_{01} = x_4$, $g_{11} = !x_4$, то

$$f = \mathrm{MX}(x_4, !x_4; \Phi_1);$$
$$\mathrm{MX}(x_4, !x_4, !x_4, x_4, !x_4, x_4, x_4, !x_4; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(x_4, !x_4; \Phi_1);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3).$$

Так как в этой функции $g_{02} = x_3$, $g_{12} = !x_3$, то

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(x_3, !x_3; \Phi_2);$$
$$\mathrm{MX}(x_3, !x_3, !x_3, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(x_3, !x_3; \Phi_2);$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2).$$

Так как в этой функции $g_{03} = x_2$, $g_{13} = !x_2$, то

$$\Phi_2 = \text{MX}(x_2, !x_2; \Phi_3);$$
$$\text{MX}(x_3, !x_3; x_1) = \text{MX}(x_2, !x_2; \Phi_3);$$
$$\Phi_3 = x_1.$$

Используя правую часть каждого уравнения для определения настройки каждого мультиплексора «2 в 1», построим каскадную схему первого типа из трех таких элементов (рис. 5.9).

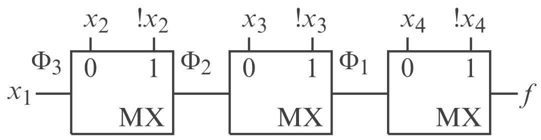

Рис. 5.9

Если снять ограничение, состоящее в том, что на каждом шаге построения схемы мультиплексорное разложение проводится при минимальном значении $n - k \geqslant 1$, то изложенный метод строит схемы, которые обладают для рассматриваемого класса БФУ некаскадной структурой. При этом

$$L(n) \geqslant n - 1.$$

Пример 5.5. Реализовать БФУ, рассмотренную в предыдущем примере.

Несмотря на то что, как было показано в предыдущем примере, для этой БФУ можно выполнить разложение при $n - k = 1$, выполним его при $n - k = 2$.

При этом так как $g_{01} = x_3 \oplus x_4$, $g_{11} = !g_{01}$, то

$$f = \text{MX}(g_{01}, !g_{01}; \Phi);$$
$$\text{MX}(g_{01}, !g_{01}, !g_{01}, g_{01}; x_1, x_2) = \text{MX}(g_{01}, !g_{01}; \Phi);$$
$$\Phi = \text{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2).$$

Реализуя функции g_{01} и Φ при $n - k = 1$, построим искомую схему из четырех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.10).

Перейдем к рассмотрению вопроса о реализации произвольных БФУ с помощью рассматриваемого метода.

Пример 5.6. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0111\ 1101\ 0101\ 1111\right|^T.$$

Этот столбец значений состоит из двух типов фрагментов длиной два, но четырех типов фрагментов длиной четыре. Поэтому он не может быть реализован каскадом первого типа.

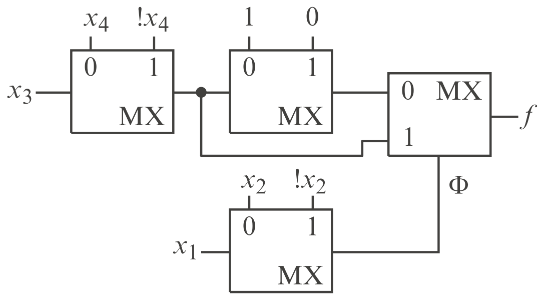

Рис. 5.10

Столбец значений этой БФУ содержит два типа фрагментов при $n-k=1$: $g_{01}=x_4$, $g_{11}=1$. Поэтому составим и решим уравнение:

$$f = \mathrm{MX}(x_4, 1; \Phi_1);$$
$$\mathrm{MX}(x_4, 1, 1, x_4, x_4, x_4, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = \mathrm{MX}(x_4, 1; \Phi_1);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3).$$

Столбец значений функции Φ_1 содержит два типа фрагментов при $n-k=2$: $g_{02}=x_2 \oplus x_3$, $g_{12}=x_2$. Поэтому запишем и решим уравнение:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(g_{02}, x_2; \Phi_2);$$
$$\mathrm{MX}(g_{02}, x_2; x_1) = \mathrm{MX}(g_{02}, x_2; \Phi_2);$$
$$\Phi_2 = x_1.$$

Столбец значений функции g_{02} содержит два типа фрагментов при $n-k=1$: $g_{03}=x_3$, $g_{13}=!x_3$. Поэтому запишем и решим уравнение:

$$g_{02} = \mathrm{MX}(x_3, !x_3; \Phi_3);$$
$$\mathrm{MX}(x_3, !x_3; x_2) = \mathrm{MX}(x_3, !x_3; \Phi_3);$$
$$\Phi_3 = x_2.$$

Исходя из приведенных соотношений, может быть построена схема из трех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.11).

