Г л а в а 4

Реализация булевых функций схемами из мажоритарных элементов

Вопросы синтеза схем в этом базисе выделены в отдельную главу, так как практически никаким другим типам логических элементов не было посвящено столько теоретических исследований [1—19].

М а ж о р и т а р н ы м   э л е м е н т о м (МЭ) n переменных называется пороговый элемент с единичными весами и порогом $t = (m+1)/2$, где $m \geqslant 3$ и нечетно.

В литературе и в настоящей работе в основном используются МЭ с $m = 3$. Рассматриваются также МЭ с $m = 5$.

4.1. Методы реализации булевых функций схемами из трехвходовых мажоритарных элементов

4.1.1. Основные соотношения

Трехвходовой мажоритарный элемент описывается БФУ $F(a, b, c) = |0001\ 0111|^T$. Эта БФУ является симметрической и может быть записана в виде:

$$F = S_{2,3}(a, b, c).$$

Являясь пороговой [20], эта БФУ может быть записана в виде:

$$F = \text{sign}\,(a + b + c - 2).$$

Ее арифметический полином [21] имеет вид:

$$F = ab + ac + bc - 2abc.$$

При использовании арифметического полинома с маскированием (разд. 20.1.3) эта БФУ может быть записана в виде:

$$F = r_2^2\left(\operatorname{bin}(a+b+c)\right).$$

Рассматриваемая БФУ может быть также записана в виде (разд. 20.1.3):

$$F = \operatorname{sign}\left((a+b)c+ab\right).$$

Наиболее употребительным является представление этой БФУ в виде БФ:

$$F = (a \vee b)c \vee ab.$$

Можно показать, что

$$F = (a \oplus b)c \vee ab.$$

Применяя разложение Рида, получим БФ:

$$F = (a \oplus b)c \oplus ab.$$

Так как эта БФУ является самодвойственной (гл. 10), то

$$F = (a \oplus b)(a \oplus c) \oplus a.$$

Будем обозначать рассматриваемую БФУ символом

$$F = a \# b \# c.$$

4.1.2. Обзор литературы

Выполним краткий обзор методов, известных из литературы.

Методы синтеза схем из трехвходовых МЭ базируются на:

— аксиомах мажоритарной логики [1, 2];

— преобразованиях Кона—Линдемана [2], обеспечивающих за счет отождествления или антиотождествления переменных x_i и x_j (разложение сверткой переменных [15]) исключение одной переменной в остаточных функциях. Среди этих преобразований имеются, например, следующие:

$$f = \left(x_i \# x_j \# f(x_i = !x_j)\right) \# \left(x_i \# !x_j \# f(x_i = x_j)\right) \# !x_i;$$

$$f = \left(!x_i \# !x_j \# f(x_i = !x_j)\right) \# \left(!x_i \# x_j \# f(x_i = x_j)\right) \# x_i;$$

— разложении Шеннона в мажоритарном базисе (разложение фиксацией переменных) [7]:

$$f = \big(f(x_i = 0) \# !x_i \# 0 \big) \# \big(f(x_i = 1) \# x_i \# 0 \big) \# 1;$$

— монотонности БФУ по переменной x_i или ее инверсии. При этом справедливы соотношения, первые три из которых получены в [4] и называются разложениями Акерса, а остальные — в [17], которые назовем разложениями Розенблюма:

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_i;$$
$$f = f(x_i = 0) \# f(x_i = 1) \# x_i;$$
$$f = f(x_i = 0) \# f(x_i = 1) \# !x_i;$$
$$f = f(x_i = x_j) \# f(x_i = !x_j) \# x_i;$$
$$f = f(x_i = x_j) \# f(x_i = !x_j) \# !x_i;$$

— самодвойственности и монотонности БФУ [5];
— пороговости и монотонности [6, 15];
— «повышении» монотонности БФУ за счет «вре́менного» увеличения числа переменных [4];
— геометрических свойствах БФУ [5];
— функциональной разделимости БФУ [12];
— решении логических уравнений [14].

4.1.3. Формульный метод

Так как трехвходовой МЭ (в дальнейшем, если не оговаривается особо, МЭ) при $c = 0$ реализует формулу $F = a \vee b$, а при $c = 1$ — формулу $F = ab$, то этот элемент при равной доступности прямых и инверсных входных переменных универсален в классе БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из двух букв. Это обеспечивает возможность реализации произвольной БФ в указанном базисе из h букв древовидной схемой из $h - 1$ МЭ. Для бесповторной БФ (ББФ) получающаяся схема является бесповторной (по пометкам входов различных элементов). Бесповторные пороговые формулы (БПФ) могут быть реализованы особым видом древовидных схем — бесповторными каскадными схемами без разветвлений (бесповторные каскадные схемы).

Пример 4.1. Реализовать непороговую ББФ

$$f = (x_1 !x_2 \vee x_3 x_4) x_5.$$

Реализуем эту формулу древовидной схемой из двухвходовых элементов И и ИЛИ (рис. 4.1) и заменим каждый из этих элементов одним МЭ с соответствующей настройкой (рис. 4.2). Полученная

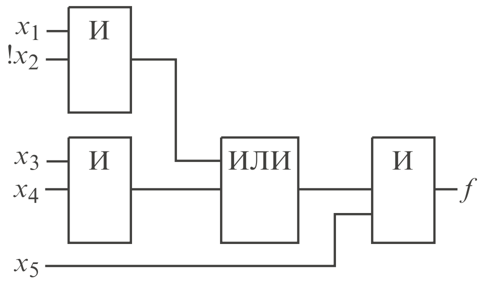

Рис. 4.1

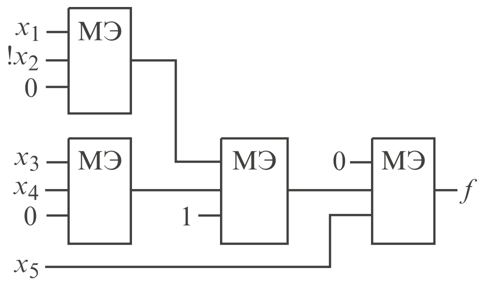

Рис. 4.2

схема является «естественной» для реализации ББФ, так как является древовидной, бесповторной, монотонной (не содержит одновременно $!x_i$ и x_i) и состоит из h – 1 = 4 МЭ.

4.1.4. Графовый метод

Этот метод, описанный в [25], включает следующие этапы.

1. Заданная БФ в базисе {&, ∨, !} из h букв записывается в порядке, обеспечивающем минимальное число путей в линейном бинарном графе (ЛБГ) [26].

2. По преобразованной БФ строится планарный ЛБГ [26], состоящий из h условных и двух операторных вершин.

3. Каждая условная вершина графа, который рассматривается от выходов к входу, заменяется на МЭ, два входа которого подключаются как в графе, а на третий вход подается входная переменная, указанная в рассматриваемой условной вершине. В результате строится каскадная схема с минимальным числом разветвлений, состоящая из h МЭ.

4. Последний МЭ в схеме исключается, а соответствующая входная переменная подается на вход предпоследнего МЭ. Это обеспечивает построение каскадной схемы с минимальным числом разветвлений, состоящей из h – 1 МЭ. Имеющиеся в схеме длинные связи входов МЭ с константами и одной из входных переменных заменяются на короткие связи.

5. Верификация. Особенность этой схемы состоит в том, что на выходе каждого МЭ реализуется н е п о д ф о р м у л а, как это имеет место в формульном методе, а ф р а г м е н т формулы, что впервые было установлено в [27].

Отметим, что для заданной БФУ в общем случае каскадная схема с разветвлениями не является единственной, так как при изменении порядка записи БФ число разветвлений в схеме может измениться или разветвления «переместятся» без изменения числа МЭ в схеме.

Графовый метод для произвольных ББФ строит бесповторные каскадные схемы с разветвлениями, а для произвольных БПФ — бесповторные каскадные схемы. Эти схемы являются монотонными. При этом новым является то, что, во-первых, для произвольной ББФ число МЭ в каскадной недревовидной схеме с разветвлениями и в древовидной схеме, строящейся формульным методом, совпадает, а, во-вторых, формуле, б е с п о в т о р н о й в базисе $\{\&, \vee, !\}$, соответствует схема с р а з в е т в л е н и я м и.

Пример 4.2. Реализовать каскадной схемой с разветвлениями из четырех МЭ непороговую бесповторную формулу $f = (x_1 ! x_2 \vee \vee x_3 x_4) x_5$.

1. Минимальное число путей в ЛБГ обеспечивается при записи БФ в виде $f = x_5 (x_1 ! x_2 \vee x_3 x_4)$.

2. Построим по этой формуле ЛБГ (рис. 4.3).

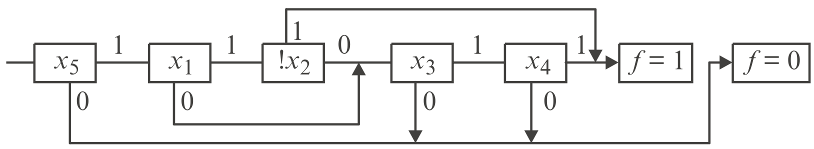

Рис. 4.3

3. Построим по ЛБГ каскадную схему с разветвлениями, состоящую из пяти МЭ (рис. 4.4).

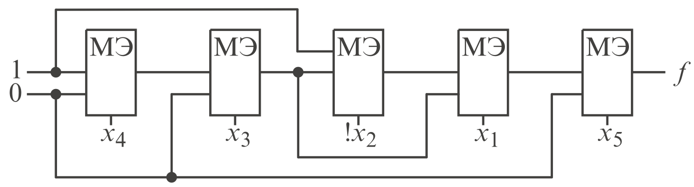

Рис. 4.4

4. Построим каскадную схему с разветвлениями, состоящую из четырех МЭ (рис. 4.5).

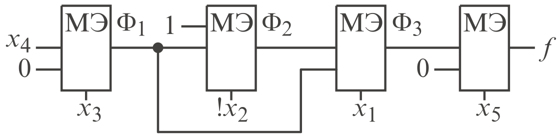

Рис. 4.5

5. Выполним верификацию построенной схемы:

$$\Phi_1 = x_3 \# x_4 \# 0 = x_3 x_4;$$
$$\Phi_2 = !x_2 \# \Phi_1 \# 1 = !x_2 \vee x_3 x_4;$$
$$\Phi_3 = x_1 \# \Phi_1 \# \Phi_2 = x_1 !x_2 \vee x_3 x_4;$$
$$f \;\; = x_5 \# 0 \# \Phi_3 = x_5 (x_1 !x_2 \vee x_3 x_4).$$

Если ЛБГ строить непосредственно по заданной ББФ, то схема изменится (рис. 4.6) без потери каскадности и изменения числа элементов в ней.

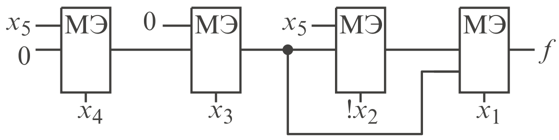

Рис. 4.6

В заключение раздела отметим, что изложенный метод базируется на соотношениях

$$\text{MX}(\Phi_0, \Phi_1; x_i) = \Phi_0 \# \Phi_1 \# x_i;$$
$$\text{MX}(\Phi_0, \Phi_1; x_i) = \Phi_0 \# \Phi_1 \# !x_i,$$

справедливых для функций, монотонных по переменным x_i и $!x_i$ соответственно [27].

4.1.5. Мультиплексорный метод

В данном случае этот метод включает в себя три составляющие:

— мажоритарные разложения;

— мультиплексорную декомпозицию, компоненты которой реализуются на МЭ;

— вспомогательные приемы, которые упрощают реализацию БФУ и дают возможность, в частности, проводить мажоритарные разложения.

Мультиплексорный метод позволяет с единых позиций проводить мажоритарные разложения и мультиплексорную декомпозицию, чередуя их при необходимости, в то время как в известных работах такие разложения и функциональная декомпозиция проводятся различными методами.

Мажоритарные декомпозиции и мажоритарные разложения булевых функций. Мажоритарной декомпозицией [14] БФУ n переменных называется ее представление в виде

$$f(X) = \Phi_1(X) \# \Phi_2(X) \# \Phi_3(X).$$

Такая декомпозиция имеет смысл в тех случаях, когда функции Φ_j по какому-либо критерию проще, чем исходная функция f. При этом в качестве критерия может выступать не только число переменных, от которых эти функции зависят, но и другие характеристики. Например, при $n = 3$ такая декомпозиция бывает целесообразной, если по крайней мере одна функция Φ_j является мажорантой, существенно зависящей от всех переменных. Так как МЭ описывается БФУ, симметрической по всем переменным, то совместим исследование его функциональных возможностей с построением логических уравнений для проведения декомпозиций при различных значениях $n - k$.

1. При $n - k = 0$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# \Phi_3;$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Если и функцию f записать в МФ, то нахождение решения этого уравнения, обладающего заданными свойствами, связано с огромным перебором, так как число решений в этом случае равно $4^{t_0} \cdot 4^{t_1} = 4^{t_0 + t_1} = 4^{2^n}$, где $t_0 (t_1)$ — число нулей (единиц) в столбце значений функции f. Среди этих решений находятся и все те, которые могут быть получены любым из известных методов. Так как конструктивный метод сокращения перебора в рамках предлагаемого подхода автору не известен, то в дальнейшем такая декомпозиция не используется.

2. При $n - k = 1$, если столбец значений функции f состоит из фрагментов длиной два, входящих в множество $\{0, x_n, 1\}$, можно записать уравнение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_n;$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(0, x_n, x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Если и функцию f записать в МФ, то это уравнение имеет 2^{t_2} решений, где t_2 — число фрагментов x_n в столбце значений функции f.

Декомпозиция этого типа может быть названа мажоритарным разложением функции f по переменной x_n.

При этом разложения Акерса и Розенблюма являются частными случаями этого разложения. Это разложение впервые было рассмотрено в [3], однако метод его построения существенно более трудоемок по сравнению с предлагаемым решением уравнений в МФ.

3. При $n - k = 2$, если столбец значений функции f состоит из фрагментов длиной четыре двух типов — $x_{n-1} x_n$ и $x_{n-1} \vee x_n$, можно записать уравнение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1 \# x_{n-1} \# x_n;$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(x_{n-1} x_n, x_{n-1} \vee x_n; \Phi).$$

Если и функцию f записать в МФ, то это уравнение имеет единственное решение.

Декомпозиция этого типа может быть названа мажоритарным разложением функции f одновременно по двум переменным x_{n-1} и x_n.

4. Если столбец значений функции f состоит из следующих типов фрагментов: $\{0, Q(X_1), 1\}$, или $\{0, Q(X_1)\}$, или $\{Q(X_1), 1\}$, то можно записать уравнение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# Q(X_1);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(0, Q(X_1), Q(X_1), 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Если и функцию f записать в МФ, то это уравнение имеет 2^{t_3} решений, где t_3 — число фрагментов $Q(X_1)$ в столбце значений функции f.

Декомпозиция этого типа может быть названа мажоритарным разложением функции f по подфункции $Q(X_1)$.

5. При наличии как прямых, так и инверсных входных переменных класс реализуемых функций расширяется.

При $n - k = 1$, если функция f состоит из фрагментов длиной два, входящих в множество $\{0, !x_n, 1\}$, можно записать уравнение:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# !x_n;$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(0, !x_n, !x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Если и функцию f записать в МФ, то это уравнение имеет 2^{t_4}, где t_4 — число фрагментов $!x_n$ в столбце значений функции f.

Декомпозиция этого типа может быть названа мажоритарным разложением функции f по переменной $!x_n$.

При $n - k = 2$ для существования мажоритарного разложения должно выполняться соотношение

$$Q_0 !\Phi \vee Q_1 \Phi = \Phi \# \tilde{x}_{n-1} \# \tilde{x}_n.$$

Пример 4.3. При $n - k = 2$ мажоритарно разложить БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0100\ 1101\ 1101\ 0100 \right|^T.$$

В этом случае $Q_0 = !x_3 x_4$, $Q_1 = !x_3 \vee x_4$. Так как

$$!x_3 x_4 !\Phi \vee (!x_3 \vee x_4)\Phi = \Phi \# !x_3 \# x_4,$$

то составим и решим уравнение:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi \# !x_3 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_0; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2.$$

Пример 4.4. Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0010\ 1101\ 1101\ 0010\right|^T$ не может быть мажоритарно разложена при $n - k = 2$, так как при $Q_0 = x_3 !x_4$, $Q_1 = !x_3 \vee x_4$ справедливо соотношение

$$x_3 !x_4 !\Phi \vee (!x_3 \vee x_4)\Phi \neq \Phi \# \tilde{x}_3 \# \tilde{x}_4.$$

Метод реализации булевых функций на основе мультиплексорной декомпозиции. Этот метод состоит в следующем.

