Глава 3

Мультиплексорный метод реализации булевых функций схемами из произвольных логических элементов

Предлагаемый метод относится к классу декомпозиционных методов синтеза, так как он строит одновыходную комбинационную схему от выхода к входам на основе декомпозиции булевых функций (заданной и ее остаточных), выполняемой путем решения логических уравнений. Поэтому выполним обзор:

— декомпозиций булевых функций;
— декомпозиционных методов синтеза комбинационных схем;
— методов решения логических уравнений.

3.1. Обзор литературы

3.1.1. Декомпозиции булевых функций

Задача декомпозиции БФУ является одной из важнейших в логическом синтезе, и в настоящее время известно большое число работ по этой тематике [1]. К фундаментальным работам по этому вопросу можно отнести работы [2—8].

Частным случаем декомпозиций являются разложения БФУ по переменным. Наиболее известным является *разложение Шеннона* по переменной x_i [2], которое имеет следующий вид:

$$f = f(x_i = 0)!x_i \vee f(x_i = 1)x_i.$$

Так как в этом соотношении конъюнкции ортогональны, то

$$f = f(x_i = 0)!x_i \oplus f(x_i = 1)x_i.$$

Ввиду того что $!x_i = 1 \oplus x_i$, то

$$f = f(x_i=0)(1 \oplus x_i) \oplus f(x_i=1)x_i =$$
$$= f(x_i=0) \oplus \big(f(x_i=0) \oplus f(x_i=1)\big)x_i .$$

Ввиду того что $x_i = 1 \oplus !x_i$, то

$$f = f(x_i=0)!x_i \oplus f(x_i=1)(1 \oplus !x_i) =$$
$$= f(x_i=1) \oplus \big(f(x_i=0) \oplus f(x_i=1)\big)!x_i .$$

Эти соотношения называются разложениями Рида [4].

В настоящей работе из всего множества декомпозиций рассматриваются только разделительные декомпозиции, для построения которых предложен метод, названный мультиплексорным. Этот метод основан на решении логических уравнений вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_m),$$

где f — декомпозируемая функция, а F — образ декомпозиции.

Определены условия, при выполнении которых такие уравнения имеют решения, которые весьма просто находятся. На основе этого метода декомпозиции предложен метод реализации БФУ схемами из произвольных, априори заданных логических элементов, названный мультиплексорным методом синтеза. Предлагаемый метод является универсальным и для большинства примеров, взятых из литературы, позволяет получать результаты не худшие, чем результаты, получаемые с помощью известных методов. Метод может весьма просто использоваться «вручную» при n, $m < 6$. При бóльших значениях n и m для снижения трудоемкости он может применяться после декомпозиции, выполняемой на основе других методов, например формульного.

3.1.2. Декомпозиционные методы синтеза комбинационных схем

Методы этой группы базируются на декомпозиции заданной БФУ и всех ее остаточных по образам функций, реализуемых используемыми элементами. Эти методы обеспечивают синтез схем от «выхода к входам», или «сверху вниз».

Аналитический метод синтеза, названный методом каскадов [9], основан на разложении Шеннона. Он может применяться для синтеза схем из переключательных контактов и мультиплексоров. Элементы этих типов могут эффективно использоваться и на основе табличного метода, названного каноническим методом синтеза [10]. Этот метод был модифицирован для синтеза схем из элементов других типов [11]. Так, например, в [12, 13] излагается модифицированный канонический метод синтеза схем на универсальных трехвходовых элементах, отличных от мультиплексоров, которые предложены в [14] и названы WOS-модулями [15].

Декомпозиционный метод синтеза схем в простых базисах описан в [16]. Весьма специфическими являются методы синтеза схем на пороговых элементах [17—20]: до реализации заданной БФУ параметры пороговых элементов не известны, так как по определению произвольная пороговая функция или подфункция любого числа переменных реализуется одним пороговым элементом. При выполнении шага декомпозиции это обстоятельство не позволяет использовать логическое уравнение, так как его правая часть априори неизвестна. Для частного случая пороговых элементов — мажоритарных элементов [21] — параметры определены и известно большое число работ, посвященных методам синтеза схем в этом элементном базисе (в дальнейшем — в базисе), некоторые из которых указаны в гл. 4.

Наибольший интерес представляют методы синтеза схем в произвольном базисе. В [22—24] предложен метод синтеза схем, основанный на построении для заданной БФУ структурного графа, который в дальнейшем с помощью введенной коалгебры графов преобразуется в искомую схему. Метод является весьма трудоемким даже для весьма простых элементов.