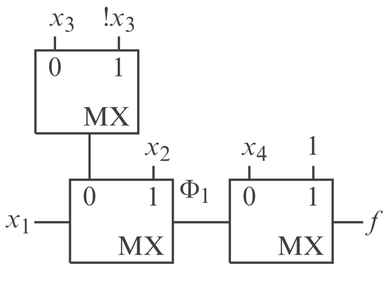

Рис. 5.11

Пример 5.7. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0001\ 0001\ 0001\ 1110\right|^T.$$

Столбец значений этой функции состоит из четырех типов фрагментов длиной два, и поэтому он не может быть реализован каскадной схемой первого типа.

Первый шаг декомпозиции этой функции может быть выполнен только при $n - k = 2$: $g_{01} = x_3 x_4$, $g_{11} = !x_3 \vee !x_4$. Составим и решим уравнение:

$$f = \mathrm{MX}(g_{01}, g_{11}; \Phi);$$
$$\mathrm{MX}(g_{01}, g_{01}, g_{01}, g_{11}; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(g_{01}, g_{11}; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2).$$

Остаточные функции g_{01}, g_{11}, Ф содержат по два типа фрагментов при $n - k = 1$: $\{0, x_4\}$, $\{1, !x_4\}$, $\{0, x_2\}$ соответственно. Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.12). Так как $g_{11} = !g_{01}$, то так же может быть построена схема, приведенная на рис. 5.13.

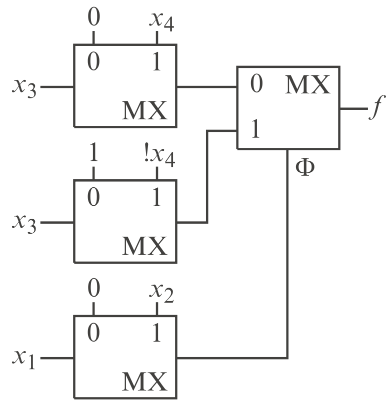

Рис. 5.12

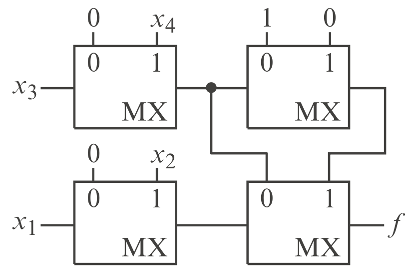

Рис. 5.13

Пример 5.8. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0111\ 0101\ 0000\ 0011\right|^T.$$

Столбец значений этой функции состоит из трех типов фрагментов длиной два, и поэтому он не может быть реализован каскадной схемой первого типа.

Первый шаг декомпозиции этой функции может быть выполнен при $n - k = 3$: $g_{01} = !x_2 x_3 \vee x_4$, $g_{11} = x_2 x_3$. Составим и решим уравнение:

$$f = \text{MX}(g_{01}, g_{11}; \Phi_1);$$
$$\text{MX}(g_{01}, g_{11}; x_1) = \text{MX}(g_{01}, g_{11}; \Phi_1);$$
$$\Phi_1 = x_1.$$

Функция g_{01} может быть декомпозирована при $n - k = 1$ ($g_{02} = x_4$, $g_{12} = 1$):

$$g_{01} = \text{MX}(x_4, 1; \Phi_2);$$
$$\text{MX}(x_4, 1, x_4, x_4; x_2, x_3) = \text{MX}(x_4, 1; \Phi_2);$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 0; x_2, x_3).$$

Функция Φ_2 может быть декомпозирована при $n - k = 1$ ($g_{03} = x_3$, $g_{13} = 0$):

$$\Phi_2 = \text{MX}(x_3, 1; \Phi_3);$$
$$\text{MX}(x_3, 0; x_2) = \text{MX}(x_3, 1; \Phi_3);$$
$$\Phi_3 = x_2.$$

Функция g_{11} может быть декомпозирована при $n - k = 1$ ($g_{04} = 0$, $g_{14} = 1$):

$$g_{11} = \text{MX}(0, 1; \Phi_4);$$
$$\text{MX}(0, 0, 0, 1; x_2, x_3) = \text{MX}(0, 1; \Phi_4);$$
$$\Phi_4 = \text{MX}(0, 0, 0, 1; x_2, x_3).$$

Функция Φ_4 может быть декомпозирована при $n - k = 1$ ($g_{05} = 0$, $g_{15} = x_3$):

$$\Phi_4 = \text{MX}(0, x_3; \Phi_5);$$
$$\text{MX}(0, x_3; x_2) = \text{MX}(0, x_3; \Phi_5);$$
$$\Phi_5 = x_2.$$

Исходя из приведенных соотношений, может быть построена схема из четырех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.14).