1. Зафиксируем значение $n - k$.

2. Если $n - k = k$, то строится карта декомпозиции для определения двух множеств разнотипных фрагментов, зависящих от $n - k$ первых и последних переменных.

3. Если $n - k < k$, то множество разнотипных фрагментов, зависящих от последних $n - k$ переменных, определяется по столбцу значений ТИ. Множество разнотипных фрагментов, зависящих от первых $n - k$ переменных, определяется по карте декомпозиции.

4. При декомпозиции по первым $n - k$ переменным таблица истинности должна быть перестроена.

5. Дальнейшие этапы декомпозиции выполняются для каждого из выделенных множеств.

6. Пусть число фрагментов равно R. Выберем $m =]\log R[$.

7. Запишем логическое уравнение

$$f = \mathrm{MX}\big(Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1); \Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_m(X_0)\big).$$

8. Выполним назначение функций Q_i. Если это возможно, оно должно производиться таким образом, чтобы выполнялись отношения покрытия.

9. Исходное уравнение записывается в МФ и решается мультиплексорным методом относительно переменных Φ_j.

10. После этого могут быть записаны три типа соотношений:

$$f = F_1\big(Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1), \Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_m(X_0)\big);$$
$$f = F_2\big(\Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_m(X_0), X_1\big);$$
$$f = F_3\big(Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1), X_0\big).$$

В первом случае в базисе МЭ должны быть реализованы функции F_1, Q_i, Φ_j, во втором — функции F_2 и Φ_j, а в третьем — функции F_3 и Q_i. При реализации этих функций должны в отдельности учитываться отношения покрытия для функций Q_i и Φ_j.

11. Выбирается простейшая реализация.

Пример 4.5. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ 1111\ 0111\ 0001\right|^T.$$

1. Предположим, что $n - k = 2$.

2. Так как в данном случае $n - k = k$, то построим карту декомпозиции (табл. 4.1).

Таблица 4.1

x_1x_2	x_3x_4			
	00	01	10	11
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
10	0	1	1	1
11	0	0	0	1

Таким образом, заданная БФУ содержит четыре типа фрагментов, зависящих от переменных x_3, x_4: $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_2 = x_3 \vee x_4$, $g_3 = x_3 x_4$, и три типа фрагментов, зависящих от переменных x_1, x_2: $g_0 = !x_1 x_2$, $g_1 = x_1 \oplus x_2$, $g_2 = x_1 \vee x_2$. При этом

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \left|0100\ 0110\ 0110\ 0111\right|^T.$$

3. Используем фрагменты первого типа.

3.1. Назначим функции Q_i следующим образом: $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_3 x_4$, $Q_2 = x_3 \vee x_4$, $Q_3 = 1$.

3.2. Так как $Q_0 \leqslant Q_1 \leqslant Q_2 \leqslant Q_3$, то $f = Q_0 \vee Q_1 \Phi_2 \vee Q_2 \Phi_1 \vee \vee Q_3 \Phi_1 \Phi_2$.

3.3. Запишем и решим уравнение:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_3, Q_2, Q_1; \Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2;$$

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

3.4.1. Подставим функции Q_0 и Q_3 в упрощенное выражение для f. При этом $Q_1 = x_3 x_4$, $Q_2 = x_3 \vee x_4$, $\Phi_1 = x_1 \oplus x_2$, $\Phi_2 = x_2$,

$f=\Phi_1 Q_2 \vee (\Phi_1 \vee Q_1)\Phi_2$. Эта декомпозиция может быть реализована схемой из 1 + 1 + 3 + 0 + 4 = 9 МЭ.

3.4.2. Подставим все функции Q_i в упрощенное выражение для *f*. При этом $\Phi_1 = x_1 \oplus x_2$, $\Phi_2 = x_2$, $f=\Phi_1(\Phi_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee \Phi_2 x_3 x_4$. Эта декомпозиция может быть реализована схемой из 3 + 0 + 2 = = 5 МЭ.

3.4.3. Подставим все функции Φ_j в упрощенное выражение для *f*. При этом $Q_1 = x_3 x_4$, $Q_2 = x_3 \vee x_4$, $f=(!x_1 \vee Q_1)x_2 \vee Q_2 x_1 !x_2$. Эта декомпозиция может быть реализована схемой из 1 + 1 + 5 = 7 МЭ.

4. Используем фрагменты второго типа.

4.1. Назначим функции Q_i следующим образом: $Q_0 = Q_1 = !x_1 x_2$, $Q_2 = x_1 \oplus x_2$, $Q_3 = x_1 \vee x_2$.

4.2. Так как $Q_0 = Q_1 \leqslant Q_2 \leqslant Q_3$, то $f=Q_0 \vee Q_2\Phi_1 \vee Q_3\Phi_1\Phi_2$.

4.3. Запишем уравнение

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_2, Q_2, Q_2; \Phi_1, \Phi_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет два решения, из которых выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_3, x_4) = x_3 \vee x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_3, x_4) = x_3 x_4.$$

4.4.1. При совместной реализации функций Q_0 и Q_2 получим: $Q_0 = !x_1 x_2$, $Q_2 = Q_1 \vee x_1 !x_2$, $Q_3 = x_1 \vee x_2$, $\Phi_1 = x_3 \vee x_4$, $\Phi_2 = x_3 x_4$, $f=Q_0 \vee \Phi_1(Q_2 \vee Q_3\Phi_2)$. Эта декомпозиция может быть реализована схемой из 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 4 = 10 МЭ.

4.4.2. Подставим все функции Q_i в упрощенное выражение для *f*. При этом $\Phi_1 = x_3 \vee x_4$, $\Phi_2 = x_3 x_4$, $f=(!x_1 \vee \Phi_1\Phi_2)x_2 \vee x_1 !x_2 \Phi_1$. Эта декомпозиция может быть реализована схемой из 1 + 1 + 6 = = 8 МЭ.

4.4.3. Подставим все функции Φ_j в упрощенное выражение для *f*. При этом $Q_0 = !x_1 x_2$, $Q_2 = x_1 \oplus x_2$, $Q_3 = x_1 \vee x_2$, $f=!x_1 x_2 \vee \vee x_1 \Phi_1 (\Phi_2 \vee !x_2)$. Эта декомпозиция может быть реализована схемой из 1 + 3 + 1 + 5 = 10 МЭ.

Из изложенного следует, что сокращение числа типов фрагментов в заданной функции не привело к упрощению схемы.

5. Таким образом, простейшая схема, построенная на основе мультиплексорной декомпозиции, содержит пять МЭ.

6. Так как заданная БФУ реализуется БФ $f=!x_1 x_2 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \vee x_1 !x_2 x_3 \vee x_1 !x_2 x_4$, то она может быть записана как $f=!x_1 x_2 \vee \vee x_1(!x_2 \# x_3 \# x_4)$. Для этой формулы выполним эвристическую декомпозицию, которая реализуется схемой из четырех МЭ. Таким образом, для функции f существует более простая схема по сравнению со схемой, которую строит предлагаемый метод.

Вспомогательные приемы для упрощения реализации булевых функций. Перечислим основные из этих приемов.

1. Построение БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ с минимизированным числом букв. Это позволяет:

— обнаружить, что БФУ реализуется бесповторной формулой;

— обнаружить мажоранты (если они имеются) непосредственно по формуле;

— обнаружить (если они имеются) переменные, от которых БФУ не зависит;

— обнаружить (если они имеются) переменные, по которым БФУ монотонна;

— использовать формульный и графовый методы;

— провести эвристическую декомпозицию для снижения размерности решаемой задачи.

2. Построение карты декомпозиции для простого определения:

— при $n - k = k$ двух множеств разнотипных фрагментов, зависящих от $n - k$ первых или последних переменных;

— при $n - k < k$ множества разнотипных фрагментов, зависящих от $n - k$ первых переменных. В этом случае множество разнотипных фрагментов, зависящих от последних переменных, определяется непосредственно по ТИ.

3. Без построения БФ определить переменную, по которой БФУ монотонна, или изменить номенклатуру фрагментов в ТИ можно за счет перестановки столбцов входных переменных в ней. Эту перестановку целесообразно проводить с помощью метода Блоха [28], изложенного в разд. 5.1.1.

4. Назначение (по возможности) фрагментов Q_i таким образом, чтобы для них выполнялись отношения покрытия. Это позволяет строить образ декомпозиции без инверсий функций Φ_j и иметь возможность реализовывать функции Q_i не только раздельно, но и совместно.

5. Повышение монотонности [4] за счет «вре́менного» увеличения числа переменных в реализуемой функции f. Если БФУ немонотонна по всем переменным, то ее монотонность может быть повышена, если «временно» все вхождения, например переменной $!x_n$ в БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$, заменить переменной x_{n+1}. Это формирует новую функцию f_1. При этом появляется возможность мажоритарного разложения функции f_1 по переменной x_{n+1}, после проведения которого выполняется обратная замена этой переменной на переменную $!x_n$.

Пример 4.6. Выполнить мажоритарное разложение функции

$$f = x_1 \oplus x_2 = !x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 .$$

Так как эта функция немонотонна по каждой переменной, то требуемое разложение не может быть выполнено. Полагая $!x_2 = x_3$, получим БФ $f_1 = !x_1 x_2 \vee x_1 x_3$, которая допускает искомое разложение по переменной x_3:

$$!x_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_3;$$
$$\text{MX}(0, 1, x_3, x_3; x_1, x_2) = \text{MX}(0, x_3, x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения существует и такое:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2,$$

в котором функция Φ_2 совпадает с заданной функцией.

Выберем другое решение:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Выполняя обратную замену $x_3 = !x_2$, получим:

$$x_1 \oplus x_2 = !x_1 x_2 \# (x_1 \vee x_2) \# !x_2.$$

Из изложенного следует, что для

$$f = !(x_1 \oplus x_2) = x_1 \oplus !x_2 = !x_1 !x_2 \# (x_1 \vee !x_2) \# x_2.$$

При этом отметим, что рассмотренные функции двух переменных реализуются схемами из трех МЭ:

$$x_1 \oplus x_2 = (!x_1 \# x_2 \# 0) \# (x_1 \# x_2 \# 1) \# !x_2;$$
$$!(x_1 \oplus x_2) = (!x_1 \# !x_2 \# 0) \# (x_1 \# !x_2 \# 1) \# x_2,$$

в то время как остальные функции двух переменных реализуются одним МЭ.

6. Использование разложения Шеннона по немонотонной переменной x_i может повысить монотонность остаточных функций. Цена такого повышения монотонности — три МЭ, так как [10]

$$f = \big(f(x_i = 0) \# !x_i \# 0\big) \# \big(f(x_i = 1) \# x_i \# 1\big) \# 1.$$

Пример 4.7. Формула

$$f = !x_1 x_2 !x_3 \vee !x_1 x_3 !x_4 \vee x_1 !x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_3$$

немонотонна по всем переменным. Однако функции

$$f_1 = f(x_1 = 0) = x_2 !x_3 \vee x_3 !x_4 \text{ и } f_2 = f(x_1 = 1) = !x_2 x_4 \vee x_2 x_3$$

монотонны по двум переменным каждая.

7. Применение разложений Рида (разд. 3.1.1) по немонотонной переменной x_i или ее инверсии может повысить монотонность остаточных функций. Цена такого повышения монотонности также равна трем МЭ, так как в соотношениях

$$f = f_1 \oplus f_3 x_i \text{ и } f = f_2 \oplus f_3 !x_i,$$

как показано выше, операция «сумма по модулю два» реализуется схемой из трех МЭ.

Пример 4.8. Формула

$$f = !x_1 !x_2 x_3 \vee x_1 !x_3 \vee x_2 !x_3$$

немонотонна по всем переменным. Выполняя разложение Рида по переменной $!x_1$, получим $f_2 = f(x_1 = 1) = !x_3$, $f_3 = !x_2$. Формула $f = !x_3 \oplus !x_2 !x_1$ реализуется схемой из четырех МЭ.

8. Использование преобразований Артюхова—Шалыто по немонотонной переменной x_i может повысить монотонность функций, реализуемых после преобразований, что также требует применения трех МЭ.

Пример 4.9. Формула

$$f = !x_1 !x_2 !x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

немонотонна по всем переменным. Выполняя преобразование по переменной x_3, получим формулу $f = f_4 \oplus x_3$, в которой формула $f_4 = !x_1 \# !x_2 \# x_3$ монотонна по всем переменным и реализуется одним МЭ. Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

4.1.6. Оценки сложности схем

Предположим, что прямые и инверсные входные переменные равнодоступны.

1. Выше было показано, что произвольная БФ в базисе {&, ∨, !} из *h* букв реализуется формульным методом пирамидальной схемой или графовым методом каскадной схемой с разветвлениями, число МЭ в которых определяется соотношением

$$L(h) = h - 1.$$

Это соотношение справедливо и для реализации произвольной БПФ из *h* букв каскадной схемой из МЭ.

2. Так как при реализации монотонных БФУ *n* переменных с помощью мажоритарного разложения каждый МЭ в пирамидальной схеме исключает одну переменную, сложность реализации функций этого класса определяется соотношением

$$L_{\text{м}}(n) \leqslant 2^{n-1} - 1.$$

Таким образом, для монотонных БФУ справедливо соотношение

$$L_{\text{м}}(h, n) \leqslant \min\,(h - 1; 2^{n-1} - 1).$$

3. Так как произвольная БФУ n переменных может быть сведена к монотонной БФУ, зависящей от $2n$ переменных, то

$$L(n) \leqslant 2^{2n-1} - 1.$$

4. Так как произвольная БФУ n переменных может быть реализована пирамидальной схемой из мультиплексоров «2 в 1», число которых определяется соотношением

$$M(n) \leqslant 2^{n-1} - 1,$$

а каждый такой мультиплексор реализуется схемой из трех МЭ, то

$$L(n) \leqslant 3\,(2^{n-1} - 1).$$

5. Так как произвольная БФУ трех переменных реализуется схемой, содержащей не более четырех МЭ [5], то

$$L(n) \leqslant 3\,(2^{n-3} - 1) + 4 \cdot 2^{n-3} = 7 \cdot 2^{n-3} - 3.$$

6. Таким образом,

$$L_{\text{м}}(h, n) \leqslant \min\,(h - 1;\; 7 \cdot 2^{n-3} - 3).$$

7. В табл. 4.2 приведены значения функций $L_{\text{м}}(n)$ и $L(n)$ для $n = 3, \dots, 6$.

Таблица 4.2

n	3	4	5	6
$L_{\text{м}}(n)$	3	7	15	31
$L(n)$	4	11	25	55

8. Из этой таблицы следует, что в каталоге реализаций всех *NPN*-типов БФУ четырех переменных схемами из МЭ [15] по крайней мере одна из схем избыточна, так как она содержит 13 МЭ. Эта функция $f = \left|1001\ 0110\ 0110\ 1000\right|^T$ реализуется формулой

$$f = !x_1(!x_2 \oplus x_3 \oplus x_4) \vee x_1\big(!x_2(x_3 \oplus x_4) \vee x_2!x_3!x_4\big).$$

Из изложенного в разд. 4.1.9 следует, что при представлении этой формулы суперпозицией $f_1 = !x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$, $f_2 = !x_2(x_3 \oplus x_4) \vee$ $\vee x_2!x_3!x_4$, $f = !x_1 f_1 \vee x_1 f_2$ она реализуется схемой из десяти МЭ.

4.1.7. Реализация не полностью определенных булевых функций

Если на заданных входных наборах столбец значений БФУ не содержит одновременно фрагментов $!x_n$ и x_n, то это свойство должно быть сохранено и после доопределения. Если исходный столбец не содержит указанных фрагментов, то БФУ может быть доопределена так, что она не будет зависеть по крайней мере от переменной x_n.