Табличный метод, основанный на решении логических уравнений и названный методом Левенгейма, изложен в [25]. Однако его применение для сложных логических элементов весьма трудоемко.

Декомпозиционные методы синтеза схем в базисе сложных элементов впервые рассмотрены в [26, 27]. Эти методы получили дальнейшее развитие в работах [28—31], где они были названы *методами «направленного поиска»*, так как их идея заключается в выборе (на основе определенных оценочных критериев) переменных, подаваемых на входы элемента, используемого на рассматриваемом шаге декомпозиции. Эти методы весьма трудоемки, и их применение для «ручного» синтеза затруднительно.

Известны и другие работы, посвященные декомпозиционным методам синтеза, например [8, 32, 33], которые, однако, весьма специфичны.

Предлагаемый в настоящей работе метод позволяет устранить недостатки известных методов — специфичность для одних и трудоемкость для других методов.

3.1.3. Методы решения логических уравнений

Ряд методов декомпозиции и реализации БФУ основан на решении логических уравнений [34, 35].

Аналитический метод решения логических уравнений вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

рассмотрен в [36]. При этом было показано, что если $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — некоторое решение этого уравнения, то общее решение имеет вид:

$$x_i = \Phi_i f(u_1, \dots, u_n) \vee u_n \, ! f(u_1, \dots, u_n),$$

где $u_1, \dots, u_n$ — произвольные параметры.

В [37] рассмотрен метод, позволяющий в результате решения уравнения $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ определить, на каких входных наборах заданная БФУ принимает единичные значения.

В [38] предлагается алгебраический метод решения уравнения

$$F(y_1, \dots, y_m, \; x_1, \dots, x_n) = 1$$

в виде системы частично определенных функций:

$$y_i = \Phi_j(x_1, \dots, x_n), \;\; j = 1, \dots, m.$$

При этом общее решение получается как семейство систем параметрически заданных функций.

Логическое уравнение вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(\Phi_1, \dots, \Phi_m)$$

может решаться за счет его замены эквивалентной системой из 2^n логических уравнений [39]. В общем случае эта система может быть сведена к эквивалентной системе линейных неравенств [40], к которой добавляются условия, ограничивающие допустимые значения неизвестных значениями 0 и 1, и решена с помощью весьма трудоемких целочисленных методов линейного программирования [41]. Специфика функций F и Φ_j позволяет упростить решение этой системы [42]. В разд. 3.4.3 показано, что, еще больше ограничив свойства функций Φ_j, удается упростить процедуру решения системы уравнений, которая все равно остается весьма трудоемкой.

Отметим, что в [43] рассмотрен вопрос о решении систем дизъюнктивно-конъюнктивных уравнений. При этом показано, что решение дизъюнктивной (конъюнктивной) системы уравнений представимо в виде правила, аналогичного правилу Крамера, разработанного для решения обыкновенных линейных алгебраических уравнений.

В [44] на основе [45] был предложен матричный метод решения логических уравнений вида:

$$f(X) = F_1\big(\Phi_1(X_0), \dots, \Phi_m(X_0), X_1\big), \qquad (3.1)$$

где X — множество из n входных переменных; X_0, X_1 — множества из n_0 и n_1 входных переменных соответственно, причем $X_0 \cap X_1 = 0$. Этот метод, как показано в разд. 3.4.2, является чрезвычайно громоздким.

В настоящей работе предлагается существенно более простой метод решения таких уравнений.

3.2. Мультиплексорная декомпозиция и стандартные схемы для ее реализации

3.2.1. Основные определения

Декомпозицией булевой функции (БФУ) называется представление ее в виде суперпозиции других булевых функций.

Пусть БФУ зависит от множества n входных переменных. Предположим для определенности, что множество X_0 образуют переменные $x_1, \ldots, x_k$, а множество X_1 — переменные $x_{k+1}, \ldots, x_n$. При этом $n_0 = k$, $n_1 = n - k$.

Разделительной декомпозицией, или, более точно, m-кратной разделительной декомпозицией [46], называется ее представление в виде соотношения (3.1). В дальнейшем в этой и других декомпозициях внешнюю функцию в их правой части, как отмечалось выше, будем называть образом декомпозиции. Декомпозиция (3.1) универсальна, так как в таком виде может быть представлена произвольная БФУ.