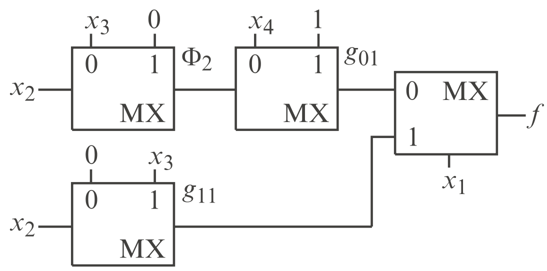

Рис. 5.14

Рассмотренный метод обладает свойством, которым не обладали два предыдущих метода: он позволяет для заданной ТИ проводить разложение не при фиксированном порядке входных переменных, а по любым крайним правым из этих переменных. Так, в последнем примере в первом ярусе используются переменные x_2, x_3, во втором — переменная x_4, а в третьем — x_1, в то время как при применении модификации канонического метода в первом ярусе обязательными являются переменные x_4, x_3, во втором — переменная x_2, а в третьем — x_1.

Метод не позволяет проводить разложение при любом порядке переменных, но отказ от фиксированного их порядка расширяет его оптимизационные возможности.

5.1.4. Смешанный метод

Этот метод основан на применении на каждом шаге декомпозиции одного из двух методов: если для столбца значений функции или подфункции выполняется условие каскадности, то используется мультиплексорный метод, в противном же случае — распределительный метод.

Пример 5.9. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0100\ 0100\ 1110\ 1011\right|^T .$$

Так как столбец значений состоит из четырех типов фрагментов длиной два, применим распределительный метод по переменной x_4:

$$g_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1;$$
$$g_2 = \text{MX}(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3).$$

Так как столбец значений функции g_2 состоит из двух типов фрагментов — длиной два и четыре, то используем мультиплексорный метод с настраиваемым образом декомпозиции по переменной x_3:

$$g_2 = \mathrm{MX}(!x_3, x_3; g_3);$$

$$\mathrm{MX}(!x_3, !x_3, !x_3, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(!x_3, x_3; g_3);$$

$$g_3 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2).$$

Так как столбец значений функции g_2 также состоит из двух типов фрагментов, то применим мультиплексорный метод с настраиваемым образом декомпозиции по переменной x_2:

$$g_3 = \mathrm{MX}(0, x_2; g_4);$$

$$\mathrm{MX}(0, x_2; x_1) = \mathrm{MX}(0, x_2; g_4);$$

$$g_4 = x_1.$$

Искомая схема приведена на рис. 5.15.

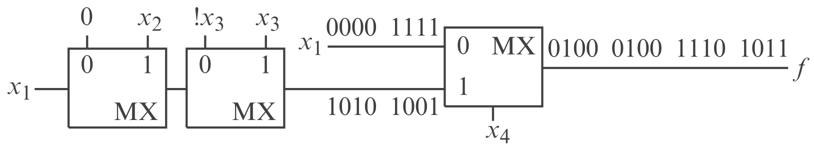

Рис. 5.15

5.1.5. Графовый метод

Этот метод имеет две разновидности, первая из которых состоит из этапов **1—5**, а вторая — не содержит этапа **2**.

1. По заданной БФ в базисе {&, ∨, !} на основе гл. 15 и [3] строится линейный бинарный граф (ЛБГ), состоящий из *h* условных (УВ) и двух операторных вершин (ОВ). При этом предполагается, что прямые и инверсные переменные равнодоступны.

2. Если в остове ЛБГ имеются дуги, помеченные символом «0», то пометки соответствующих условных вершин и исходящих из них дуг изменяются на противоположные. При этом строится ЛБГ, который может быть назван н о р м и р о в а н н ы м.

3. В ЛБГ, рассматривая его справа налево, каждая условная вершина заменяется на мультиплексор «2 в 1», что обеспечивает построение схемы из *h* мультиплексоров.

4. Последний элемент в схеме может быть заменен последним символом в реализуемой БФ, что обеспечивает построение схемы из *h* – 1 мультиплексоров «2 в 1». На этом этапе длинные связи в схеме могут быть укорочены.

5. Для восстановления без окончательной минимизации булевой формулы по построенной схеме, используя для этого соотношение, описывающее функционирование мультиплексоров «2 в 1», выполняется верификация схемы.

При этом отметим, что в построенной схеме на выходе каждого мультиплексора, несмотря на наличие в общем случае в БФ скобок произвольной глубины, реализуется фрагмент формулы [4], а не подформула, как это имеет место, например, при применении обратной польской записи.

Первая разновидность метода строит каскадную схему второго типа, а вторая — каскадную схему третьего типа. Эти схемы в отличие от каскадных схем первого типа могут содержать разветвления [3].

Пример 5.10. Реализовать БФ

$$f = !x_1 x_3 \vee x_1 !x_2 \vee x_2 !x_3 .$$

1. На рис. 5.16 приведен ЛБГ с шестью условными вершинами, построенный по этой формуле.