Доопределение функции должно выполняться (если это возможно) так, чтобы ее можно было:

— разложить не только по одной переменной x_n, но и одновременно по двум переменным x_{n-1} и x_n;

— разложить по подфункции $Q(X_1)$;

— мультиплексорно декомпозировать при выполнении отношений покрытия.

Пример 4.10. Пусть задана БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|\ 00--\ \ 0--1\ \ 11-1\ \ 0-1-\ \right|^T.$$

Доопределим эту функцию так, чтобы она не зависела от переменной x_4 и состояла из фрагментов трех типов 0, Q, 1:

$$f = \left|0000\ 0011\ 1111\ 0011\right|^T.$$

Так как $Q = x_3$, запишем уравнение:

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_3;$$
$$\mathrm{MX}(0, x_3, 1, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет четыре решения, из которых выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0; x_1, x_2) = x_1!x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

Пример 4.11. Пусть задана БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|000-\ \ 0-01\ \ 01-1\ \ -111\right|^T.$$

Доопределим эту функцию так, чтобы она при $n - k = 2$ состояла из двух типов фрагментов длиной четыре: $f = \left|0001\ 0001\ 0111\ 0111\right|^T$.

Полагая $Q_0 = x_3 x_4$, $Q_1 = x_3 \vee x_4$, запишем уравнение

$$f = \Phi \# x_3 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_0, Q_1, Q_1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется одним МЭ.

4.1.8. Реализация булевых функций, описываемых формулами, бесповторными в базисе И, ИЛИ, НЕ

Формульный и графовый методы для ББФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из h букв строят бесповторные схемы из $h - 1$ МЭ. Покажем, что использование мультиплексорного метода позволяет для БФУ, описываемых такими формулами, строить повторные схемы, в том числе и из $h - 1$ МЭ, что весьма удивительно.

Пример 4.12. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ \ 0101\ \ 0011\ \ 0111\right|^T.$$

Эта БФУ содержит нечетное число единиц, что является необходимым условием бесповторности. Реализуем эту БФУ с помощью нескольких подходов.

1. Так как она монотонна по переменной x_4, то выполним мажоритарную декомпозицию по этой переменной, применяя мультиплексорный метод:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(0, 0, x_4, x_4, 0, 1, x_4, 1; x_1, x_2, x_3) = \mathrm{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет восемь решений:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, ?, ?, 0, 1, ?, 1; x_1, x_2, x_3);$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, ?, ?, 0, 1, ?, 1; x_1, x_2, x_3).$$

Из рассмотрения функции Φ_1 следует, что она может быть доопределена до мажоранты. При этом функция Φ_2 доопределяется автоматически:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,0,0,1,0,1,1,1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3;$$

$$\Phi_2 = \text{MX}(0,0,1,0,0,1,0,1; x_1, x_2, x_3) = !x_1 x_2 !x_3 \vee x_1 x_3.$$

Если функцию Φ_2 реализовать графовым методом, то функция f реализуется недревовидной схемой из шести МЭ (рис. 4.7). При использовании формульного метода для реализации функции Φ_2 строится повторная древовидная схема из того же числа МЭ (рис. 4.8).

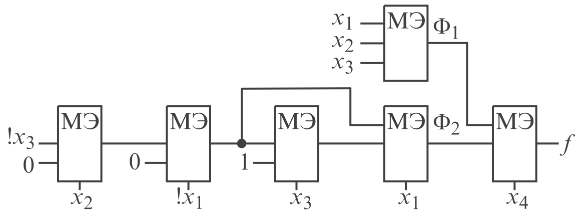

Рис. 4.7

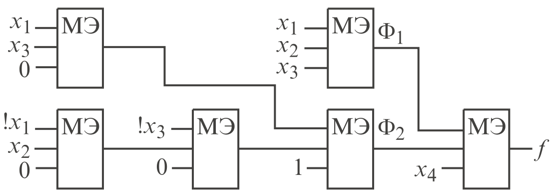

Рис. 4.8

Если не стремиться доопределить функцию Φ_1 до мажоранты, то может быть выбрано другое решение, например

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,0,0,0,0,1,0,1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3;$$

$$\Phi_2 = \text{MX}(0,0,1,1,0,1,1,1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 \vee x_2.$$

Так как $\Phi_2 = \Phi_1 \vee x_2$, то заданная БФУ реализуется недревовидной схемой из трех МЭ (рис. 4.9), которая изоморфна бесповторной каскадной схеме с разветвлениями (рис. 4.10).

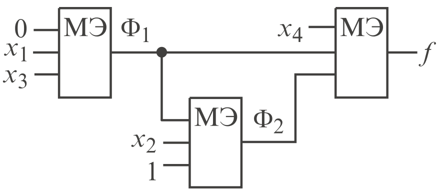

Рис. 4.9

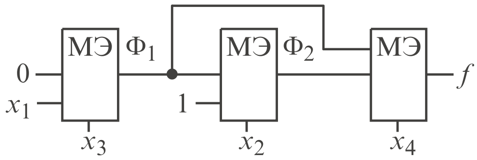

Рис. 4.10

2. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2),$$

где $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_4$, $Q_2 = x_3$, $Q_3 = x_3 \vee x_4$. Так как отношения покрытия выполняются, то

$$f = Q_0 \vee Q_1 \Phi_2 \vee Q_2 \Phi_1 \vee Q_3 \Phi_1 \Phi_2 = \Phi_1 x_3 \vee \Phi_2 x_4.$$

Для определения функций Φ_1 и Φ_2 запишем исходное уравнение в МФ и решим его:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = x_1;\ \Phi_2 = x_2.$$

Таким образом, получили ББФ $f = x_1 x_3 \vee x_2 x_4$. Так как заданная БФУ реализуется б е с п о в т о р н о й БФ в рассматриваемом базисе, которая в силу этого является м о н о т о н н о й, то можно утверждать, что схемы на рис. 4.7, 4.8, построенные с помощью мультиплексорного метода, обладают у д и в и т е л ь н ы м и свойствами:

— они п о в т о р н ы;

— они н е м о н о т о н н ы, несмотря на то что МЭ монотонны;

— они содержат число МЭ большее, чем $h - 1$.

3. Формульный метод по полученной ББФ строит бесповторную древовидную схему из трех МЭ (рис. 4.11).

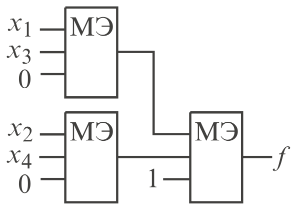

Рис. 4.11

4. При изменении порядка переменных в заданной БФУ

$$f(x_1, x_3, x_2, x_4) = \left|0001\ 0001\ 0001\ 1111\right|^T$$

появляется возможность выполнить мажоритарное разложение по функции $Q = x_2 x_4$:

$$f(x_1, x_3, x_2, x_4) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# Q;$$
$$\text{MX}(Q, Q, Q, 1; x_1, x_3) = \text{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди восьми решений этого уравнения выберем следующие два:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \text{MX}(1, 1, 0, 1; x_1, x_3) = !x_1 \vee x_3; \\ \Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_3) = x_1; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Phi_1 = \text{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_3) = x_1 \vee !x_3; \\ \Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_3) = x_3. \end{cases}$$

Таким образом, заданная БФУ может быть реализована также и повторными древовидными схемами из трех МЭ (рис. 4.12, 4.13).

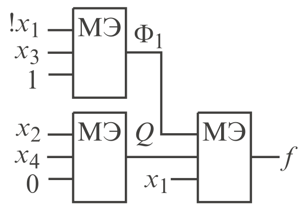

Рис. 4.12

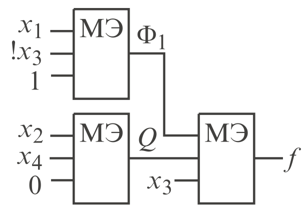

Рис. 4.13

5. Графовый метод строит по полученной ББФ бесповторную каскадную схему с разветвлениями (рис. 4.14), с точностью до обозначений совпадающую со схемой на рис. 4.10.

Схема на рис. 4.10 реализует БФ при «естественном» порядке записи, а схема на рис. 4.14 — при противоположном порядке. И в том и в другом случае реализация выполняется не по подформулам, а по фрагментам формулы. Для схемы на рис. 4.14 справедливы соотношения:

$$\Phi_3 = 0 \# x_4 \# x_2 = x_4 x_2; \quad \Phi_4 = \Phi_3 \# 1 \# x_3 = x_4 x_2 \vee x_3;$$
$$f = \Phi_3 \# \Phi_4 \# x_1 = x_4 x_2 \vee x_3 x_1.$$

При этом отметим, что в этой формуле подформула Φ_4 отсутствует.

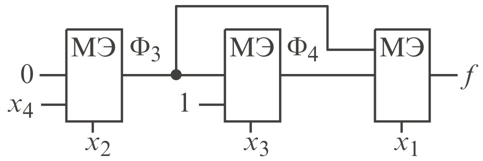

Рис. 4.14

Таким образом, для заданной БФУ построены пять типов схем: недревовидная, повторная древовидная, бесповторная древовидная, повторная древовидная и бесповторная каскадная с разветвлениями, причем схемы трех последних типов содержат по три МЭ.

Рассмотренная БФУ не порождает каскадные схемы без разветвлений (каскадные схемы). Это связано с тем, что она реализуется непороговой ББФ. Булевы функции, соответствующие бесповторным пороговым формулам, могут быть реализованы в том числе и бесповторными и повторными каскадными схемами.

Пример 4.13. Реализовать БФУ

$$f(x_1, \ldots, x_5) = \left| 0101\ 0111\ 0101\ 0111\ 0111\ 0111\ 0101\ 0111 \right|^T.$$

Эта БФУ содержит нечетное число единиц, что является необходимым условием бесповторности. Она реализуется БПФ $f = (x_1 ! x_2 \vee \vee x_3) x_4 \vee x_5$.

1. Бесповторная каскадная схема, построенная формульным методом, приведена на рис. 3.20.

2. Так как заданная БФУ монотонна по переменной x_5, то выполним мажоритарное разложение по этой переменной:

$$f(x_1, \ldots, x_5) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_5;$$
$$\text{MX}(x_5, x_5, x_5, 1, x_5, x_5, x_5, 1, x_5, 1, x_5, 1, x_5,\ x_5,\ x_5, 1;$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{MX}(0, x_5, x_5, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет $2^{11} = 2048$ решений, одно из которых следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= x_4;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= x_1 ! x_2 \vee x_3 \vee ! x_4.$$

Таким образом, в этом случае последний МЭ в схеме реализует БФУ

$$f = \Phi_2 \# x_4 \# x_5.$$

Это соотношение, внешне напоминающее мажоритарное разложение по переменным x_4 и x_5, им не является, так как в данном случае функция Φ_2 зависит от переменной x_4, т.е. по этой переменной декомпозиция является неразделительной.

Если функцию Φ_2 реализовать формульным методом, то получится п о в т о р н а я каскадная схема из четырех МЭ (рис. 4.15), реализующая б е с п о в т о р н у ю БФ из пяти букв, ч т о д о с и х п о р б ы л о н е и з в е с т н о. Удивительным является также и то, что построенная схема из h – 1 элементов «немонотонна» по переменной x_4, несмотря на то что реализуемая БФУ по этой переменной монотонна.

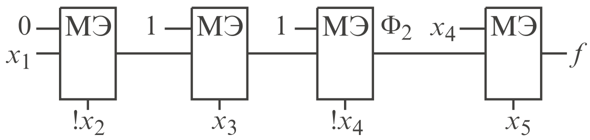

Рис. 4.15

Бесповторная каскадная схема для рассмотренной БФУ построена мультиплексорным методом в примере 3.20.

Из изложенного в настоящем разделе автор предполагает, что минимальное число МЭ, требующихся для реализации ББФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из h букв, равно h – 1. Эта оценка обеспечивается в классе древовидных схем формульным методом, а переход к недревовидным схемам, видимо, не позволяет снизить эту оценку. Естественно, что для повторных БФ древовидные схемы во многих случаях не минимальны.

4.1.9. Реализация представителей всех *PN*-типов булевых функций трех переменных

Существуют 16 *PN*-типов БФУ, существенно зависящих от трех переменных. Определим для выбранных представителей каждого из *PN*-типов сложность простейшей схемы, получаемой с помощью предлагаемых подходов.

Пример 4.14. Булева функция $f_1(x_1, x_2, x_3) = \left|0001\ 0111\right|^T = x_1 \# \# x_2 \# x_3$ реализуется одним МЭ.

Пример 4.15. Булевы формулы, бесповторные в базисе $\{\&, \vee, !\}$:

$$f_2 = x_1 x_2 x_3,\ f_3 = x_1 x_2 \vee x_3,\ f_4 = x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ f_5 = (x_1 \vee x_2) x_3,$$

реализуются, например, формульным или графовым методом, схемами из двух МЭ.

Пример 4.16. Реализовать БФУ

$$f_6(x_1, x_2, x_3) = \left| 0001\ 0100 \right|^T = (!x_1 x_2 \vee x_1 !x_2) x_3.$$

1. Так как $h = 5$, то формульный и графовый методы строят схемы из четырех МЭ.

2. Формула $f_6 = (x_1 \oplus x_2) x_3$ реализуется схемой из четырех МЭ, так как подформула $f = x_1 \oplus x_2$ реализуется подсхемой из трех МЭ.

3. Так как БФУ монотонна по переменной x_3, то на основе мультиплексорного метода

$$f_6 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_3;$$
$$\mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 0; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет четыре решения, одно из которых следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из трех МЭ:

$$f_6 = (x_1 \# !x_2 \# 0) \# (!x_1 \# x_2 \# 0) \# x_3.$$

4. В [15] эта БФУ также реализована схемой из трех МЭ, построенной на основе неразделительной декомпозиции:

$$f_6 = (x_1 \# x_2 \# x_3) \# (!x_1 \# x_2 \# 1) \# 0.$$

Пример 4.17. Реализовать БФУ

$$f_7(x_1, x_2, x_3) = \left| 0111\ 1101 \right|^T = !x_1 x_2 \vee x_1 !x_2 \vee x_3.$$

1. Так как $h = 5$, то формульный и графовый методы строят схемы из четырех МЭ.

2. Формула $f_7 = (x_1 \oplus x_2) \vee x_3$ реализуется схемой из четырех МЭ.

3. Так как БФУ монотонна по переменной x_3, то на основе мультиплексорного метода

$$f_7 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_3;$$
$$\mathrm{MX}(x_3, 1, 1, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет четыре решения, одно из которых следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1,\ 1,\ 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 \vee !x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из трех МЭ:

$$f_7 = (x_1 \# x_2 \# 1) \# (!x_1 \# !x_2 \# 1) \# x_3.$$

4. В [15] эта БФУ также реализована схемой из трех МЭ, построенной на основе неразделительной декомпозиции:

$$f_7 = (!x_1 \# x_2 \# x_3) \# (x_1 \# !x_2 \# 0) \# 1.$$

Пример 4.18. Реализовать БФУ

$$f_8(x_1, x_2, x_3) = \left|0110\ 1001\right|^T =$$
$$= !x_1\ (!x_2 x_3 \vee x_2 !x_3) \vee x_1\ (!x_2 !x_3 \vee x_2 x_3).$$

1. Так как $h = 10$, то формульный и графовый методы строят схемы из девяти МЭ.

2. Формула $f_8 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ реализуется схемой из шести МЭ.

3. Так как БФУ немонотонна по всем переменным, то для проведения мажоритарного разложения выполним в БФ в базисе {&, ∨, !} замену $!x_3 = x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 !x_2 x_4 \vee !x_1 x_2 x_4 \vee !x_1 !x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 =$$
$$= \left|0011\ 0101\ 0101\ 0011\right|^T.$$

Для этой БФУ можно записать уравнение

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\text{MX}(0, 1, x_4, x_4, x_4, x_4, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = \text{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди 16 решений этого уравнения может быть выбрано следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = !x_1 \# x_2 \# x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# !x_2 \# x_3.$$

Если выполнить обратную замену $x_4 = !x_3$, то получим искомую реализацию из трех МЭ:

$$f_8 = (!x_1 \# x_2 \# x_3) \# (x_1 \# !x_2 \# x_3) \# !x_3.$$

Если заменить переменную x_3, то

$$f_8 = (x_1 \# !x_2 \# !x_3) \# (x_1 \# x_2 \# !x_3) \# x_3.$$

4. Аналогичные решения можно получить с помощью использования Кона—Линдемана [10].