Если заданная БФУ представлена в (3.1), то говорят, что она разложена по функциям $\Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_m(X_0)$.

Частным случаем рассмотренной декомпозиции является однократная, или простая, разделительная декомпозиция [46]:

$$f(X) = F_1\left(\Phi(X_0), X_1\right).$$

В [47] приведены условия существования для БФУ разделительной и простой разделительной декомпозиций и предложен метод их построения на основе карт декомпозиций. Недостаток этого метода состоит в том, что при его использовании определение функций Φ_j ненаглядно и не является аналитическим.

Введем в рассмотрение декомпозицию вида

$$\begin{gathered} f(X) = F_2\left(\Phi_1(X_0), \ldots \right.\\ \left. \ldots, \Phi_m(X_0), Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1)\right), \end{gathered} \tag{3.2}$$

которую назовем функциональной разделительной декомпозицией.

Введем в рассмотрение также частный случай этой декомпозиции:

$$\begin{gathered} f(X) = Q_0(X_1)\,!\Phi_1(X_0) \ldots\, !\Phi_m(X_0) \vee \\ \vee Q_1(X_1)\,!\Phi_1(X_0) \ldots\, \Phi_m(X_0) \vee \ldots \\ \ldots \vee Q_{2^m-1}(X_1)\, \Phi_1(X_0) \ldots\, \Phi_m(X_0), \end{gathered} \tag{3.3}$$

который назовем мультиплексорной декомпозицией по названию функции, соответствующей ее образу. В дальнейшем такую декомпозицию будем обозначать более компактно:

$$f(X) = \mathrm{MX}\big(Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1); \\ \Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_m(X_0)\big). \tag{3.4}$$

Декомпозиция (3.4) универсальна, так как может быть построена для произвольной БФУ.

Частным случаем рассмотренной является простая мультиплексорная декомпозиция

$$f(X) = \mathrm{MX}\big(Q_0(X_1), Q_1(X_1); \Phi(X_0)\big),$$

Декомпозицию (3.4) можно рассматривать как булеву формулу, зависящую от $m + 2^m$ переменных $Q_i(X_1)$ и $\Phi_j(X_0)$, которую в общем случае можно проминимизировать. Это позволяет получить декомпозицию (3.2). Если в это соотношение подставить выражения для $Q_i(X_1)$, то можно получить декомпозицию (3.1). Однако в соотношение (3.2) можно подставить и выражения для $\Phi_j(X_0)$, что приводит к декомпозиции

$$f(X) = F_3\big(Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1), X_0\big), \tag{3.5}$$

которая в [46, 47] даже не упоминается.

Таким образом, для заданной БФУ может быть построено несколько разделительных декомпозиций и среди них выбрана простейшая по некоторому критерию сложности. При этом отметим, что в известных работах по декомпозиции БФУ, например в [46, 47], говоря о построении декомпозиций (3.1), на самом деле определяют условия существования и предлагают подход к построению декомпозиций (3.3). Видимо, по этой причине соотношение (3.1) в [47] названо дизъюнктивной декомпозицией. Из изложенного следует, что это определение некорректно, так как в (3.1) в качестве образа могут использоваться БФ, отличные от дизъюнкции. Это определение некорректно также и для декомпозиции (3.3), так как суть этой декомпозиции существенно более точно описывает понятие «мультиплексор», в котором 2^m-входы и m-входы «физически» разделены, в то время как, рассматривая соотношение (3.3) в качестве ДНФ, разделение функций Q_i и Φ_j не является столь наглядным.

3.2.2. Построение мультиплексорной декомпозиции на основе решения логических уравнений

Метод построения декомпозиции (3.4) для заданной функции f при фиксированных $n_0 = k$ и $n_1 = n - k$ состоит из четырех этапов.

1. Определяются по столбцу значений таблицы истинности (ТИ) непересекающиеся фрагменты $G_t(t = 0, 1, \ldots, 2^k - 1)$ длиной 2^{n-k} и формируются R групп ($R \leqslant t$), состоящих из одинаковых фрагментов $g_0, g_1, \ldots, g_{R-1}$.

2. Вычисляется значение $m =]\log R[$, определяющее размерность функции МХ в соотношении (3.4).

3. Назначаются функции $Q_i(X_1)$.

4. Определяются функции $\Phi_j(X_0)$.

Рассмотрим третий этап более подробно.