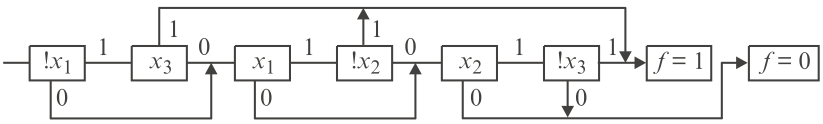

Рис. 5.16

2. На рис. 5.17 приведен нормированный ЛБГ, построенный по исходному графу.

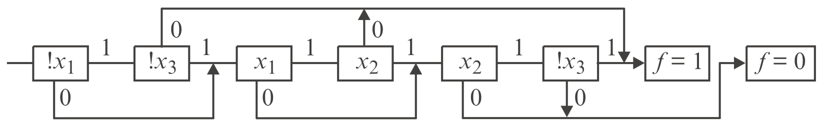

Рис. 5.17

3. На рис. 5.18 приведена каскадная схема второго типа с длинными связями из шести мультиплексоров «2 в 1».

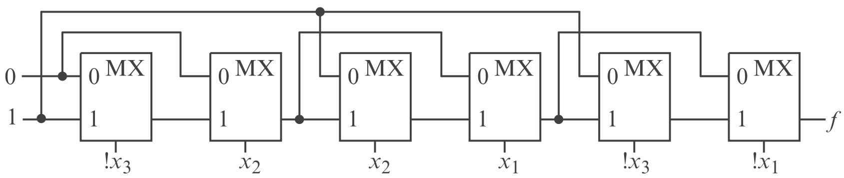

Рис. 5.18

4. На рис. 5.19 приведена каскадная схема второго типа с короткими связями из пяти мультиплексоров «2 в 1».

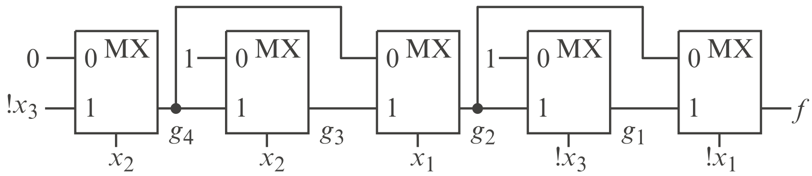

Рис. 5.19

5. Верификация построенной схемы выполняется следующим образом:

$$g_4 = 0 \,\&\, !x_2 \vee !x_3 x_2 = x_2 !x_3;$$
$$g_3 = 1 \,\&\, !x_2 \vee g_4 x_2 = !x_2 \vee x_2 !x_3;$$
$$g_2 = g_4 !x_1 \vee g_3 x_1 = x_1 !x_2 \vee x_2 !x_3;$$
$$g_1 = 1 \,\&\, !(!x_3) \vee g_2 !x_3 = x_3 \vee x_1 !x_2 \vee x_2 !x_3;$$
$$f = g_2 !(!x_1) \vee g_1 !x_1 = !x_1 x_3 \vee x_1 !x_2 \vee x_2 !x_3.$$

Сокращение числа разветвлений в каскадной схеме в общем случае может быть обеспечено за счет построения ЛБГ с минимальным числом путей, что достигается изменением порядка записи формулы [3].

Рассмотренная в примере формула инвариантна к изменению порядка ее записи, и поэтому в данном случае число разветвлений не уменьшается.

На рис. 5.20 приведена повторная каскадная схема второго типа, построенная по БФ $f = (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_4$, а на рис. 5.21 — бесповторная каскадная схема второго типа, построенная по БФ $f = x_4 \vee \vee x_3 (x_2 \vee x_1)$.

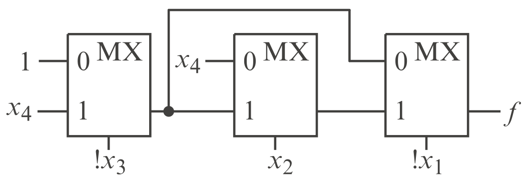

Рис. 5.20

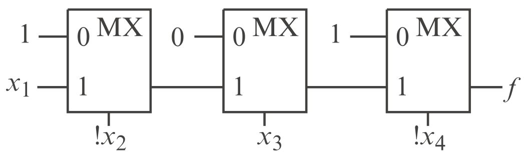

Рис. 5.21

Из изложенного в настоящем разделе и разд. 5.1.1 следует, что

$$L(h, n) \leqslant \min\,(h-1, 2^{n-1}-1).$$

Рассмотренный метод, в частности для бесповторной БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$, зависящей от n переменных, строит в общем случае каскадные схемы второго и третьего типов из $n - 1$ мультиплексоров «2 в 1». Однако существуют повторные формулы в этом базисе из h букв, зависящие от n переменных ($h > n$), которые могут быть реализованы, например с помощью модификации канонического метода, каскадными схемами второго и третьего типов без разветвлений из $n - 1$ мультиплексоров «2 в 1».