Следствием полученных результатов является реализация функции «четность» трех переменных $f_{81} = !f_8$:

$$f_{81} = (!x_1 \# x_2 \# !x_3) \# (x_1 \# !x_2 \# !x_3) \# x_3;$$
$$f_{81} = (x_1 \# !x_2 \# x_3) \# (x_1 \# x_2 \# x_3) \# !x_3.$$

Пример 4.19. Реализовать БФУ

$$f_9(x_1, x_2, x_3) = \left|0011\ 0101\right|^T = !x_1 x_2 \vee x_1 x_3.$$

1. В [10] эта БФУ реализована с помощью метода Акерса [3]. Она сводится к логически пассивной БФУ четырех переменных и реализуется схемой из пяти МЭ.

2. Так как $h = 4$, то формульный и графовый методы строят схемы из трех МЭ.

3. Так как БФУ монотонна по переменной x_3, то выполним мажоритарное разложение по этой переменной:

$$f_9 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_3;$$
$$\mathrm{MX}(0, 1, x_3, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из трех МЭ. Учет свойства $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ реализацию не упрощает.

Пример 4.20. Реализовать БФУ

$$f_{10}(x_1, x_2, x_3) = \left|0110\ 1010\right|^T = !x_1 !x_2 x_3 \vee (x_1 \vee x_2) !x_3.$$

1. Так как $h = 6$, то формульный и графовый методы строят схемы из пяти МЭ.

2. Так как БФУ немонотонна по всем переменным, то выполним в БФ замену $!x_3 = x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = !x_1 !x_2 x_3 \vee (x_1 \vee x_2) x_4 =$$
$$= \left|0011\ 0101\ 0101\ 0101\right|^T.$$

Проведем мажоритарное разложение по переменной x_4:

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\text{MX}(0,1,x_4,x_4,x_4,x_4,x_4,x_4;x_1,x_2,x_3) =$$
$$= \text{MX}(0,x_4,x_4,1;\Phi_1,\Phi_2).$$

Среди 64 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,1,1,1,1,1,1,1;x_1,x_2,x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0,1,0,0,0,0,0,0;x_1,x_2,x_3) = !x_1!x_2x_3.$$

Таким образом, после обратной замены $x_4 = !x_3$ заданная БФУ реализуется схемой из пяти МЭ. Учет свойства $\Phi_2 \leqslant \Phi_1$ реализацию не упрощает.

3. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 1$, $Q_0 = x_3$, $Q_1 = !x_3$:

$$f_{10}(x_1,x_2,x_3) = \text{MX}(Q_0,Q_1;\Phi).$$

При этом $f_{10} = x_3!\Phi \vee !x_3\Phi = \Phi \oplus x_3$. Для определения функции Φ запишем исходное уравнение в МФ и решим его:

$$\text{MX}(Q_0,Q_1,Q_1,Q_1;x_1,x_2) = \text{MX}(Q_0,Q_1;\Phi);$$
$$\Phi = \text{MX}(0,1,1,1;x_1,x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Таким образом, $f_{10} = (x_1 \vee x_2) \oplus x_3$ и реализуется схемой из четырех МЭ.

4. Используем разложение Рида по переменной $!x_1$: $f_{10}(x_1=0) = x_2 \oplus x_3$, $f_{10}(x_1=1) = !x_3$, $f_{10}(x_1=0) \oplus f_{10}(x_1=1) = !x_2$, $f_{10} = !x_3 \oplus !x_2!x_1$. Эта БФ реализуется схемой из четырех МЭ.

Пример 4.21. Реализовать БФУ

$$f_{11}(x_1,x_2,x_3) = \left|1100\ \ 0001\right|^T = !x_1!x_2 \vee x_1x_2x_3.$$

1. При использовании разложения Рида по переменной x_1: $f_{12} = x_1(!x_2 \vee x_3) \oplus !x_2$. Эта БФ реализуется схемой из пяти МЭ.

2. Так как $h = 5$, то формульный и графовый методы строят схемы из четырех МЭ.

3. Так как БФУ монотонна по переменной x_3, то выполним мажоритарное разложение по этой переменной:

$$f_{11} = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_3;$$
$$\text{MX}(1,0,0,x_3;x_1,x_2) = \text{MX}(0,x_3,x_3,1;\Phi_1,\Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1!x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !(x_1 \oplus x_2).$$

Независимая реализация этих функций приводит к подсхеме из четырех МЭ, но так как $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$, то функции $\Phi_1 = !x_1!x_2$, $\Phi_2 = \Phi_1 \vee \vee x_1 x_2$ реализуются подсхемой из трех МЭ. Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

Пример 4.22. Реализовать БФУ

$$f_{12}(x_3, x_2, x_1) = \left| 0111\ 0110 \right|^T = !x_1 x_2 \vee x_1(!x_2 \vee !x_3).$$

1. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = x_1 \oplus x_2$, $Q_1 = x_1 \vee x_2$, $\Phi = !x_3$:

$$f_{12} = \text{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Так как $Q_0 \leqslant Q_1$, то $f_{12} = Q_0 \vee Q_1\Phi$. Таким образом, БФУ в этом случае реализуется схемой из шести МЭ.

2. Разложение Рида по переменной x_3 $\left(f_{12} = (x_1 \vee x_2) \oplus x_1 x_2 x_3 \right)$ также строит схему из шести МЭ.

3. Булева формула $f_{12} = (x_1 \oplus x_2) \vee x_1!x_3$ реализуется схемой из пяти МЭ.

4. Так как БФУ $f_{12}(x_1, x_2, x_3) = \left|0011\ 1110\right|^T$ монотонна по переменной $!x_3$, то

$$f_{12}(x_1, x_2, x_3) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# !x_3;$$
$$\text{MX}(0, 1, 1, !x_3; x_1, x_2) = \text{MX}(0, !x_3, !x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Из двух решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Таким образом, БФУ реализуется схемой из пяти МЭ. Учет свойства $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ в данном случае усложняет реализацию.

5. Так как $h = 5$, то формульный и графовый методы строят схемы из четырех МЭ.

6. В [15] эта БФУ также реализована схемой из четырех МЭ:

$$f_{12} = (x_1 \vee x_2) \# (!x_2 \vee !x_3) \# x_1 x_2.$$

Пример 4.23. Реализовать БФУ

$$f_{13}(x_1, x_2, x_3) = \left|1110\ \ 0111\right|^T = !x_1!x_2 \vee x_2!x_3 \vee x_1 x_3 .$$

1. Так как БФУ «зеркальна» [24] по переменной $!x_1$, то $f_{13} = (!x_1 \oplus x_2) \vee (!x_1 \oplus x_3)$. Эта формула может быть реализована схемой из семи МЭ.

2. Так как БФУ немонотонна по всем переменным, то выполним в БФ замену $!x_3 = x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = !x_1!x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_4 =$$
$$= \left|1111\ \ 0101\ \ 0011\ \ 0111\right|^T .$$

Выполним мажоритарное разложение по переменной x_4:

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(1, 1, x_4, x_4, 0, 1, x_4, 1; x_1, x_2, x_3) = \mathrm{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди восьми решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = !x_1!x_2 \vee x_1 x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 x_3 .$$

Таким образом, после обратной замены $x_4 = !x_3$ заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ.

3. Так как $h = 6$, то формульный и графовый методы строят схемы из пяти МЭ.

4. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = !x_1 \vee !x_2$, $Q_1 = x_1 \vee x_2$, $\Phi = x_1$. При этом $f_{13} = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi) = Q_0!x_1 \vee Q_1 x_1$.

Следовательно, в этом случае также строится схема из пяти МЭ.

5. Используем преобразование Артюхова—Шалыто по переменной x_1. При этом $f_{13} = (!x_1 \# !x_2 \# !x_3) \oplus x_1$. Таким образом, построена неразделительная декомпозиция, которая реализуется схемой из четырех МЭ.

Пример 4.24. Реализовать БФУ

$$f_{14}(x_1, x_2, x_3) = \left|1000\ \ 0001\right|^T = !x_1!x_2!x_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

1. Так как БФУ «зеркальна» по переменной $!x_1$, то $f_{14} = (!x_1 \oplus x_2)(!x_1 \oplus x_3)$. Эта формула может быть реализована схемой из семи МЭ.

2. Так как БФУ немонотонна по всем переменным, то выполним в БФ замену $x_3 = x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = !x_1 !x_2 !x_3 \vee x_1 x_2 x_4 = \\ = \left|1100\ 0000\ 0000\ 0101\right|^T.$$

Проведем мажоритарное разложение по переменной x_4:

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 0, 0, x_4, x_4; x_1, x_2, x_3) = \mathrm{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_1 !x_2 !x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = !x_1 !x_2 !x_3 \vee x_1 x_2.$$

Так как $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$, то функции $\Phi_1 = !x_1 !x_2 !x_3$, $\Phi_2 = \Phi_1 \vee x_1 x_2$ реализуются подсхемой из четырех МЭ. Таким образом, после обратной замены $x_4 = x_3$ заданная БФУ реализуется схемой из пяти МЭ.

3. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 1$, $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_3$, $Q_2 = !x_3$, $Q_3 = 1$:

$$f_{14} = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2) = \Phi_1 !x_3 \vee \Phi_2 x_3.$$

Для определения функций Φ_1 и Φ_2 запишем исходное уравнение в МФ и решим его:

$$\mathrm{MX}(Q_2, Q_0, Q_0, Q_1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Таким образом, БФУ реализуется схемой из пяти МЭ.

4. Так как $h = 6$, то формульный и графовый методы также строят схемы из пяти МЭ.

5. Используем преобразование Артюхова—Шалыто по переменной x_1. При этом $f_{14} = (x_1 \# !x_2 \# !x_3) \oplus x_1$. Таким образом, построена неразделительная декомпозиция, которая реализуется схемой из четырех МЭ.

6. В [15] показано, что другая неразделительная декомпозиция

$$f_{14} = !x_1 !x_3 \# (x_1 \vee !x_2) \# x_2 x_3$$

также реализуется схемой из четырех МЭ.

Пример 4.25. Реализовать БФУ

$$f_{15}(x_1, x_2, x_3) = \left|1001\ 0111\right|^T = !x_1!x_2!x_3 \vee (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2.$$

1. Так как h = 8, то формульный и графовый методы также строят схемы из семи МЭ.

2. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = !(x_1 \oplus x_2)$, $Q_1 = x_1 \vee x_2$, $\Phi = x_1$:

$$f_{15} = \text{MX}(Q_0, Q_1; \Phi) = Q_0!\Phi \vee Q_1\Phi.$$

Таким образом, в этом случае также строится схема из семи МЭ.

3. Так как БФУ немонотонна по всем переменным, то выполним в БФ замену $x_3 = x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = !x_1!x_2!x_3 \vee (x_1 \vee x_2)x_4 \vee x_1x_2 =$$
$$= \left|1100\ 0101\ 0101\ 1111\right|^T.$$

Выполним мажоритарное разложение по переменной x_4:

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\text{MX}(1, 0, x_4, x_4, x_4, x_4, 1, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди 16 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = !x_1x_3 \vee x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee !x_2!x_3.$$

Таким образом, после обратной замены $x_4 = x_3$ заданная БФУ реализуется схемой из пяти МЭ.

4. Преобразуем заданную БФ $f_{15} = !x_1!x_2!x_3 \vee (x_1 \# x_2 \# x_3)$. Эта формула реализуется схемой из четырех МЭ.

Пример 4.26. Реализовать БФУ

$$f_{16}(x_1, x_2, x_3) = \left|0010\ 1001\right|^T = !x_1x_2!x_3 \vee x_1(!x_2!x_3 \vee x_2x_3).$$

1. Так как h = 8, то формульный и графовый методы также строят схемы из семи МЭ.

2. Схема из семи МЭ может быть построена и по БФ

$$f_{16} = !x_1x_2x_3 \vee x_1(!x_2 \oplus x_3).$$

3. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 1$, $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_3$, $Q_2 = !x_3$, $Q_3 = 1$:

$$f_{16} = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2) = \Phi_1 !x_3 \vee \Phi_2 x_3.$$

Для определения функций Φ_1 и Φ_2 запишем исходное уравнение в МФ и решим его:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_2, Q_2, Q_1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Таким образом, БФУ реализуется схемой из семи МЭ.

4. Так как БФУ немонотонна по всем переменным, то выполним в БФ замену $x_3 = x_4$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 !x_2 !x_3 \vee !x_1 x_2 !x_3 \vee x_1 x_2 x_4 =$$

$$= \left| 0000\ 1100\ 1100\ 0101 \right|^T.$$

Проведем мажоритарное разложение по переменной x_4:

$$f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(0, 0, 1, 0, 1, 0, x_4, x_4; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# !x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = (!x_1 x_2 \vee x_1 !x_2) !x_3.$$

Таким образом, после обратной замены $x_4 = x_3$ заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ. Учет свойства $\Phi_2 \leqslant \Phi_1$ в данном случае усложняет реализацию.

5. Разложение Рида по переменной x_1 строит БФ $f = x_2 !x_3 \oplus$ $\oplus\ (x_2 \vee !x_3) x_1$, которая реализуется схемой из шести МЭ.

6. Для проведения мажоритарной декомпозиции при $n - k = 0$ запишем уравнение

$$f_{16} = \Phi_1 \# \Phi_2 \# \Phi_3;$$
$$\mathrm{MX}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Это уравнение имеет 4^8 решений, среди которых имеется следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0,1,1,1,0,0,0,1; x_1, x_2, x_3) = !x_1 \# x_2 \# x_3;$$

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0,0,1,0,1,0,1,1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# !x_3;$$

$$\Phi_3 = \mathrm{MX}(0,0,1,0,1,1,0,0; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# !x_2 \# 0.$$

Это решение, которому соответствует схема из четырех МЭ, взято из [15], где эта БФУ реализована геометрическим методом [5].

Сформулируем выводы по материалу настоящего раздела.

1. Для формул f_2, f_3, f_4, f_5, бесповторных в базисе {&, ∨, !}, простейшие схемы строят, например, формульный и графовый методы.

2. Простейшие схемы для функций f_6, f_7 построены с помощью мультиплексорного разложения по переменной.

3. Функция f_8 имеет простейшую реализацию при применении мажоритарного разложения по одной переменной, проводимого после увеличения числа переменных в функции.

4. Формула f_9, повторная в базисе {&, ∨, !}, имеет простейшую реализацию при использовании мажоритарного разложения по одной переменной и формульного или графового метода.

5. Функция f_{10} имеет простейшую реализацию при применении мультиплексорной декомпозиции и разложения Рида.

6. Формула f_{11} реализуется простейшими схемами с помощью формульного или графового метода и на основе мультиплексорного разложения.

7. Формула f_{12}, повторная в базисе {&, ∨, !}, реализуется формульным или графовым методом простейшей схемой.

8. Функции f_{13}, f_{14} реализуются простейшими схемами на основе преобразования Артюхова—Шалыто.

9. Функция f_{15} реализуется простейшей схемой с помощью эвристической декомпозиции, формульного и графового методов.

10. В [5] утверждается, что произвольная БФУ трех переменных реализуется схемой, содержащей не более четырех МЭ. Из всех рассмотренных БФУ только функция f_{16} реализуется с помощью предлагаемых подходов схемой, содержащей более четырех МЭ.

4.1.10. Примеры реализации булевых функций четырех переменных

Пример 4.27. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ 0001\ 0111\ 1111\right|^T =$$
$$= x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4,$$

которая является порождающей функцией модуля, универсального в классе пороговых функций трех переменных.

Столбец значений этой БФУ содержит только разрешенные фрагменты длиной два, и поэтому

$$x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(0,0,0,x_4,x_4,1,1,1;x_1,x_2,x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(0,x_4,x_4,1;\Phi_1,\Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0,0,0,1,0,1,1,1;x_1,x_2,x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0,0,0,0,1,1,1,1;x_1,x_2,x_3) = x_1.$$

Следовательно, $\Phi = x_1 \# x_2 \# x_3$, $f = x_1 \# \Phi \# x_4$.

Таким образом, заданная БФУ реализуется на основе мультиплексорного разложения минимальной схемой из двух МЭ (рис. 4.16), в то время как формульный и графовый методы строят схемы из шести МЭ.