При $R = 2^m$ функция $Q_i(X_1)$ формируется в результате ее приравнивания представителю группы фрагментов, причем каждой функции Q_i соответствует один представитель группы и наоборот. Число таких приравниваний (назначений функций Q_i) определяется соотношением $H_1 = 2^m!$ (здесь и далее символ !, стоящий после операнда, — операция «факториал»). Выбор варианта назначения определяет выбор функций Φ_j при фиксированном образе декомпозиции.

При $R \neq 2^m$ сначала формируются R функций Q_i, как и в случае $R = 2^m$. Остальные $(2^m - R)$ функций могут быть выбраны произвольно. При этом в качестве функции $Q_i(X_1)$ может быть выбрана произвольная БФУ, зависящая от n_1 переменных, в том числе и не являющаяся фрагментом реализуемой функции. Число вариантов назначений в этом случае H_2, причем $H_2 > H_1$.

Обратим внимание на тот факт, что во втором случае возможны два варианта: $2^m = 2^k$ и $2^m < 2^k$. В первом из них, если критерием декомпозиции является простота функций Φ_j, то применение предлагаемого подхода нецелесообразно, так как того же результата можно достичь с помощью менее трудоемкого метода, излагаемого в следующем разделе. Для первого варианта при использовании других критериев и для второго варианта для построения декомпозиции (3.4) должен применяться предлагаемый метод.

Перейдем к рассмотрению четвертого этапа. Предположим, что назначение функций Q_i фиксировано. При этом если все функции Q_i различны (одинаковыми могут быть только функции Q_i при $R \neq 2^m$, $2^m < 2^k$, которые не являются фрагментами функции f), то существует единственный набор функций Φ_j, удовлетворяющий соотношению (3.4), т. е. существует единственная декомпозиция этого вида. В противном случае существует определенное число таких декомпозиций, которое может быть вычислено.

Формирование функций Φ_j осуществляется таким образом, что оно позволяет расположить фрагменты, соответствующие функциям Q_i, в том порядке, в котором они размещены в столбце значений реализуемой функции.

В качестве модели для определения функций Φ_j и декомпозиции (3.4) в целом предлагается использовать стандартную схему, представленную на рис. 3.1.

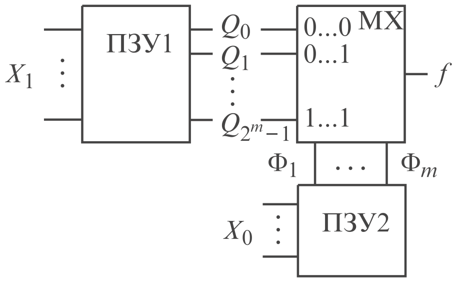

Рис. 3.1

В этой схеме применяются MX «2^m в 1» и два постоянных запоминающих устройства (ПЗУ).

ПЗУ1 формирует функции Q_i. При этом функция с номером i подается на вход MX, адрес которого является двоичным эквивалентом номера i.

Каждая строка ПЗУ2 по значениям набора входных переменных множества X_0 формирует m-разрядный двоичный адрес 2^m-го входа MX, по которому на выход MX передается функция Q_i, соответствующая этому входному набору. При этом содержимое i-го столбца ПЗУ2 определяет функцию Φ_j.

Мультиплексор реализует образ декомпозиции (3.4).

Эта схема кроме теоретического значения для нахождения декомпозиций (3.4) имеет также практическое значение в качестве нового подхода к композиции ПЗУ.

Завершив изложение метода построения декомпозиции (3.4) для функции f, заданной ТИ, отметим, что если говорить о построении простейшей по выбранному критерию декомпозиции, то в общем случае имеют место три вида перебора, влияющих на ее сложность:

— по порядку расположения входных переменных в ТИ;

— по назначению функций Q_i;

— по формированию функций $\Phi_j(X_0)$ при $R \neq 2^m$, $2^m < 2^k$.

Перебор минимален для симметрических функций с $R = 2^m$, так как для них может иметь место перебор только второго вида. Для таких функций с $R \neq 2^m$, $2^m < 2^k$, сложность декомпозиции не зависит только от порядка входных переменных в ТИ. Для произвольных БФУ изменение порядка входных переменных в общем случае может так изменить величину R, что изменится и величина m.

Пример 3.1. Построить мультиплексорную декомпозицию для БФУ f (табл. 3.1) при $k = 3$. При этом $X_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $X_1 = \{x_4, x_5\}$.