На рис. 5.22 приведена построенная с помощью модификации канонического метода каскадная схема третьего типа из трех MX, реализующая БФ $f = !x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_3) x_4$. На рис. 5.23 приведена каскадная схема второго типа, построенная в результате преобразования предыдущей схемы.

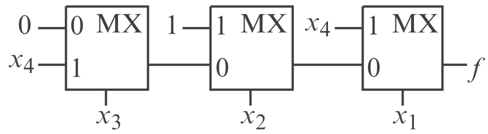

Рис. 5.22

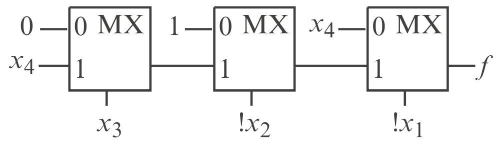

Рис. 5.23

В заключение раздела отметим, что схема из мультиплексоров «2 в 1», естественно, может строиться не только по ЛБГ, но и по бинарному графу, построенному по ТИ заданной функции (разд. 16.4.1, 16.4.2) за счет замены в нем каждой условной вершины мультиплексором, а операторной вершины $f = 0$ ($f = 1$) — константой 0 (1). Эта схема в дальнейшем может быть упрощена за счет замены переменной или ее инверсией каждого мультиплексора, на 2-входы которого подаются указанные выше константы.

5.1.6. Формульный метод

Если построена формула в базисе {&, ∨, ⊕, !} из h_1 букв, то по ней формульным методом может быть построена схема максимальной глубины из h – 1 двухвходовых элементов {&, ∨, ⊕}. Если в этой схеме каждый элемент заменить на мультиплексор «2 в 1», то получим искомую схему. При этом

$$L(h_1) = h_1 - 1 + B,$$

где B — число двухвходовых элементов «неравнозначность» в исходной схеме, не связанных с ее входами.

Пример 5.11. Реализовать БФ

$$f = (!x_1 x_3 \oplus x_2) \vee x_4.$$

Схема максимальной глубины, реализующая эту формулу, является каскадной (рис. 5.24). Эта схема преобразуется в бесповторную однородную каскадную схему первого типа из мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.25).

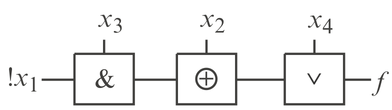

Рис. 5.24

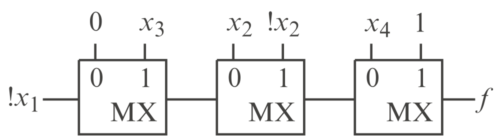

Рис. 5.25

Построение каскадной схемы по формуле проще, чем по таблице истинности, так как для последней определение выполнения условия каскадности связано с перебором по порядку расположения входных переменных в ней. В рассмотренном примере оно выполняется при x_1, x_3, x_2, x_4 и не выполняется при x_1, x_2, x_3, x_4.

Пример 5.12. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left| 0001 \ 0110 \right|^T.$$

Для этой функции условие каскадности не выполняется ни при одном порядке переменных. Но так как эта БФУ с помощью преобразования Артюхова—Шалыто (разд. 1.7 и [2]) может быть представлена повторной формулой

$$f = (x_1 \vee x_2)!x_3 \oplus x_1 \oplus x_2,$$

то она реализуется повторной однородной каскадной схемой первого типа, представленной на рис. 5.26.

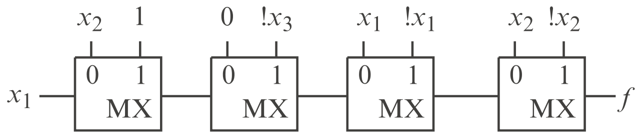

Рис. 5.26

Пример 5.13. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left| 0111\ 1110 \right|^T.$$

Для этой функции условие каскадности не выполняется ни при одном порядке переменных. По карте Карно строится булева формула

$$f = !x_1 x_3 \vee x_1 !x_2 \vee x_2 !x_3,$$

которая реализуется древовидной схемой из пяти мультиплексоров «2 в 1».

Разложение Рида этой функции по переменной x_1 строит БФ

$$f = x_1(!x_2 \oplus x_3) \oplus (x_2 \vee x_3),$$

которая реализуется недревовидной схемой из пяти мультиплексоров «2 в 1».

Преобразование Артюхова—Шалыто по переменной x_1 строит булеву формулу

$$f = \left((!x_1 \vee x_2) x_3 \vee !x_1 x_2 \right) \oplus x_1,$$

которая реализуется древовидной схемой из пяти мультиплексоров «2 в 1».

Учет того факта, что заданная БФУ является «зеркальной» (разд. 10.7), приводит к построению формулы $f = (x_1 \oplus x_2) \vee \vee (x_1 \oplus x_3)$, которая реализуется древовидной схемой из трех элементов (рис. 5.27).