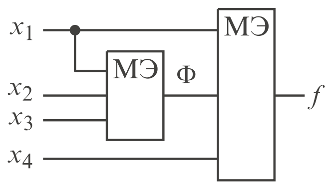

Рис. 4.16

Эта схема является основой для построения параллельного одноразрядного двоичного сумматора при его описании системой БФ:

$$P = x_1 \# x_2 \# x_3,\ S = !P(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3,$$

так как

$$P = x_1 \# x_2 \# x_3,\ \Phi = !P \# x_1 \# x_2,\ S = !P \# \Phi \# x_3.$$

Таким образом, такой сумматор реализуется схемой из трех МЭ, один из которых имеет прямой и инверсный выходы [20].

Пример 4.28. Реализовать БФУ [13]

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left| 1100\ 0100\ 1101\ 1100 \right|^T =$$
$$= x_1!x_3 \vee !x_3x_4 \vee !x_2!x_3 \vee x_1!x_2x_4 = (x_1 \vee !x_2 \vee x_4)!x_3 \vee x_1!x_2x_4.$$

1. Так как для последней БФ $h = 7$, то формульный и графовый методы строят схемы из шести МЭ.

2. Использование преобразований Кона—Линдемана для одних переменных строят схему из семи МЭ [13], а для других переменных — схему из четырех МЭ [15].

3. Так как заданная БФУ монотонна по переменной x_4, выполним мажоритарное разложение по этой переменной:

$$(x_1 \vee !x_2 \vee x_4)!x_3 \vee x_1!x_2x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(1, 0, x_4, 0, 1, x_4, 1, 0; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем два разнотипных:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee !x_2)!x_3; \\ \Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = x_1!x_2 \vee !x_3; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_3; \\ \Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# !x_2 \# !x_3. \end{cases}$$

Первое решение совпадает с разложением Акерса [3] по переменной x_4 и соответствует схеме из пяти МЭ [13], а второе — приводит к построению схемы из д в у х МЭ.

4. Весьма сложный метод Акерса [4], учитывающий не только монотонность заданной БФУ, но и ее самодвойственность, также строит схему из двух МЭ.

Пример 4.29. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0010\ 0010\ 0010\ 1011\right|^T =$$
$$= x_1x_2(x_3 \vee !x_4) \vee x_3!x_4.$$

1. Так как заданная БФУ монотонна по переменной $!x_4$, выполним мажоритарное разложение по этой переменной:

$$x_1x_2(x_3 \vee !x_4) \vee x_3!x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# !x_4;$$
$$\mathrm{MX}(0, !x_4, 0, !x_4, 0, !x_4, !x_4, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, !x_4, !x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди 16 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = (!x_1 \oplus x_2)x_3.$$

Так как функция Φ_2 реализуется подсхемой из четырех МЭ, то БФУ реализуется схемой из шести МЭ.

2. Так как для заданной булевой формулы $h = 6$, то формульный и графовый методы строят схемы из пяти МЭ.

3. Используем мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = x_3!x_4$, $Q_1 = x_3 \vee !x_4$:

$$x_1 x_2 (x_3 \vee !x_4) \vee x_3!x_4 = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_0, Q_0, Q_1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

Так как $Q_0 \leqslant Q_1$, то

$$f = Q_0 \vee Q_1 \Phi = \Phi \# x_3 \# !x_4,$$

и поэтому заданная БФУ реализуется схемой из двух МЭ.

Пример 4.30. Реализовать БФ [10]

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 !x_4 =$$
$$= x_1 (x_2 \vee x_3 x_4) \vee x_2 x_3 !x_4.$$

Так как заданная БФУ монотонна по переменным x_1, x_2, x_3, то построим булеву функцию $f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \left|0001\ 0011\ 0001\ 0101\right|^T$.

1. Так как для скобочной булевой формулы $h = 7$, то формульный и графовый методы строят схемы из шести МЭ.

2. Выполним мажоритарное разложение по переменной x_1:

$$x_1 (x_2 \vee x_3 x_4) \vee x_2 x_3 !x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_1;$$
$$\mathrm{MX}(0, x_1, 0, 1, 0, x_1, x_1, x_1; x_4, x_3, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_1, x_1, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди 16 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_4, x_3, x_2) = x_2 \# x_3 \# x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0; x_4, x_3, x_2) = x_2 !x_4.$$

Таким образом, БФУ реализуется схемой из трех МЭ.

3. В [10] схема из трех МЭ построена с помощью весьма трудоемкого метода решения 16 логических уравнений, соответствующих простой мажоритарной декомпозиции.

Пример 4.31. Реализовать БФУ [10]

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \left|\ 0101\ 0100\ 1100\ 0100\ \right|^T =$$
$$= x_1 (!x_2 \vee !x_3 !x_4) \vee !x_2 !x_3 x_4.$$

1. Так как для булевой формулы h = 7, то формульный и графовый методы строят схемы из шести МЭ.

2. Так как БФУ монотонна по переменной x_1, выполним мажоритарное разложение по этой переменной:

$$x_1(!x_2 \vee !x_3!x_4) \vee !x_2!x_3x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_1;$$
$$\mathrm{MX}(x_1, x_1, x_1, 0, 1, 0, x_1, 0; x_4, x_3, x_2) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_1, x_1, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди 16 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0; x_4, x_3, x_2) = !x_2 \# !x_3 \# !x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0; x_4, x_3, x_2) = !x_2x_4.$$

Таким образом, БФУ реализуется схемой из трех МЭ.

3. В [10] схема из трех МЭ построена с помощью весьма трудоемкого метода Акерса [4].

Пример 4.32. Реализовать БФ [18]

$$f = x_1x_2x_3 \vee !x_2x_3x_4 \vee x_1!x_2!x_3 \vee x_2!x_3x_4 =$$
$$= x_1(!x_2!x_3 \vee x_2x_3) \vee (!x_2x_3 \vee x_2!x_3)x_4.$$

Так как заданная БФУ монотонна по переменным x_1 и x_4, то построим БФУ

$$f(x_2, x_3, x_1, x_4) = \left|0011\ 0101\ 0101\ 0011\right|^T.$$

1. Так как для скобочной булевой формулы h = 10, то формульный и графовый методы строят схемы из девяти МЭ.

2. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = x_1$, $Q_1 = x_4$:

$$f(x_2, x_3, x_1, x_4) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi) = x_1!\Phi \vee x_4\Phi.$$

Для определения функции Φ запишем и решим уравнение в МФ:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_0; x_2, x_3) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_2, x_3) = x_2 \oplus x_3.$$

Таким образом, в этом случае строится схема из шести МЭ, один из которых должен иметь прямой и инверсный выходы.

3. В [18], используя весьма трудоемкий метод решения 16 логических уравнений, построена простая мажоритарная декомпозиция, реализуемая схемой из четырех МЭ:

$$f = (x_1 \# !x_2 \# x_3) \# (x_2 \# x_3 \# x_4) \# (x_1 \# !x_3 \# x_4).$$

4. Выполним мажоритарное разложение по переменной x_4:

$$x_1(!x_2!x_3 \vee x_2x_3) \vee (!x_2x_3 \vee x_2!x_3)x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\text{MX}(0, 1, x_4, x_4, x_4, x_4, 0, 1; x_2, x_3, x_1) =$$
$$= \text{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди 16 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1; x_2, x_3, x_1) = !x_1 \# x_2 \# x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1; x_2, x_3, x_1) = x_1 \# !x_2 \# x_3.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из трех МЭ.

Пример 4.33. Реализовать БФ [15]

$$f = x_2x_3 \vee x_3!x_4 \vee x_1x_2!x_4 \vee x_1!x_3x_4.$$

Из рассмотрения этой тупиковой ДНФ кажется, что БФУ немонотонна по переменной x_4 или ее инверсии, однако если построить ТИ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0010\ \ 0011\ \ 0011\ \ 1111\right|^T,$$

то из ее рассмотрения следует, что БФУ монотонна по переменной $!x_4$. При этом $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee (x_2 \vee !x_4)x_3$.

1. Так как для скобочной булевой формулы h = 6, то формульный и графовый методы строят схемы из пяти МЭ.

2. Выполним мажоритарное разложение по переменной $!x_4$:

$$x_1(x_2 \vee x_3) \vee (x_2 \vee !x_4)x_3 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# !x_4;$$
$$\text{MX}(0, !x_4, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(0, !x_4, !x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди двух решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_3.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

В данном случае $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$, и поэтому $\Phi_2 = \Phi_1 \vee !x_1!x_2x_3$. Однако такая реализация усложняет схему.

3. Схема из четырех МЭ была построена также и в [15] с использованием весьма специфической универсальной декомпозиции [12]:

$$f(x_1, x_2, Y) = f_1(x_1, Y) \# f_2(x_2, Y) \# f_3(x_1 \oplus x_2, Y) =$$
$$= (x_1 \vee x_3) \# (x_2 \# x_3 \# !x_4) \# !x_3 x_4.$$

Пример 4.34. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0001\ 0000\ 0001\ 1111\right|^T =$$
$$= (x_1 \vee !x_2) x_3 x_4 \vee x_1 x_2.$$

1. Так как $h = 6$, то формульный и графовый методы строят схемы из пяти МЭ.

2. Выполним мажоритарное разложение по переменной x_4:

$$(x_1 \vee !x_2) x_3 x_4 \vee x_1 x_2 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4;$$
$$\text{MX}(0, x_4, 0, 0, 0, x_4, 1, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee !x_2 x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2.$$

В данном случае $\Phi_2 \leqslant \Phi_1$, и поэтому $\Phi_1 = \Phi_2 \vee !x_2 x_3$.

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

3. Выполним мажоритарное разложение по функции $Q = x_3 x_4$:

$$(x_1 \vee !x_2) x_3 x_4 \vee x_1 x_2 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# Q;$$
$$\text{MX}(Q, 0, Q, 1; x_1, x_2) = \text{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee !x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ. Учет того, что в данном случае $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ и $\Phi_2 = \Phi_1 \vee !x_2$, сложность схемы не изменяет.

Пример 4.35. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ 0110\ 0110\ 1111\right|^T =$$
$$= x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2)(!x_3 x_4 \vee x_3 !x_4).$$

1. Так как $h = 8$, то формульный и графовый методы строят схемы из семи МЭ.

2. Выполним мажоритарное разложение по функции $Q = x_3 \oplus x_4$:

$$x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2)(!x_3 x_4 \vee x_3 !x_4) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# Q;$$
$$\text{MX}(0, Q, Q, 1; x_1, x_2) = \text{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = x_1;\ \Phi_2 = x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

3. Так как БФ монотонна по переменным x_1 и x_2, то построим

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \left|0001\ 0111\ 0111\ 0001\right|^T.$$

Выполним мажоритарное разложение этой функции по переменным x_1 и x_2:

$$x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2)(!x_3 x_4 \vee x_3 !x_4) = \Phi \# x_1 \# x_2;$$
$$\text{MX}(x_1 x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2,\ x_1 x_2; x_4, x_3) =$$
$$= \text{MX}(x_1 x_2, x_1 \vee x_2; \Phi);$$
$$\Phi = \text{MX}(0, 1, 1, 0; x_4, x_3) = x_3 \oplus x_4.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

4. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = x_1 x_2$, $Q_1 = x_1 \vee x_2$:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \text{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Так как $Q_0 \leqslant Q_1$, то $f = Q_0 \vee Q_1 \Phi = \Phi \# x_1 \# x_2$.

Для определения функции Φ запишем и решим уравнение в МФ:

$$\text{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_0; x_4, x_3) = \text{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \text{MX}(0, 1, 1, 0; x_4, x_3) = x_3 \oplus x_4.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ.

Пример 4.36. Реализовать БФУ [9]

$$f = !x_1 !x_2 !x_4 \vee !x_3 x_4 \vee x_3 !x_4 = (!x_1 !x_2 \vee x_3)!x_4 \vee !x_3 x_4.$$

Построим таблицу истинности для БФУ

$$f(x_2, x_1, x_4, x_3) = \left| 1110\ 0110\ 0110\ 0110 \right|^T.$$

1. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = x_3 \oplus x_4$, $Q_1 = !x_3 \vee !x_4$:

$$(!x_1 !x_2 \vee x_3)!x_4 \vee !x_3 x_4 = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Так как $Q_0 \leqslant Q_1$, то $f = Q_0 \vee Q_1 \Phi = !x_3(x_4 \vee \Phi) \vee !x_4(x_3 \vee \Phi)$. Для определения функции Φ запишем и решим уравнение в МФ:

$$\mathrm{MX}(Q_1, Q_0, Q_0, Q_0; x_2, x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0; x_2, x_1) = !x_1 !x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ.

2. Так как БФ монотонна по переменной $!x_2$, то построим

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \left| 1000\ 1111\ 1111\ 0000 \right|^T.$$

Выполним мажоритарное разложение этой функции по переменной $!x_2$:

$$(!x_1 !x_2 \vee x_3)!x_4 \vee !x_3 x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# !x_2;$$
$$\mathrm{MX}(!x_2, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0; x_3, x_4, x_1) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, !x_2, !x_2, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0; x_3, x_4, x_1) = x_3 \oplus x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0; x_3, x_4, x_1).$$

Так как $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$, то $\Phi_2 = \Phi_1 \vee !x_1 !x_3 !x_4$. Таким образом, функции Φ_1 и Φ_2 совместно реализуются подсхемой из шести МЭ.

Определим более простую их реализацию:

$$\Phi_2(x_3, x_4, x_1) = \Phi_{21} \# \Phi_{22} \# !x_1;$$
$$\mathrm{MX}(!x_1, 1, 1, 0; x_3, x_4) = \mathrm{MX}(0, !x_1, !x_1, 1; \Phi_{21}, \Phi_{22});$$
$$\Phi_{21} = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_3, x_4) = x_3 \oplus x_4;$$
$$\Phi_{22} = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; x_3, x_4) = !x_3 \vee !x_4.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ.

3. Выполним мажоритарное разложение по функции $Q = !x_1 !x_2$:

$$(!x_1 !x_2 \vee x_3)!x_4 \vee !x_3 x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# Q;$$
$$\mathrm{MX}(Q, 1, 1, 0; x_3, x_4) = \mathrm{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_3, x_4) = x_3 \oplus x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; x_3, x_4) = !x_3 \vee !x_4.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ. Учет свойства $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ в данном случае усложняет реализацию.

4. Так как $h = 6$, то формульный и графовый методы строят схемы из пяти МЭ.

5. В [9] эта БФУ реализуется четырьмя разными методами — схемами из 11, 9, 7 и 5 МЭ.

Пример 4.37. Реализовать БФУ [13]

$$f = x_1!x_3x_4 \vee x_2!x_3x_4 \vee !x_2!x_3!x_4 \vee !x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3!x_4 =$$
$$= \Big((x_1 \vee x_2)!x_3 \vee !x_2x_3 \Big) x_4 \vee (x_1x_2x_3 \vee !x_2!x_3)!x_4.$$

Так как БФУ монотонна по переменной x_1, то построим ТИ для БФУ в виде:

$$f(x_2, x_4, x_3, x_1) = \left| 1101\ 0011\ 0011\ 0100 \right|^T.$$

1. Так как $h = 12$, то формульный и графовый методы строят схемы из 11 МЭ.

2. При использовании разложения фиксацией переменных константами могут быть построены схемы, содержащие в зависимости от порядка разложения семь и девять МЭ [13, 15].

3. Применение одного из преобразований Кона—Линдемана строит схему из семи МЭ [13].

4. Выполним мажоритарное разложение этой функции по переменной x_1:

$$\Big((x_1 \vee x_2)!x_3 \vee !x_2x_3 \Big) x_4 \vee (x_1x_2x_3 \vee !x_2!x_3)!x_4 =$$
$$= \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_1;$$
$$\text{MX}(1, x_1, 0, 1, 0, 1, x_1, 0; x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \text{MX}(0, x_1, x_1, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет четыре решения, из которых два разнотипны:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \text{MX}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0; x_2, x_3, x_4) = \\ \quad = !x_2(!x_3 \oplus x_4) \vee x_2!x_3x_4; \\ \Phi_2 = \text{MX}(1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0; x_2, x_3, x_4) = \\ \quad = !x_2 \# !x_3 \# x_4 \vee x_2x_3!x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \text{MX}(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0; x_2, x_3, x_4) = !x_2 \# !x_3 \# x_4; \\ \Phi_2 = \text{MX}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0; x_2, x_3, x_4) = x_2 \oplus x_3 \oplus !x_4. \end{cases}$$

Первое решение соответствует разложению Акерса и является весьма сложным. Второе решение существенно проще и обеспечивает реализацию БФУ схемой из пяти МЭ.