Таблица 3.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	g_t	G_r	Q_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	g_t	G_r	Q_i
0	0	0	0	0	0	g_0	G_0	Q_0	1	0	0	0	0	0	g_4	G_1	Q_1
0	0	0	0	1	0				1	0	0	0	1	0			
0	0	0	1	0	0				1	0	0	1	0	0			
0	0	0	1	1	0				1	0	0	1	1	1			
0	0	1	0	0	0	g_1	G_1	Q_1	1	0	1	0	0	0	g_5	G_2	Q_2
0	0	1	0	1	0				1	0	1	0	1	1			
0	0	1	1	0	0				1	0	1	1	0	1			
0	0	1	1	1	1				1	0	1	1	1	1			
0	1	0	0	0	0	g_2	G_1	Q_1	1	1	0	0	0	0	g_6	G_2	Q_2
0	1	0	0	1	0				1	1	0	0	1	1			
0	1	0	1	0	0				1	1	0	1	0	1			
0	1	0	1	1	1				1	1	0	1	1	1			
0	1	1	0	0	0	g_3	G_2	Q_2	1	1	1	0	0	0	g_7	G_1	Q_1
0	1	1	0	1	1				1	1	1	0	1	0			
0	1	1	1	0	1				1	1	1	1	0	0			
0	1	1	1	1	1				1	1	1	1	1	1			

1. Выделим в столбце значений ТИ $2^k = 8$ фрагментов длиной $2^{n-k} = 4$ и одинаковые фрагменты объединим в группы: $G_0 = g_0 = 0$, $G_1 = g_1 = g_2 = g_4 = g_7 = x_4 x_5$, $G_2 = g_3 = g_5 = g_6 = x_4 \vee x_5$. Таким образом, $R = 3$.

2. Так как $m =]\log R[$, $R \neq 2^m$, а $2^m < 2^k$, то будем искать декомпозицию

$$f(X) = \mathrm{MX}\big(Q_0(X_1), Q_1(X_1), Q_2(X_1), Q_3(X_1);$$
$$\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0)\big).$$

Схема, реализующая это соотношение, приведена на рис. 3.2.

3. Среди множества вариантов назначений функций Q_i выберем следующее: $Q_0 = G_0 = 0$, $Q_1 = G_1 = x_4 x_5$, $Q_2 = G_2 = x_4 \vee x_5$. В качестве функции Q_3 может быть выбрана произвольная функция, зависящая от переменных x_4, x_5. Если $Q_3 \neq \{0, x_4 x_5, x_4 \vee x_5\}$, то выбор функций Φ_j единствен. В противном случае при каждом назначении возможны несколько наборов функций Φ_1 и Φ_2.

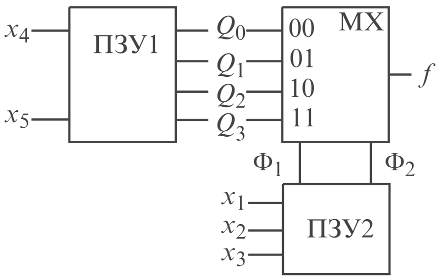

Рис. 3.2

4.1. Предположим, что $Q_3 = 1$. Тогда ПЗУ1 может быть запрограммировано, как показано на рис. 3.3.

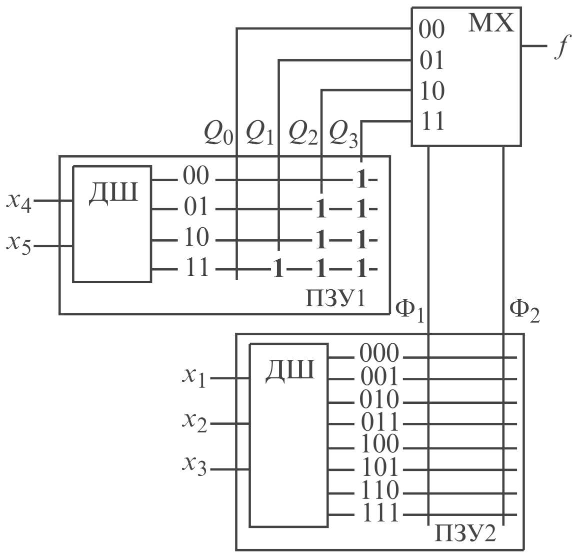

Рис. 3.3

Покажем, как формируются функции Φ_1 и Φ_2 (программируется ПЗУ2). Из рассмотрения табл. 3.1 и рис. 3.3 (ДШ — дешифратор) следует, что:

при $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ на выход схемы должна передаваться функция Q_0, подключенная к входу MX адресом 00. Следовательно, $\Phi_1(0, 0, 0) = 0,\ \Phi_2(0, 0, 0) = 0$;

при $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ на выход схемы должна передаваться функция Q_1, подключенная к входу МХ адресом 01. Следовательно, $\Phi_1(0, 0, 1) = 0,\ \Phi_2(0, 0, 1) = 1$;

при $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ на выход схемы должна передаваться функция Q_1, подключенная к входу МХ адресом 01. Следовательно, $\Phi_1(0, 1, 0) = 0,\ \Phi_2(0, 1, 0) = 1$;

при $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$ на выход схемы должна передаваться функция Q_2, подключенная к входу МХ адресом 10. Следовательно, $\Phi_1(0, 1, 1) = 1,\ \Phi_2(0, 1, 1) = 0$;

при $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ на выход схемы должна передаваться функция Q_1, подключенная к входу МХ адресом 01. Следовательно, $\Phi_1(1, 0, 0) = 0,\ \Phi_2(1, 0, 0) = 1$;

при $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ на выход схемы должна передаваться функция Q_2, подключенная к входу МХ адресом 10. Следовательно, $\Phi_1(1, 0, 1) = 1,\ \Phi_2(1, 0, 1) = 0$;

при $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$ на выход схемы должна передаваться функция Q_2, подключенная к входу МХ адресом 10. Следовательно, $\Phi_1(1, 1, 0) = 1,\ \Phi_2(1, 1, 0) = 0$;

при $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$ на выход схемы должна передаваться функция Q_1, подключенная к входу МХ адресом 01. Следовательно, $\Phi_1(1, 1, 1) = 0,\ \Phi_2(1, 1, 1) = 1$.

На этом завершается программирование ПЗУ2 (рис.3.4).

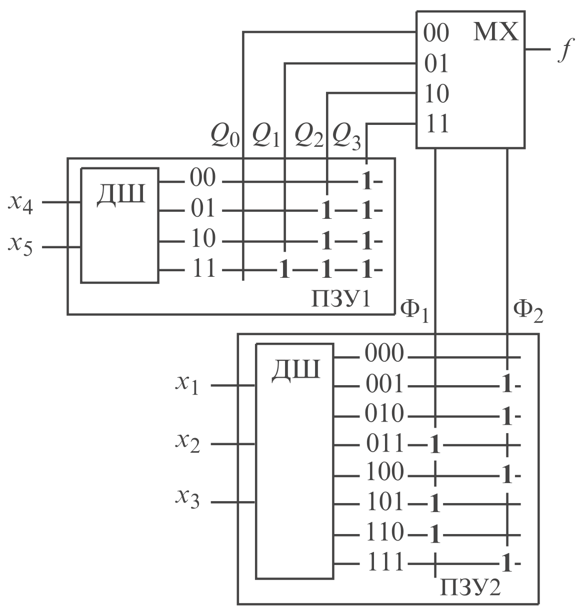

Рис. 3.4

Из рассмотрения ПЗУ2 следует, что

$$\Phi_1 = !x_1 x_2 x_3 \vee x_1(x_2 \oplus x_3), \ \Phi_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3. \qquad (3.6)$$

Таким образом, искомая декомпозиция построена.

Предложим аналитический метод определения функций Φ_1 и Φ_2. Для этого составим и решим логическое уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2), \quad (3.7)$$

которое в мультиплексорной форме (МФ) имеет вид:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_2, Q_1, Q_2, Q_2, Q_1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это представление является частным случаем МФ, так как в нем все функции Q_i в правой части уравнения по содержанию различны. Это приводит к тому, что уравнение в данном случае имеет единственное решение, которое также будем искать в МФ.

Достоинство предлагаемого подхода состоит в том, что решение уравнения может быть найдено непосредственно из МФ за счет представления в двоичной форме индексов функций Q_i, расположенных в левой части уравнения в МФ, и записи представления каждого индекса в виде соответствующего столбца в МФ решения:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_3); \\ \Phi_2 &= \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Соотношения (3.6) являются формульной записью этого решения.