В заключение раздела отметим, что недревовидными схемами могут быть реализованы бесповторные формулы в рассматриваемом базисе. Например, булева формула $f = x_1 x_2 \oplus x_3 x_4$ реализуется такой схемой, представленной на рис. 5.13.

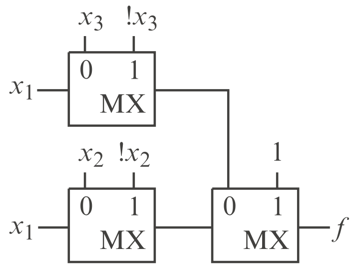

Рис. 5.27

5.1.7. Формульный метод в мультиплексорной форме

Рассмотренный в предыдущем разделе формульный метод ориентирован на построение простейшей по введенному критерию БФ. Однако если для применяемых элементов «родным» базисом является операция мультиплексирования «2 в 1», то при удачном выборе порядка переменных, по каждой из которых выполняется разложение Шеннона, может быть построена булева формула, использующая эту операцию и реализуемая формульным методом проще, чем булева формула, записанная в базисе $\{\&, \vee, \oplus, !\}$.

Пример 5.14. Реализовать БФУ, соответствующую формуле

$$f = !x_1!x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee !x_3x_4.$$

В базисе $\{\&, \vee, !\}$ простейшая формула имеет вид:

$$f = (!x_1!x_2 \vee x_1x_2)x_3 \vee !x_3x_4,$$

и реализуется формульным методом, древовидной схемой из шести мультиплексоров «2 в 1».

В базисе $\{\&, \vee, \oplus, !\}$ простейшая формула имеет вид:

$$f = (x_1 \oplus !x_2)x_3 \vee !x_3x_4,$$

и реализуется формульным методом, древовидной схемой из четырех мультиплексоров «2 в 1».

При применении операции мультиплексирования формула строится следующим образом:

$$f = x_4!x_3 \vee (x_1 \oplus !x_2)x_3 =$$
$$= \mathrm{MX}(x_4, x_1 \oplus !x_2; x_3) = \mathrm{MX}\big(x_4, \mathrm{MX}(!x_2, x_2; x_1); x_3\big).$$

Этой формуле соответствует древовидная схема из двух мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.28).

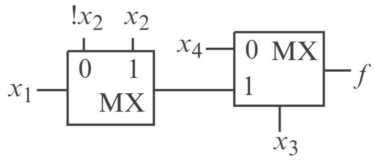

Рис. 5.28

Обратим внимание на то, что в этой схеме число элементов меньше чем $n - 1$.

5.1.8. Примеры сравнительного использования предложенных методов

Пример 5.15. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0110\ 1001\ 1001\ 0110 \right|^T.$$

1. Так как в данном случае БФ в базисе {&, ∨, !} состоит из 22 букв, то графовый метод строит каскадные схемы второго и третьего типов из 21 мультиплексора «2 в 1».

2. Модификация канонического метода строит по ТИ недревовидную схему из пяти мультиплексоров «2 в 1».

3. Распределительный метод также строит недревовидную схему из пяти мультиплексоров «2 в 1».

4. Мультиплексорный метод по таблице истинности и формульный метод по БФ

$$f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$$

строят каскадную схему первого типа из трех мультиплексоров «2 в 1».

Пример 5.16. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|1011\ 1110\ 1110\ 1011\right|^T.$$

1. Так как в данном случае БФ в базисе {&, ∨, !} состоит из 11 букв, то графовый метод строит каскадные схемы второго и третьего типов из 10 мультиплексоров «2 в 1».

2. Модификация канонического метода строит по ТИ недревовидную схему из пяти мультиплексоров «2 в 1».

3. Распределительный метод строит древовидную схему из четырех мультиплексоров «2 в 1».

4. Мультиплексорный метод по таблице истинности и формульный метод по БФ

$$f = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \vee !x_4$$

строят каскадную схему первого типа из трех мультиплексоров «2 в 1».

Пример 5.17. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0101\ 0111\ 0111\ 0111\right|^T =$$
$$= (x_1 \vee x_2) x_3 \vee x_4 .$$

1. Модификация канонического метода строит по ТИ недревовидную схему из трех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.29), изоморфную каскадной схеме третьего типа с разветвлениями, которая строится графовым методом по заданной формуле (рис. 5.30).