5. Весьма трудоемкий метод Акерса [13] также строит схему из пяти МЭ.

Пример 4.38. Реализовать БФУ [18]

$$f = x_1 x_2 x_3 \vee !x_1 !x_2 !x_3 \vee !x_1 !x_3 x_4 \vee !x_2 !x_3 x_4 =$$
$$= x_1 x_2 x_3 \vee !x_3 \big(!x_1 (!x_2 \vee x_4) \vee !x_2 x_4 \big).$$

1. Эта БФУ монотонна по переменной x_4. Многократное использование мажоритарного разложения по отдельным переменным, начиная с переменной x_4, в этом случае крайне неэффективно, так как получается схема из 11 МЭ.

2. Так как h = 9, то формульный и графовый методы строят схемы из восьми МЭ.

3. Если мажоритарное разложение применить однократно, то может быть построена схема из семи МЭ, так как $f_1 = x_1 x_2 x_3$, $\Phi_1 = !x_1 !x_3 \vee f_1$, $\Phi_2 = !x_2 !x_3 \vee f_1$, $f = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4$.

4. Используя эвристическую декомпозицию $f_1 = !x_1 \# !x_2 \# x_4$, $f = x_1 x_2 x_3 \vee !x_3 f_1$, может быть построена схема из пяти МЭ.

5. Эта БФУ в [18] после выбора порядка исключения переменных реализуется с помощью разложения Шеннона схемой из пяти МЭ.

Пример 4.39. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0110\ 0000\ 0110\ 1111 \right|^T =$$
$$= x_1 x_2 \vee !x_2 (!x_3 x_4 \vee x_3 !x_4).$$

1. Так как h = 7, то формульный и графовый методы строят схемы из шести МЭ.

2. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, полагая $Q_0 = Q_1 = 0$, $Q_2 = x_3 \oplus x_4$, $Q_3 = 1$:

$$f = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2) = \Phi_1 (Q_2 \vee \Phi_2).$$

Для определения функций Φ_1 и Φ_2 запишем и решим уравнение в МФ:

$$\mathrm{MX}(Q_2, Q_0\ ?\ Q_1, Q_2, Q_3; x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Из двух решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee !x_2;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

Полученная декомпозиция реализуется схемой из шести МЭ.

3. Из рассмотрения БФ следует, что она монотонна по переменной x_1:

$$f(x_2, x_3, x_4, x_1) = \left|0011\ 1100\ 0101\ 0101\right|^T.$$

Выполним мажоритарное разложение функции по этой переменной:

$$x_1 x_2 \vee !x_2(!x_3 x_4 \vee x_3 !x_4) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_1;$$
$$\text{MX}(0, 1, 1, 0, x_1, x_1, x_1, x_1; x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \text{MX}(0, x_1, x_1, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет 16 решений, среди которых имеется следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0; x_2, x_3, x_4) = x_3 \oplus x_4;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_2, x_3, x_4) = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4.$$

Так как эта пара функций реализуется подсхемой из шести МЭ, то выберем другое решение:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1; x_2, x_3, x_4);$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0; x_2, x_3, x_4) = !x_2(x_3 \oplus x_4).$$

Ввиду того что $\Phi_2 \leqslant \Phi_1$ и $\Phi_1 = \Phi_2 \vee x_2$, то подсхема в этом случае состоит из пяти МЭ, а БФУ в целом реализуется схемой из шести МЭ.

4. Выполним мажоритарное разложение по функции $Q = x_3 \oplus x_4$:

$$x_1 x_2 \vee !x_2(!x_3 x_4 \vee x_3 !x_4) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# Q;$$
$$\text{MX}(Q, 0, Q, 1; x_1, x_2) = \text{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee !x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ. Учет свойства $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ в данном случае схему не упрощает.

Сформулируем выводы по материалу настоящего раздела.

1. В примерах *4.27, 4.28, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.37* мультиплексорное разложение по отдельным переменным строит простейшие схемы.

2. В примере *4.34* мультиплексорное разложение по переменной или по подфункции строит простейшую схему.

3. В примере *4.29* мультиплексорная декомпозиция строит простейшую схему.

4. В примерах *4.35, 4.39* все три перечисленных выше подхода строят схемы одинаковой сложности.

5. В примере *4.36* для БФ, повторной в базисе $\{\&, \vee, !\}$, простейшие схемы строят формульный и графовый методы.

6. В примере *4.38* простейшие схемы строят эвристическая декомпозиция, формульный и графовый методы.

4.1.11. Примеры реализации булевых функций пяти переменных

Пример 4.40. Реализовать БФУ [10]

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= \left|0001\ 0001\ 0001\ 0111\ 0001\ 0111\ 0111\ 0111\right|^T.$$

1. Выполним разложение БФУ одновременно по двум переменным x_4 и x_5:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Phi_1 \# x_4 \# x_5;$$
$$\text{MX}(x_4x_5, x_4x_5, x_4x_5, x_4 \vee x_5, x_4x_5, x_4 \vee x_5, x_4 \vee x_5, x_4 \vee$$
$$\vee x_5; x_1, x_2, x_3) = \text{MX}(x_4x_5, x_4 \vee x_5; \Phi);$$
$$\Phi = \text{MX}(0,0,0,1,0,1,1,1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из двух МЭ.

2. В [10] эта схема построена с помощью весьма трудоемкого метода Акерса [4].

Пример 4.41. Реализовать БФУ [15]

$$f(x_2, x_1, x_5, x_4, x_3) =$$
$$= \left|1100\ 0000\ 0010\ 1011\ 0010\ 1011\ 0010\ 1011\right|^T =$$
$$= (x_1 \vee x_2)\Big((!x_3 \vee x_4)x_5 \vee !x_3x_4\Big) \vee !x_1!x_2!x_4!x_5.$$

1. Эта БФУ монотонна по переменной $!x_3$. Проведение многократного разложения, начиная с этой переменной, крайне неэффективно, так как при этом строится схема из 11 МЭ.

2. Так как $h = 11$, то формульный и графовый методы строят схемы из десяти МЭ.

3. Схема из семи МЭ строится по БФ

$$f = (x_1 \vee x_2)(!x_3 \# !x_4 \# x_5) \vee !x_1!x_2!x_3!x_5.$$

4. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 3$, $Q_0 = !x_4!x_5$, $Q_1 = !x_3 \# x_4 \# x_5$:

$$f = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi) = Q_0!\Phi \vee Q_1\Phi.$$

Для определения функции Ф запишем и решим уравнение в МФ:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_1; x_2, x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_2, x_1) = x_1 \vee x_2.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ, из которых один должен иметь прямой и инверсный выходы.

5. В [15] эта схема была получена при использовании функциональной декомпозиции.

Пример 4.42. Реализовать БФ [15]

$$f = (!x_1 \vee !x_3)(x_2 \vee !x_4)x_5 \vee x_2!x_4.$$

Построим таблицу истинности по БФ

$$f(x_2, x_4, x_5, x_1, x_3) =$$
$$= \left| 0000\ 1110\ 0000\ 0000\ 1111\ 1111\ 0000\ 1110 \right|^T.$$

1. Так как $h = 7$, то формульный и графовый методы строят схемы из шести МЭ.

2. Выполним мажоритарное разложение по функции $Q = !x_1 \vee !x_3$:

$$(!x_1 \vee !x_3)(x_2 \vee !x_4)x_5 \vee x_2!x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# Q;$$
$$\mathrm{MX}(0, Q, 0, 0, 1, 1, 0, Q; x_2, x_4, x_5) = \mathrm{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет четыре решения, среди которых выберем следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0; x_2, x_4, x_5) = x_2!x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1; x_2, x_4, x_5) = x_2 \# !x_4 \# x_5.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ. Учет свойства $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ в данном случае усложняет реализацию.

3. Выполним мажоритарное разложение этой функции по переменной $!x_3$:

$$(!x_1 \vee !x_3)(x_2 \vee !x_4)x_5 \vee x_2!x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# !x_3;$$
$$\mathrm{MX}(0, 0, 1, !x_3, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, !x_3; x_2, x_4, x_5, x_1) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, !x_3, !x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет четыре решения, среди которых выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,0,1,0,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,1,0; x_2, x_4, x_5, x_1);$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,1,1; x_2, x_4, x_5, x_1) =$$
$$= x_2 \# !x_4 \# x_5.$$

Для функции Φ_1 проведем мультиплексорное разложение по функции $Q = !x_1 x_5$:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \# \Phi_{12} \# Q;$$
$$\text{MX}(!x_1 x_5, 0, 1, !x_1 x_5; x_2, x_4) =$$
$$= \text{MX}(0, !x_1 x_5, !x_1 x_5, 1; \Phi_{11}, \Phi_{12}).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_{11} = \text{MX}(0,0,1,1; x_2, x_4) = x_2;$$
$$\Phi_{12} = \text{MX}(1,0,1,0; x_2, x_4) = !x_4.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из четырех МЭ. Учет свойства $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$ в данном случае усложняет реализацию.

4. В [16] схема из четырех МЭ построена за счет весьма сложного решения системы логических уравнений, соответствующей простой мажоритарной декомпозиции.

Пример 4.43. Реализовать БФУ [15]

$$f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 x_5 \vee x_2 x_3 x_4 =$$
$$= x_1 (x_2 \vee x_3 \vee x_4 x_5) \vee x_2 x_3 x_4.$$

Построим таблицу истинности по БФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= |0000\ 0000\ 0000\ 0011\ 0001\ 1111\ 1111\ 1111|^T.$$

1. Так как $h = 8$, то формульный и графовый методы строят схемы из семи МЭ.

2. Выполним многократно мажоритарное разложение по отдельным переменным:

$$x_1 (x_2 \vee x_3 \vee x_4 x_5) \vee x_2 x_3 x_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_5;$$
$$\text{MX}(0,0,0,0,0,0,0,1,0,x_5,1,1,1,1,1,1; x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \text{MX}(0, x_5, x_5, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1,1,1,1,1;x_1,x_2,x_3,x_4);$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1;x_1,x_2,x_3,x_4).$$

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \# \Phi_{12} \# x_4;$$
$$\text{MX}(0,0,0,x_4,0,1,1,1;x_1,x_2,x_3) =$$
$$= \text{MX}(0,x_4,x_4,1;\Phi_{11},\Phi_{12});$$
$$\Phi_{11} = \text{MX}(0,0,0,0,0,1,1,1;x_1,x_2,x_3);$$
$$\Phi_{12} = \text{MX}(0,0,0,1,0,1,1,1;x_1,x_2,x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3.$$

$$\Phi_{11} = \Phi_{111} \# \Phi_{112} \# x_3;$$
$$\text{MX}(0,0,x_3,1;x_1,x_2) = \text{MX}(0,x_3,x_3,1;\Phi_{111},\Phi_{112});$$
$$\Phi_{111} = \text{MX}(0,0,0,1;x_1,x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_{112} = \text{MX}(0,0,1,1;x_1,x_2) = x_1.$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} \# \Phi_{22} \# x_4;$$
$$\text{MX}(0,0,0,x_4,x_4,1,1,1;x_1,x_2,x_3) =$$
$$= \text{MX}(0,x_4,x_4,1;\Phi_{21},\Phi_{22});$$
$$\Phi_{21} = \text{MX}(0,0,0,0,1,1,1,1;x_1,x_2,x_3) = x_1;$$
$$\Phi_{22} = \text{MX}(0,0,0,1,0,1,1,1;x_1,x_2,x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из шести МЭ. Учет свойств $\Phi_1 \leqslant \Phi_2$, $\Phi_{11} \leqslant \Phi_{12}$, $\Phi_{111} \leqslant \Phi_{112}$ в данном случае усложняет реализацию.

3. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_4 x_5$, $Q_2 = x_4$, $Q_3 = 1$:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \text{MX}(Q_0,Q_1,Q_2,Q_3;\Phi_1,\Phi_2).$$

При этом $f = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_4) \vee \Phi_2 x_4 x_5$, для которой справедливо соотношение

$$f(\Phi_1,\Phi_2,x_4,x_5) = \left|0000\ 0001\ 0011\ 1111\right|^T.$$

Выполним мажоритарное разложение этой БФУ по переменной x_5:

$$f(\Phi_1,\Phi_2,x_4,x_5) = \Phi_3 \# \Phi_4 \# x_5;$$
$$\text{MX}(0,0,0,x_5,0,1,1,1;\Phi_1,\Phi_2,x_4) =$$
$$= \text{MX}(0,x_5,x_5,1;\Phi_3,\Phi_4);$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0,0,0,0,0,1,1,1;\Phi_1,\Phi_2,x_4) = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_4);$$
$$\Phi_4 = \text{MX}(0,0,0,1,0,1,1,1;\Phi_1,\Phi_2,x_4) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4.$$

Таким образом, образ декомпозиции реализуется схемой из четырех МЭ. Для определения функций Φ_1 и Φ_2 запишем исходное уравнение в МФ и решим его:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MX}(Q_0, Q_0, Q_0, Q_2, Q_1, Q_3, Q_3, Q_3; x_1, x_2, x_3) = \\
&\qquad = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2); \\
&\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \mathbin{+\!\!+} x_2 \mathbin{+\!\!+} x_3; \\
&\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1.
\end{aligned}$$

Следовательно, суперпозиция $\Phi_1 = x_1 \mathbin{+\!\!+} x_2 \mathbin{+\!\!+} x_3$, $\Phi_2 = x_1$, $\Phi_3 = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_4)$, $\Phi_4 = \Phi_1 \mathbin{+\!\!+} \Phi_2 \mathbin{+\!\!+} x_4$, $f = \Phi_3 \mathbin{+\!\!+} \Phi_4 \mathbin{+\!\!+} x_5$ реализуется схемой из пяти МЭ. Верификация этой суперпозиции показывает, что найденное решение далеко от тривиального.

4. Если использовать весьма специфический метод, учитывающий, что заданная БФУ является пороговой, то она может быть реализована схемой из четырех МЭ [15].

Пример 4.44. Реализовать БФУ [14]

$$\begin{aligned}
&f(x_3, x_2, x_1, x_5, x_4) = \\
&= \left| 1101\ 0100\ 1111\ 1110\ 1000\ 0000\ 1101\ 0100 \right|^T = \\
&= \big((!x_1 \vee !x_5)x_4 \vee x_2(!x_4 \vee !x_5)\big)!x_3 \vee (!x_1 \vee !x_5)x_2x_4 \vee !x_1!x_4!x_5.
\end{aligned}$$

1. Так как $h = 14$, то формульный и графовый методы строят схемы из 13 МЭ.

2. Для суперпозиции $f_1 = !x_1 \vee !x_5$; $f = \big(f_1x_4 \vee x_2(!x_4 \vee !x_5)\big)!x_3 \vee f_1x_2x_4 \vee !x_1!x_4!x_5$ формульный и графовый методы строят схемы из 12 МЭ.

3. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 3$, $Q_0 = Q_1 = !x_1!x_4!x_5$, $Q_2 = !x_1 \mathbin{+\!\!+} x_4 \mathbin{+\!\!+} x_5$, $Q_3 = !x_1 \vee !x_4 \vee !x_5$:

$$\begin{aligned}
&f = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2) = Q_0 \vee \Phi_1(Q_2 \vee Q_3\Phi_2); \\
&\mathrm{MX}(Q_2, Q_3, Q_0\ ?\ Q_1, Q_2; x_3, x_2) = \\
&\quad = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2); \\
&\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 0, 1; x_3, x_2) = x_2 \vee !x_3; \\
&\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_3, x_2) = x_2!x_3.
\end{aligned}$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из 2 + 1 + + 2 + 4 + 1 + 1 = 11 МЭ. Учет свойства $\Phi_2 \leqslant \Phi_1$ в данном случае усложняет реализацию.

4. В [14] приведена схема из девяти МЭ, реализующая заданную БФУ «методом последовательного исключения переменных с использованием ряда способов минимизации».