Декомпозиция (3.2) может быть получена, если учесть, что для функций Q_i выполняются отношения покрытия — неравенство $Q_0 \leqslant Q_1 \leqslant Q_2 \leqslant Q_3$. При этом

$$f = Q_0 \vee Q_1\Phi_2 \vee Q_2\Phi_1 \vee Q_3\Phi_1\Phi_2.$$

Так как $Q_0 = 0$, $Q_3 = 1$, $\Phi_1\Phi_2 = 0$, то $f = Q_1\Phi_2 \vee Q_2\Phi_1$.

Декомпозиция (3.1) в данном случае имеет вид:

$$f = \Phi_1(x_4 \vee x_5) \vee \Phi_2 x_4 x_5,$$

а декомпозиция (3.5) соответствует следующему соотношению:

$$f = Q_1(x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \vee Q_2\big(!x_1 x_2 x_3 \vee x_1(x_2 \oplus x_3)\big).$$

4.2. Для случая $Q_3 = 0$, так как $Q_0 = Q_3$, то уравнение (3.7) может быть записано в виде:

$$f = Q_1\Phi_1!\Phi_2 \vee Q_2\Phi_1!\Phi_2.$$

Так как в данном случае в правой части уравнения в МФ две функции Q_i должны быть по содержанию одинаковы, а эти функции должны использоваться в левой его части, то уравнение (3.7) может быть записано в МФ, которую будем называть п а р а м е т р и ч е с к о й:

$$\mathrm{MX}(Q_0 ? Q_3, Q_1, Q_1, Q_2, Q_1, Q_2, Q_2, Q_1; x_1, x_2, x_3) = \\ = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет два решения, первое из которых (3.6) определяется по соотношениям (3.8), а второе имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = \\ &= !x_1 \oplus x_2 \oplus x_3; \\ \Phi_2 &= \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = \\ &= !x_1 \# !x_2 \# !x_3 \vee x_1 x_2 x_3. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Другим представлением МФ, которая может быть названа явной, в данном случае является следующее:

$$\mathrm{MX}(0, x_4 x_5, x_4 x_5, x_4 \vee x_5, x_4 x_5, x_4 \vee x_5, x_4 \vee x_5, x_4 x_5; \\ x_1, x_2, x_3) = \mathrm{MX}(0, x_4 x_5, x_4 \vee x_5, 0; \Phi_1, \Phi_2).$$

Решение уравнения в этой форме выполняется следующим образом: для каждой функции в левой части МФ до точки с запятой выбирается одна из одинаковых с ней функций, расположенных в правой части МФ, и в решение в виде столбца записывается двоичный код номера выбранной позиции в правой части формы. Как и для предыдущего представления МФ, решениями этого уравнения являются соотношения (3.8) и (3.9).

В дальнейшем будет использоваться как параметрическая, так и явная мультиплексорная форма.

4.3. Для случая $Q_3 = x_4 \vee x_5$, так как $Q_2 = Q_3$, то уравнение (3.7) может быть записано в виде:

$$f = Q_1 \Phi_2 \vee Q_2 \Phi_1.$$

Запишем уравнение (3.7) в МФ в следующем виде:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_2 ? Q_3, Q_1, Q_2 ? Q_3, Q_2 ? Q_3, Q_1; x_1, x_2, x_3) = \\ = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет восемь решений. Во всех решениях функция Φ_1 одинакова и совпадает с первой функцией в соотношениях (3.8) и (3.6), а простейшая БФ для функции Φ_2 получается при

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 .$$

4.4. Для случая $Q_3 = x_4 x_5$, так как $Q_1 = Q_3$, то уравнение (3.7) может быть записано в виде:

$$f = Q_2 \Phi_1 ! \Phi_2 \vee Q_1 \Phi_2 .$$

Запишем уравнение (3.7) в МФ в следующем виде:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1 ? Q_3, Q_1 ? Q_3, Q_2, Q_1 ? Q_3, Q_2, Q_2, Q_1 ? Q_3;$$
$$x_1, x_2, x_3) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2) .$$

Это уравнение имеет 16 решений, среди которых имеется следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \mathbin{\#} x_2 \mathbin{\#} x_3 ;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 .$$

Таким образом, решением уравнения в данном случае является «параллельный двоичный одноразрядный сумматор».

Пример 3.2. Построить мультиплексорную декомпозицию при $k = 2$ для БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000 \;\; 0001 \;\; 1111 \;\; 1111\right|^T .$$

1. Столбец значений этой функции состоит из трех типов фрагментов (R = 3) длиной четыре: $G_0 = g_0 = 0$, $G_1 = g_1 = x_3 \cdot x_4$, $G_2 = g_2 = g_3 = 1$.