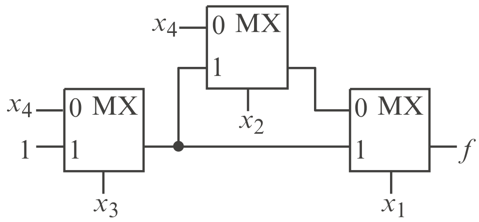

Рис. 5.29

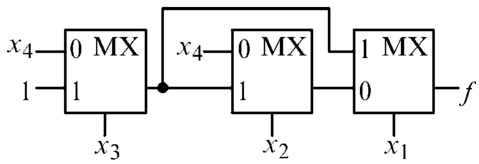

Рис. 5.30

2. Распределительный метод строит древовидную схему (рис. 5.31) из трех мультиплексоров «2 в 1», изоморфную каскадной схеме третьего типа без разветвлений (рис. 5.32), которая строится графовым методом по БФ

$$f = x_4 \vee x_3 (x_2 \vee x_1) .$$

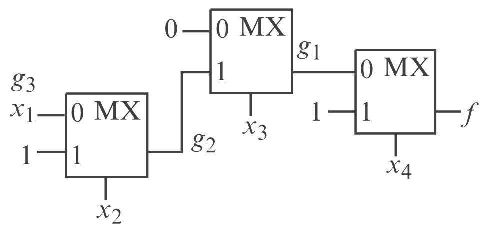

Рис. 5.31

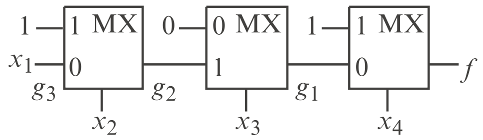

Рис. 5.32

3. Мультиплексорный метод и формульный метод строят каскадную схему первого типа из трех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.33).

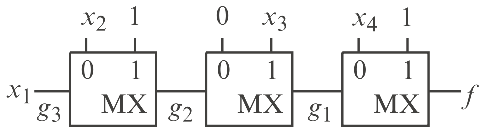

Рис. 5.33

Обратим внимание на удивительный факт, состоящий в том, что для данной БФ в каскадных схемах первого и третьего типов, построенных по формулам $f=(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_4$ и $f = x_4 \vee$ $\vee x_3(x_2 \vee x_1)$ соответственно, подформулы g_i совпадают. Этим свойством обладают булевы формулы, бесповторные в рассматриваемом базисе, со структурой, соответствующей схеме Горнера. При $n = 4$ кроме рассмотренной БФ существует еще один тип формул, обладающий указанным свойством. Представителем этого типа является формула $f=(x_1x_2 \vee x_3)x_4$.

4. Мультиплексорный метод (при $n - k = 2$ на первом шаге декомпозиции) строит схему из трех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.34). В этой схеме $g = x_3 \vee x_4$, $\Phi = x_1 \vee x_2$.

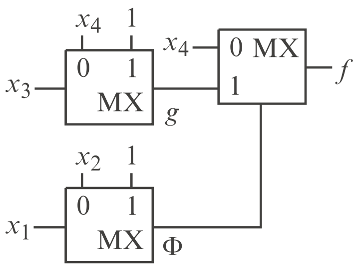

Рис. 5.34

Пример 5.18. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0111\ 0100\ 0100\ 0111\right|^T.$$

1. Графовый метод строит по БФ $f = (!x_1 !x_2 \vee x_1 x_2) x_3 \vee !x_3 x_4$ каскадные схемы второго и третьего типов из шести мультиплексоров «2 в 1».

2. Модификация канонического метода строит по ТИ недревовидную схему из пяти мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.35).

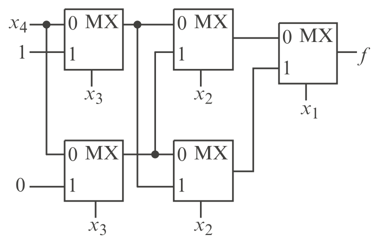

Рис. 5.35

3. Распределительный метод строит по ТИ недревовидную схему из четырех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.36).

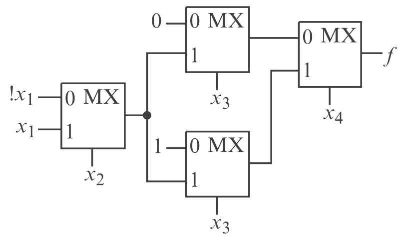

Рис. 5.36

4. Мультиплексорный метод строит древовидную схему из четырех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.37).

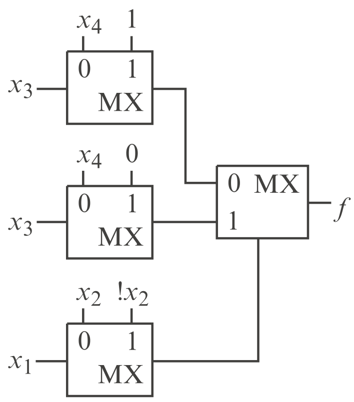

Рис. 5.37

5. Смешанный метод строит схему из четырех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.38).