5. Из рассмотрения БФ следует, что она монотонна по переменным $!x_1, x_2, !x_3, !x_5$. Поэтому перестроим ТИ:

$$f(x_4, x_1, x_3, x_5, x_2) =$$
$$= \left| 1101\ 1100\ 0101\ 0000\ 1111\ 0101\ 1100\ 0100 \right|^T.$$

Выполним мажоритарное разложение по переменной x_2:

$$f(x_4, x_1, x_3, x_5, x_2) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_2;$$
$$\mathrm{MX}(1, x_2, 1, 0, x_2, x_2, 0, 0, 1, 1, x_2, x_2, 1, 0, x_2, 0;$$
$$x_4, x_1, x_3, x_5) = \mathrm{MX}(0, x_2, x_2, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет 64 решения:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, ?, 1, 0, ?, ?, 0, 0, 1, 1, ?, ?, 1, 0, ?, 0; x_4, x_1, x_3, x_5);$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, ?, 1, 0, ?, ?, 0, 0, 1, 1, ?, ?, 1, 0, ?, 0; x_4, x_1, x_3, x_5).$$

С целью получения мажорант для функций Φ_1 и Φ_2 для придания направленности при выборе требуемого решения составим карту Карно для функции Φ_1, которую удается доопределить следующим образом:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0; x_4, x_1, x_3, x_5) =$$
$$= !x_1 \# !x_3 \# !x_5.$$

При этом функция Φ_2 доопределяется автоматически:

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0; x_4, x_1, x_3, x_5).$$

Так как $\Phi_2 = !x_1 !x_4 !x_5 \vee x_1 !x_3 !x_4 x_5 \vee x_1 x_4 !x_5 \vee !x_1 !x_3 x_4 \vee$ $\vee !x_1 x_4 x_5$, то она монотонна по переменной $!x_3$, и поэтому

$$\Phi_2(x_1, x_4, x_5, x_3) = \left| 1100\ 1011\ 0010\ 1100 \right|^T.$$

Выполним разложение этой БФУ по последней переменной:

$$\Phi_2 = \Phi_{21} \# \Phi_{22} \# !x_3;$$
$$\mathrm{MX}(1, 0, !x_3, 1, 0, !x_3, 1, 0; x_1, x_4, x_5) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, !x_3, !x_3, 1; \Phi_{21}, \Phi_{22}).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_{21} = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0; x_1, x_4, x_5) = !x_1 \# x_4 \# !x_5;$$
$$\Phi_{22} = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0; x_1, x_4, x_5) = !x_1 \oplus x_4 \oplus x_5.$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из семи МЭ.

6. В [14] заданная БФУ реализуется схемой из т р е х МЭ:

$$f = (!x_2 \# !x_3 \# !x_4) \# (!x_1 \# x_4 \# !x_5) \# x_2,$$

построенной за счет весьма трудоемкого решения системы логических уравнений, соответствующих простой мажоритарной декомпозиции

$$f = \Phi_1(x_2, x_3, x_4, x_5) \# \Phi_2(x_1, x_3, x_4, x_5) \# \\ \# \Phi_3(x_1, x_2, x_4, x_5),$$

которая является неразделительной.

Пример 4.45. Реализовать БФУ [11]

$$f(x_2, x_1, x_5, x_4, x_3) = \\ = \left|1111\ 0000\ 1100\ 1100\ 0101\ 1010\ 0010\ 0111\right|^T = !x_1(!x_2 \vee \\ \vee x_3)!x_5 \vee \Big((!x_1 \vee x_4)!x_3 \vee x_1 x_3 \Big) x_2 x_5 \vee x_1(!x_2!x_4 \vee x_2!x_3 x_4).$$

1. Из рассмотрения БФ следует, что она немонотонна по всем переменным, и поэтому без увеличения числа переменных с целью повышения монотонности при $n - k > 0$ она не может быть мажоритарно разложена. Так как БФУ зависит от сравнительно большого числа переменных, то их увеличение не проводилось.

2. Так как $h = 17$, то формульный и графовый методы строят схемы из 16 МЭ.

3. Выполним мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 3$, $Q_0 = !x_5$, $Q_1 = !x_4$, $Q_2 = x_3 \oplus x_5$, $Q_3 = !x_3 x_4 \vee x_3 x_5$:

$$f(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_2, x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2); \\ \Phi_1 = x_2;\ \Phi_2 = x_1.$$

Так как для функций Q_i условия покрытия не выполняются, то заданная БФУ реализуется схемой из 3 + 3 + 9 = 15 МЭ.

4. Эта БФУ реализуется в [11] схемами из 31, 19, 13 и 11 МЭ, построенными четырьмя различными методами.

Сформулируем выводы по материалу настоящего раздела.

1. В примере *4.40* мультиплексорное разложение по двум переменным строит простейшую схему.

2. В примере *4.41* мультиплексорная декомпозиция строит простейшую схему.

3. В примере *4.42* мультиплексорное разложение по одной переменной или мультиплексорное разложение по подфункции строит простейшие схемы.

4. В примере *4.43* мультиплексорная декомпозиция строит схему, содержащую на один МЭ больше, чем известная схема.

5. В примере *4.44* мультиплексорное разложение строит схему из семи МЭ, в то время как известна схема из трех МЭ.

6. В примере *4.45* мультиплексорная декомпозиция строит схему из 15 МЭ, в то время как известна схема из 11 МЭ.

4.2. Реализация булевых функций схемами из пятивходовых мажоритарных элементов

4.2.1. Основные соотношения

Пятивходовой МЭ описывается БФУ вида

$$F(a, b, c, d, e) = \left|0000\ 0001\ 0001\ 0111\ 0001\ 0111\ 0111\ 1111\right|^T.$$

Эта БФУ является симметрической

$$F = S_{3,4,5}(a, b, c, d, e).$$

Являясь пороговой, она может быть записана в виде:

$$F = \mathrm{sign}\,(a + b + c + d + e - 3).$$

Так как эта БФУ является самодвойственной, то она может быть записана в виде [24]:

$$f_1 = a \oplus b,\ f_2 = a \oplus c,\ f_3 = a \oplus d,\ f_4 = a \oplus e,$$
$$F_1 = f_1(f_2 \# f_3 \# f_4) \vee f_2 f_3 f_4,\ F = F_1 \oplus a$$

или

$$f_1 = !a \oplus b,\ f_2 = !a \oplus c,\ f_3 = !a \oplus d,\ f_4 = !a \oplus e,$$
$$F_1 = (f_1 \vee f_2)(f_3 \vee f_4) \vee f_3 f_4,\ F = F_1 \oplus !a.$$

Используя переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, запишем функцию F в виде:

$$F = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_2 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_1 x_4 x_5 \vee$$
$$\vee x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_2 x_4 x_5 \vee x_3 x_4 x_5 = x_1 \left(x_2(x_3 \vee x_4 \vee x_5) \vee\right.$$
$$\left.\vee (x_3 \# x_4 \# x_5)\right) \vee x_2(x_3 \# x_4 \# x_5) \vee x_3 x_4 x_5.$$

Применяя арифметический полином с маскированием [27], эту БФУ можно записать в виде:

$$F = r_3^3 \,\mathrm{bin}\left(1 + \sum_{i=1}^{5} x_i\right).$$

В дальнейшем для обозначения этой БФУ будем использовать обозначение

$$F = \mathrm{Maj}\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).$$

Рассмотрим другие представления этой БФУ.

1. Используем мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$, $Q_0 = 0, Q_1 = x_4 x_5$, $Q_2 = x_4 \vee x_5$, $Q_3 = 1$. Так как $Q_0 \leqslant Q_1 \leqslant Q_2 \leqslant Q_3$, то

$$F = Q_0 \vee Q_1 \Phi_2 \vee Q_2 \Phi_1 \vee Q_3 \Phi_1 \Phi_2 =$$
$$= \Phi_1 (\Phi_2 \vee x_4 \vee x_5) \vee \Phi_2 x_4 x_5;$$
$$\mathrm{MX}\,(Q_0, Q_1, Q_1, Q_2\; Q_1, Q_2, Q_2, Q_3; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}\,(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}\,(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}\,(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3.$$

Так как функции Φ_1 и Φ_2 описывают параллельный одноразрядный двоичный сумматор (СУМ), а БФ для F совпадает с описанием 3-универсального логического модуля (УЛМ3), то рассматриваемый элемент может быть реализован схемой из двух блоков (рис. 4.17).

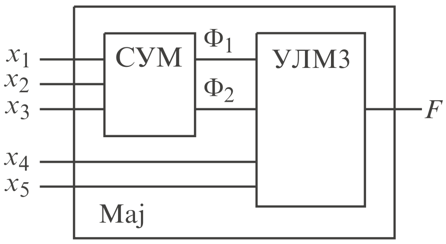

Рис. 4.17

Запишем БФ для функции Φ_2 иначе: $\Phi_2 = !\Phi_1 (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee \vee x_1 x_2 x_3$, тогда из примера *4.27* следует: $\Phi_1 = x_1 \# x_2 \# x_3$, $\Phi_3 = !\Phi_1 \# x_1 \# x_2$, $\Phi_2 = !\Phi_1 \# \Phi_3 \# x_3$, $\Phi_4 = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_4$, $F = \Phi_1 \# \Phi_4 \# x_5$.

Таким образом, пятивходовой МЭ реализуется схемой из пяти трехвходовых МЭ, один из которых должен иметь прямой и инверсный выходы.

2. Выполним мажоритарное разложение функции F по переменной x_5:

$$F\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_5;$$
$$\mathrm{MX}\,(0, 0, 0, x_5, 0, x_5, x_5, 1, 0, x_5, x_5, 1, x_5, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \mathrm{MX}\,(0, x_5, x_5, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Среди четырех решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1; x_1, x_2, x_3, x_4);$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0,0,0,1,0,1,1,1,0,0,0,1,0,1,1,1; x_1, x_2, x_3, x_4).$$

При этом $\Phi_1 = x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4$, $\Phi_2 = x_2 \# x_3 \# x_4$.

Тогда из примера *4.27* следует, что $\Phi = x_1 \# x_2 \# x_3$, $\Phi_1 = x_1 \# \Phi \# x_4$, $\Phi_2 = x_2 \# x_3 \# x_4$, $F = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_5$.

Таким образом, пятивходовой МЭ может быть построен из четырех трехвходовых МЭ. Эта схема совпадает со схемами, построенными с помощью геометрического метода [5] и метода последовательного исключения переменных [16]. Из [8] известно, что эта схема является ответом на вопрос о простейшем решении поставленной задачи.

4.2.2. Исследование функциональных возможностей пятивходовых мажоритарных элементов

Так как такой элемент описывается БФУ, симметрической по всем переменным, то совместим исследование его функциональных возможностей с построением логических уравнений для проведения декомпозиций при различных значениях $n - k$.

1. При $n - k = 0$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{Maj}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{MX}(0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1,0,1,1,1,$$
$$0,0,0,1,0,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5).$$

Если и функцию f записать в МФ при этом значении $n - k$, то нахождение решения этого уравнения, обладающего определенными свойствами, связано с огромным перебором, так как число решений в этом случае равно $16^{t_0} \cdot 16^{t_1} = 16^{t_0 + t_1} = 16^{2^n}$, где t_0, t_1 — число фрагментов 0 и 1 в столбце значений функции *f*. Среди этих решений находятся и все те, которые могут быть получены любым из известных методов. Так как конструктивный метод сокращения перебора автору неизвестен, то в дальнейшем такая декомпозиция не используется.

2. При $n - k = 1$, если столбец значений функции *f* состоит из фрагментов длиной два, входящих во множество $\{0, x_n, 1\}$, то можно записать уравнение в двух формах:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{Maj}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, x_n);$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \text{MX}(0,0,0,x_n,0,x_n,x_n,1,0,x_n,x_n,1,x_n,1,1,1;$$
$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Если и функцию f записать в МФ, то это уравнение имеет $5^{t_0+t_1} \cdot 6^{t_2}$ решений, где t_2 — число фрагментов x_n в столбце значений функции f. Эта декомпозиция может быть названа Maj-разложением функции f по переменной x_n.

3. При $n - k = 2$, если столбец значений функции f состоит из фрагментов длиной четыре, входящих в множество $\{G_0 = 0, G_1 = = x_{n-1} x_n, G_2 = x_{n-1} \vee x_n, G_3 = 1\}$, то можно записать уравнение в двух формах:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Maj}\,(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, x_{n-1}, x_n);$$

$$f(x_1, \dots, x_n) =$$
$$= \text{MX}(G_0, G_1, G_1, G_2, G_1, G_2, G_2, G_3; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Это уравнение имеет $3^{t_3} \cdot 3^{t_4} = 3^{t_3+t_4}$ решений, где t_3 и t_4 — число фрагментов G_1 и G_2 в столбце значений функции f. Декомпозиция этого типа может быть названа Maj-разложением функции f по двум переменным x_{n-1} и x_n.

4. При $n - k = 3$, если столбец значений функции f состоит из фрагментов длиной восемь, входящих в множество $\{G_0 = x_{n-2} x_{n-1} x_n$, $G_1 = x_{n-2} \# x_{n-1} \# x_n$, $G_2 = x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n\}$, то можно записать уравнение в двух формах:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Maj}\,(\Phi_1, \Phi_2, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n);$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{MX}(G_0, G_1, G_1, G_2; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет 2^{t_5} решений, где t_5 — число фрагментов G_1 в столбце значений функции f. Декомпозиция этого типа может быть названа Maj-разложением функции f по трем переменным x_{n-2}, x_{n-1} и x_n.

5. При $n - k = 4$, если столбец значений функции f состоит из фрагментов F_1 и F_2, рассмотренных в предыдущем разделе, то можно записать уравнение в двух формах:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Maj}\,(\Phi_1, x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n);$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{MX}(F_1, F_2; \Phi).$$

Это уравнение имеет единственное решение. Декомпозиция этого типа может быть названа Maj-разложением функции f по четырем переменным: $x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}$ и x_n.

6. Если столбец значений функции f состоит из следующих типов фрагментов: $\{0, G(X_1), 1\}$, или $\{0, G(X_1)\}$, или $\{G(X_1), 1\}$, то можно записать уравнение в двух формах:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Maj}\,\big(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, G(X_1)\big);$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{MX}(0, 0, 0, G(X_1), 0, G(X_1), G(X_1), 1,$$
$$0, G(X_1), G(X_1), 1, G(X_1), 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Если и функцию f записать в МФ, то это уравнение имеет $5^{t_0+t_1} \cdot 6^{t_6}$ решений, где t_6 — число фрагментов $G(X_1)$ в столбце значений функции f. Эта декомпозиция этого типа может быть названа Maj-разложением функции f по подфункции $G(X_1)$.

7. При наличии прямых и инверсных переменных класс реализуемых функций расширяется.

Так, например, при $n - k = 1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{Maj}\left(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, !x_n\right);$$
$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{MX}(0, 0, 0, !x_n, 0, !x_n, !x_n, 1, 0, !x_n, !x_n,$$
$$1, !x_n, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

4.2.3. Примеры реализации булевых функций

В [15] было отмечено, что попытки Миаты [7] и других авторов предложить методы синтеза схем из пятивходовых МЭ, в какой-то степени аналогичные методам исключения переменных, предложенным для трехвходовых МЭ, не увенчались успехом, в чем Миата и признался в [7].

Методы синтеза схем в этом базисе, изложенные в [15], являются весьма трудоемкими.

Покажем, что элементы Maj могут использоваться с помощью мультиплексорного и формульного методов синтеза схем, а также на основе разложения Шеннона по одной переменной.

Пример 4.46. Реализовать БФУ [15] $f(x_1, x_2, x_3) = \left|0001\ 0111\right|^T$, которая описывает трехвходовой МЭ.

Запишем уравнение при $n - k = 2$, $G_0 = 0$, $G_1 = x_2 x_3$, $G_2 = x_2 \vee x_3$, $G_3 = 1$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \text{Maj}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, x_2, x_3);$$
$$\text{MX}(G_1, G_2; x_1) =$$
$$= \text{MX}(G_0, G_1, G_1, G_2, G_1, G_2, G_2, G_3; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Среди девяти решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 1; x_1) = 1;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 1; x_1) = x_1.$$

Таким образом, как и [15], $x_1 \# x_2 \# x_3 = \text{Maj}(0, 1, x_1, x_2, x_3)$.

Верификация найденного решения наиболее просто выполняется следующим образом:

$$f = \text{sign}\,(0+1+x_1+x_2+x_3-3) =$$
$$= \text{sign}\,(x_1+x_2+x_3-2) = x_1 \# x_2 \# x_3.$$

Из изложенного следует, что для рассматриваемого МЭ могут применяться все подходы, предложенные для трехвходовых МЭ.

Пример 4.47. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ \ 0001\ \ 0111\ \ 1111\right|^T =$$
$$= x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4,$$

которая является порождающей функцией модуля, универсального в классе пороговых функций трех переменных.

Запишем уравнение при $n-k=2$, $G_0=0$, $G_1=x_3x_4$, $G_2=x_3 \vee x_4$, $G_3=1$:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{Maj}\,(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, x_3, x_4);$$
$$\text{MX}(G_0, G_1, G_2, G_3; x_1, x_2) =$$
$$= \text{MX}(G_0, G_1, G_1, G_2, G_1, G_2, G_2, G_3; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Среди девяти решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2.$$

Таким образом, как и в [15],

$$x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4 = \text{Maj}\,(x_1, x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Верификация найденного решения наиболее просто выполняется при пороговом представлении БФУ [10]:

$$f = \text{sign}\,(x_1+x_1+x_2+x_3+x_4-3) = \text{sign}\,(2x_1+x_2+x_3+x_4-3) =$$
$$= x_1(x_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee x_2 x_3 x_4.$$

Следовательно, этот модуль реализуется на одном рассматриваемом МЭ, в то время как при синтезе этого модуля на трехвходовых МЭ их требовалось два.

Из изложенного следует, что пятивходовой МЭ может использоваться с помощью формульного метода.

Пример 4.48. Реализовать БФ [13]

$$f = x_1 !x_3 \vee !x_3 x_4 \vee !x_2 !x_3 \vee x_1 !x_2 x_4.$$

1. Так как эта БФ положительно монотонна по переменным x_1, x_4, построим таблицу истинности:

$$f(x_2, x_3, x_1, x_4) = \left| 1111\ 0001\ 0111\ 0000 \right|^T.$$

Ввиду того что при $n - k = 2$, $G_0 = 0$, $G_1 = x_1 x_4$, $G_2 = x_1 \vee x_4$, $G_3 = 1$ фрагменты функций f и Maj совпадают, составим уравнение:

$$x_1 !x_3 \vee !x_3 x_4 \vee !x_2 !x_3 \vee x_1 !x_2 x_4 = \text{Maj}\ (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, x_3, x_4);$$
$$\text{MX}(G_3, G_1, G_2, G_0; x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(G_0, G_1, G_1, G_2, G_1, G_2, G_2, G_3; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Среди девяти решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(1, 0, 1, 0; x_2, x_3) = !x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 0, 1, 0; x_2, x_3) = !x_3;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(1, 1, 0, 0; x_2, x_3) = !x_2.$$

Таким образом, $f = \text{Maj}\ (!x_3, !x_3, !x_2, x_1, x_4)$. Так как $f = {}= !x_3 (x_1 \vee !x_2 \vee x_4) \vee x_1 !x_2 x_4$, то из предыдущего примера может быть получено другое решение: $f = \text{Maj}\ (!x_3, !x_3, x_1, !x_2, x_4)$.

2. В [13], применяя метод построения схем из МЭ с разными показателями мажорирования [4], эта БФУ реализована следующим образом:

$$f = \text{Maj}\ (x_1, !x_2, !x_3, !x_3, x_4).$$

Все приведенные решения эквивалентны, так как функция Maj симметрична по всем переменным.

Пример 4.49. Реализовать БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left| 0001\ 0001\ 0001\ 1111 \right|^T = x_1 x_2 \vee x_3 x_4.$$

Запишем уравнение при $n - k = 2$, $G_0 = 0$, $G_1 = x_3 x_4$, $G_2 = {}= x_3 \vee x_4$, $G_3 = 1$:

$$f\ (x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{Maj}\ (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, x_2, x_3);$$
$$\text{MX}(G_1, G_1, G_1, G_3; x_1, x_2) =$$
$$= \text{MX}(G_0, G_1, G_1, G_2, G_1, G_2, G_2, G_3; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Среди 27 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(1, 1, 1, 1; x_1, x_2) = 1.$$

Для реализации подфункции $\Phi = x_1 x_2$ первоначально настроим элемент Maj на функцию 3-универсального модуля $F = \text{Maj}\,(x_1, x_1, x_2, x_3, x_4)$, а затем настроим этот модуль на требуемую подфункцию

$$\Phi = \text{Maj}\;(x_1, x_1, x_2, 0, 0).$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из двух элементов Maj.

Обратим внимание, что если заданную БФУ реализовать с помощью мультиплексорного метода при $n - k = 2$ на 3-универсальных модулях, то можно получить не 27, а только одно решение:

$$f\,(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi_1\,(\Phi_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee \Phi_2 x_3 x_4;$$
$$\text{MX}\,(G_1, G_1, G_1, G_3; x_1, x_2) = \text{MX}\,(G_0, G_1, G_2, G_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \text{MX}\,(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}\,(1,\ 1, 1, 1; x_1, x_2) = 1.$$

Таким образом, при $n - k = 2$ элемент Maj имеет ту же номенклатуру фрагментов, что и модуль УЛМ3, но из-за большего их количества увеличивается число вариантов для выбора более простых остаточных функций. Единственное решение для модуля УЛМ3 всегда существует и для элемента Maj.

Пример 4.50. Реализовать разложение Шеннона по переменной x_i:

$$f = !x_i f\,(x_i = 0) \vee x_i f\,(x_i = 1).$$

Из предыдущего примера следует, что

$$\Phi = \text{Maj}\big(!x_i, !x_i, f\,(x_i = 0), 0, 0\big);$$
$$f = \text{Maj}\big(\Phi, \Phi, 1, x_i, f\,(x_i = 1)\big).$$

Таким образом, мультиплексор «2 в 1» реализуется схемой из двух элементов Maj.

4.2.4. Оценки сложности схем

Предположим, что прямые и инверсные входные переменные равнодоступны.

1. Так как элемент Maj может быть настроен на реализацию модуля УЛМ3, то при использовании формульного метода для числа таких элементов справедливо соотношение

$$\left]\frac{h-1}{2}\right[\leqslant L(h) \leqslant \left]\frac{2\,(h-1)}{3}\right[.$$

Следовательно, при любом методе синтеза схем в рассматриваемом базисе $L(h) \leqslant \,]2(h-1)/3[$.

Так как в разд. 3.3.3 было показано, что произвольная БФ в базисе {&, ∨, !} из пяти букв реализуется схемой из двух модулей УЛМ3, то и для рассматриваемого базиса $L(5) = 2$.

2. Из последнего примера следует, что мультиплексор «2 в 1» реализуется схемой из двух элементов Maj. Поэтому

$$L(n) \leqslant 2(2^{n-1}-1) = 2^n - 2.$$

Эта оценка может быть снижена, так как в [15] показано, что $L(4) \leqslant 6$. При этом

$$L(n) \leqslant 2(2^{n-4}-1) + 6 \cdot 2^{n-4} = 2^{n-1} - 2.$$

Из этого соотношения следует, что $L(5) \leqslant 14$. При этом отметим, что в [15] приведена схема из шести элементов Maj, реализующая функцию $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5$.

Из изложенного следует, что

$$L(h, n) \leqslant \min\left(\left]\frac{2(h-1)}{3}\right[, 2^{n-1} - 2 \right).$$

4.3. Реализация булевых функций схемами из трех- и пятивходовых мажоритарных элементов

Весьма сложный метод синтеза схем из МЭ с разными показателями мажорирования изложен в [5].

Использование мультиплексорного метода позволяет для многих БФУ весьма просто решать эту задачу. Так как пятивходовой МЭ «покрывает» трехвходовой МЭ, а критерием качества схемы является минимальное число МЭ, то каждый шаг процедуры синтеза будем начинать с применения элемента Maj.

Пример 4.51. Реализовать БФУ

$$f(x_1, \dots, x_5) =$$
$$= \left|0001\ 0111\ 0000\ 0001\ 1111\ 1111\ 0000\ 0111\right|^T.$$

Так как при $n - k = 2$ фрагменты заданной БФУ и элемента Maj совпадают, то составим уравнение в двух формах:

$$f(x_1, \dots, x_5) = \mathrm{Maj}\,(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, x_4, x_5);$$
$$\mathrm{MX}(G_1, G_2, G_0, G_1, G_3, G_3, G_0, G_2; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(G_0, G_1, G_1, G_2, G_1, G_2, G_2, G_3; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Это уравнение имеет 81 решение. Для определения решения составим карты Карно. Если выбрать $\Phi_1 = !x_2$, то функцию Φ_2 можно доопределить до мажоранты $\Phi_2 = x_1 \# !x_2 \# x_3$. При этом функция Φ_3 доопределяется автоматически: $\Phi_3 = x_1 !x_2 \vee x_2 x_3$. Корректность выбранного решения подтверждается его мультиплексорной формой:

$$\Phi_1 = \text{MX}(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0; x_1, x_2, x_3);$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3);$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3).$$

Реализуем функцию Φ_3. Так как она содержит запрещенные фрагменты, то выполним в полученной формуле замену $!x_2 = x_4$: $\Phi_{31} = x_1 x_4 \vee x_2 x_3$. Из примера *4.47* следует, что $\Phi = x_1 \# x_4 \# 0$, $\Phi_{31} = \text{Maj}(\Phi, \Phi, 1, x_2, x_3)$.

Выполняя обратную замену, получим:

$$\Phi = x_1 \# !x_2 \# 0,\ \Phi_3 = \text{Maj}(\Phi, \Phi, 1, x_2, x_3).$$

Таким образом, заданная БФУ реализуется схемой из двух трехвходовых и двух пятивходовых МЭ.

При использовании формульного метода для $h \geqslant 6$ следует помнить, что БФ в базисе {&, ∨, !} из двух букв реализуется одним трехвходовым МЭ, из трех букв — одним пятивходовым МЭ, а из пяти букв — двумя пятивходовыми МЭ. При этом $](h-1)/2[\leqslant\leqslant L(h) \leqslant]2(h-1)/3[$.

Пример 4.52. Реализовать БФ

$$f = (x_1 x_2 \vee x_3 x_4)(x_5 x_6 \vee x_7 x_8) \vee$$
$$\vee (x_9 x_{10} \vee x_{11} x_{12})(x_{13} x_{14} \vee x_{15} x_{16}).$$

Из суперпозиции $f_1 = x_1 x_2$, $f_2 = f_1 \vee x_3 x_4$, $f_3 = f_2 (x_5 x_6 \vee \vee x_7 x_8)$, $f_4 = x_9 x_{10}$, $f_5 = f_4 \vee x_{11} x_{12}$, $f_6 = f_5 (x_{13} x_{14} \vee x_{15} x_{16})$, $f = = f_3 \vee f_6$ следует, что заданная БФ может быть реализована схемой из трех трехвходовых и шести пятивходовых МЭ.

Выводы

1. Предложен формульный метод реализации БФ в базисе {&, ∨, !} из h букв древовидными схемами из h – 1 трехвходовых МЭ, которые строятся от входов к выходу (снизу вверх). Для пороговых бесповторных БФ из h букв этот метод строит каскадные схемы из h – 1 МЭ.

2. Предложен графовый метод реализации БФ в базисе {&, ∨, !} из h букв каскадными схемами с разветвлениями из h – 1 трехвходо-

вых МЭ. Показано, что изменение порядка записи БФ в общем случае изменяет число разветвлений или их расположение в схеме.

3. Предложен более простой, чем известный, метод построения мажоритарных разложений по одной монотонной переменной. Рассмотрен вопрос о существовании таких разложений по двум монотонным переменным.

4. Предложен мультиплексорный метод реализации БФУ схемами из трехвходовых МЭ, основанный на:

— мажоритарных разложениях;

— мультиплексорной декомпозиции, компоненты которой реализуются на МЭ;

— вспомогательных приемах, упрощающих реализацию функций.

5. Предложены оценки сложности схем из трехвходовых МЭ, реализуемых этими методами.

6. Показано, как использовать формульный и мультиплексорный методы, а также разложение Шеннона по одной переменной для реализации БФУ схемами из пятивходовых МЭ. Получены оценки сложности таких схем.

7. Предложен мультиплексорный метод реализации БФУ схемами из трех- и пятивходовых МЭ.

8. Рассмотрение большого числа примеров, заимствованных из литературы, показало, что для многих из них предлагаемые методы строят схемы, сложность которых не превышает сложности схем, построенных с помощью известных методов. Для БФУ, допускающих неразделительные мажоритарные декомпозиции, мультиплексорный метод обычно неэффективен. При этом необходимо учесть то, что формульный и мультиплексорный методы универсальны и применимы для практически любых логических элементов, кроме пороговых, в то время как известные методы ориентированы в данном случае только на использование МЭ.

Литература

1. *Lindaman R.* A theorem for deriving majority-logic networks within an augmented Boolean algebra // IRE Trans. on Electronic Comput. 1960. N 3.

2. *Cohn M., Lindaman R.* Axiomatic majority-decision logic // IRE Trans. on Electronic Comput. 1961. N 1.

3. *Akers S. B.* A truth table method for the synthesis of combinational logic // IRE Trans. on Electronic Comput. 1961. N 4.

4. *Akers S. B.* Synthesis of combinational logic using threeinput majority gates // Switching circuit theory and logical design. Proc. 3rd annual sympos. AIEE pubb. 1962.

5. *Muller H. S., Winder R. O.* Majority logic synthesis by geometric methods // IRE Trans. on Electronic Comput. 1962. N 1.

6. *Lefkovitz D.* An algorithm for decreasing inputs number and threshold // Proceedings of the IRE on the Electronic Comput. 1962. N 7.

7. *Miyata F.* Realization of arbitrary logical functions using majority elements // IEEE Trans. Electronic Comput. 1963. N 3.

8. *Amarel S., Cooke G., Winder R.* Majority gate networks // IEEE Trans. Electronic Comput. 1964. N 1.

9. *Варшавский В. И., Розенблюм Л. Я.* О минимизации пирамидальных схем из мажоритарных элементов // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1964. № 3.

10. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Пороговая и мажоритарная логика // Информ. листок. 1964. № 2 (29).

11. *Варшавский В. И., Розенблюм Л. Я.* Синтез пирамидальных схем из мажоритарных элементов // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1965. № 1.

12. *Варшавский В. И., Розенблюм Л. Я.* Функциональная разделимость в мажоритарных схемах // Изв. АН СССР. Технич. кибернетика. 1965. № 4.

13. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов // Сети передачи информации и их автоматизация. 1965.

14. *Варшавский В. И.* Мажоритарная декомпозиция // Автоматика и телемеханика. 1965. № 9.

15. *Розенблюм Л. Я.* Некоторые вопросы синтеза логических схем из мажоритарных элементов. Дис. на соиск. уч. степени канд. техн. наук. Л.: ВЦ ЛО математического института им. В.А. Стеклова, 1965.

16. *Розенблюм Л. Я.* Об одном методе синтеза мажоритарных схем // Изв. высш. учебных заведений. Приборостроение. 1965. № 5.

17. *Розенблюм Л. Я.* О минимизации схем в мажоритарном базисе // Кибернетика. 1968. № 1.

18. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.

19. *Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Проектирование вычислительных и управляющих схем на мажоритарных элементах. Л.: Дом научно-технич. пропаганды, 1969.

20. *Cohen S., Winder R.* Threshold gate building blocks // IEEE Trans. on Comput. 1969. № 9.

21. *Артюхов В. Л., Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация булевых функций арифметическими полиномами // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4.

22. *Кондратьев В. Н., Шалыто А. А.* Реализация булевых функций одним линейным арифметическим полиномом с маскированием // Автоматика и телемеханика. 1996. № 1.

23. *Шалыто А. А.* Switch-технология. Алгоритмизация и программирование задач логического управления. СПб.: Наука, 1998.

24. *Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1283744 // Бюл. изобр. 1987. № 2.

25. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Реализация булевых формул однородными мультиплексорными и мажоритарными каскадами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 5.

26. *Кузнецов Б. П., Шалыто А. А.* Реализация булевых формул линейными бинарными графами. III. Оптимизация числа и суммарной длины путей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 5.

27. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: ИПК СП, 1984.

28. *Блох А. Ш.* Граф-схемы и их применение. Минск: Вышэйшая школа, 1975.