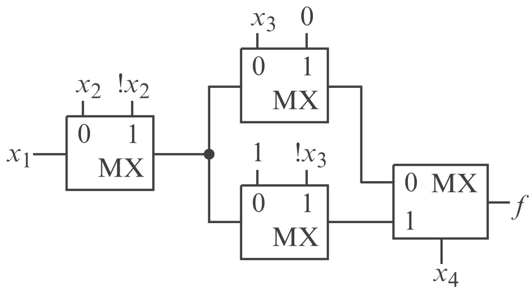

Рис. 5.38

6. Формульный метод строит по формуле $f = (!x_1 \oplus x_2)x_3 \vee !x_3 x_4$ схему из четырех мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.39).

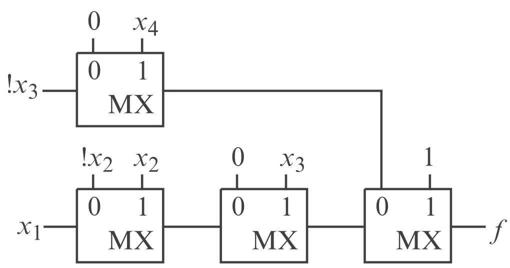

Рис. 5.39

7. Формульный метод в мультиплексорной форме строит схему из двух мультиплексоров «2 в 1» (рис. 5.28).

5.2. Методы реализации булевых функций схемами из мультиплексоров «2^k в 1»

Рассмотрим два таких метода, первый из которых основан на разложении Шеннона заданной БФУ по k крайним левым входным переменным в ТИ, а второй — по k крайним правым входным переменным в ней.

Первый метод известен из литературы [5], а второй является развитием распределительного метода, рассмотренного в разд. 5.1.2, и состоит в «распределении» значений функции или любой подфункции по 2^k направлениям.

Пример 5.19. Реализовать на мультиплексорах «4 в 1» функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0110\ 1111\ 0111\ 1101\right|^T.$$

При использовании известного метода строится схема из четырех таких мультиплексоров, которая компактно изображена на рис. 5.40.

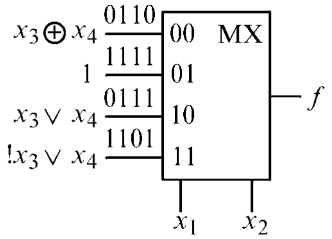

Рис. 5.40

При применении распределительного метода строится схема из трех мультиплексоров «4 в 1», которая компактно изображена на рис. 5.41.

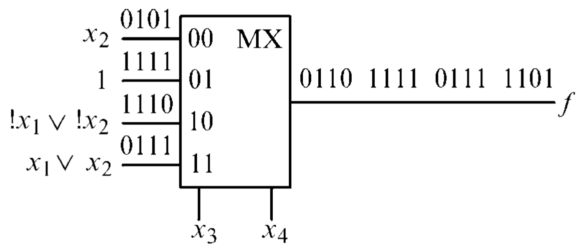

Рис. 5.41

Таким образом, для заданной ТИ без изменения порядка расположения столбцов значений входных переменных имеется возможность построения двух схем и выбора простейшей из них.

Выводы

1. Предложена модификация канонического метода Блоха, предназначенная для реализации БФУ схемами из мультиплексоров «2 в 1».

2. Предложен распределительный метод, предназначенный для реализации БФУ схемами из мультиплексоров.

3. Использование модификации канонического метода и распределительного метода позволяет по одной таблице истинности (без

перестановки столбцов значений входных переменных) получать два решения и выбирать простейшее из них.

4. Предложено применять мультиплексорный метод для реализации БФУ схемами из мультиплексоров «2 в 1». Определено условие, при выполнении которого строятся каскадные схемы первого типа из $n - 1$ мультиплексоров. Эти схемы являются однородными.

5. Предложен смешанный метод, основанный на использовании мультиплексорного и распределительного методов.

6. Предложен графовый метод реализации произвольной БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из h букв, основанный на замене в построенном для нее линейном бинарном графе каждой условной вершины на один мультиплексор «2 в 1». Метод строит каскадные схемы второго и третьего типов, состоящие из $h - 1$ мультиплексоров. Эти схемы в общем случае содержат разветвления.

7. Для реализации БФ в базисе $\{\&, \vee, \oplus, !\}$ предложены формульный метод и формульный метод в мультиплексорной форме.

8. Приведены примеры сравнительного применения предложенных методов.

Литература

1. *Блох А. Ш.* Граф-схемы и их применение. Минск: Вышэйшая школа, 1975.
2. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Реализация булевых формул однородными мультиплексорными и мажоритарными каскадами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 5.
3. *Артюхов В. Л., Кузнецов Б. П., Шалыто А. А.* Настраиваемые логические устройства для судовых управляющих систем. Л.: ИПК СП, 1986.
4. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: ИПК СП, 1984.
5. *Вау С., Танг С.* Универсальные логические модули и их применение // Экспресс-информация. Вычислительная техника. 1970. № 27.