2. Так как в данном случае m = 2, а $2^m = 2^k$, то простейшая реализация функций Φ_1 и Φ_2 достигается при использовании разложения Шеннона одновременно по переменным x_1 и x_2.

Пример 3.3. Построить мультиплексорную декомпозицию при k = 2 для БФУ, рассмотренной в предыдущем примере, в таблице истинности которой порядок входных переменных изменен на противоположный:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \left|0101 \;\; 0101 \;\; 0101 \;\; 0111\right|^T .$$

1. Столбец значений этой функции состоит из двух типов фрагментов (R = 2) длиной четыре: $G_0 = g_0 = g_1 = g_2 = x_1$, $G_1 = g_3 = x_1 \vee x_2$.

2. В данном случае $m = 1$, а $2^m \neq 2^k$. При этом исходное уравнение может быть записано в виде:

$$f = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

3. В данном случае возможны два варианта назначений функций Q_i:

$$\begin{cases} Q_0 = x_1; \\ Q_1 = x_1 \vee x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} Q_0 = x_1 \vee x_2; \\ Q_1 = x_1. \end{cases}$$

4. В первом случае

$$f = x_1 \vee x_2 \Phi;$$

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_0, Q_0, Q_1; x_4, x_3) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_4, x_3) = x_3 x_4.$$

Во втором случае

$$f = x_1 \vee x_2 !\Phi;$$

$$\mathrm{MX}(Q_1, Q_1, Q_1, Q_0; x_4, x_3) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi).$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$\Phi = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0; x_4, x_3) = !x_3 \vee !x_4.$$

Из изложенного следует, что в недекомпозированной форме заданная БФУ реализуется формулой $f = x_1 \vee x_2 x_3 x_4$.

В заключение раздела отметим, что в [49] приведена схема, аналогичная приведенной на рис.3.4, которая реализует конкретную БФУ пяти переменных при $n - k = 2$. Однако какой-либо математический аппарат для решения как этой задачи, так и в общем случае в этой работе отсутствует.

3.2.3. Использование карт декомпозиции при мультиплексорной декомпозиции

Пусть задана функция $f(x_1, \ldots, x_n)$. При фиксированном значении $n - k$ эта функция может быть записана в виде: $f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

По столбцу значений ТИ этой функции легко определить номенклатуру фрагментов $G_l(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ длиной 2^{n-k}. Пусть число типов фрагментов равно R_1.

Используя первые $n - k$ входных переменных для определения строк, а последние k входных переменных для определения столбцов, заполним по столбцу значений функции f карту декомпозиции [47]. Предположим, что эта карта имеет R_2 различных столбцов.

Если $R_1 < R_2$, то ТИ не преобразуется, а если $R_1 > R_2$, то по карте декомпозиции строится ТИ для БФУ $f(x_{k+1}, \dots, x_n, x_1, \dots, x_{n-k})$, столбец значений которой содержит R_2 различных фрагментов длиной 2^{n-k}, зависящих от переменных $x_1, \dots, x_{n-k}$.

Таким образом, по карте декомпозиции весьма просто определяется номенклатура фрагментов при любом значении $n - k$ для второго из возможных $n!$ вариантов расположения столбцов входных переменных в ТИ.

Пример 3.4. Для БФУ $f(x_1, x_2, x_3) = |0010 \ \ 0111|^T$, немонотонной по переменной x_3, определить: не является ли она монотонной по переменной x_1.

Построим карту декомпозиции при $k = 1$ (табл. 3.2).

Эта таблица не содержит столбца типа $!x_1$, и поэтому является

Таблица 3.2

x_1	x_2x_3			
	00	01	10	11
0	0	0	1	1
1	0	1	1	1

монотонной по переменной x_1. При этом $f(x_2, x_3, x_1) = |0001 \ \ 1111|^T$.

Пример 3.5. Для БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |0000 \ \ 0110 \ \ 1001 \ \ 1111|^T$$

построить разделительную декомпозицию при $n - k = 2$.

Вариант 1. Заданный столбец значений состоит из четырех типов фрагментов: $G_0 = 0$, $G_1 = x_3 \oplus x_4$, $G_2 = !(x_3 \oplus x_4)$, $G_3 = 1$. Назначим функции Q_i так, чтобы удовлетворялись отношения покрытия: $Q_0 \leqslant Q_1$, $Q_0 \leqslant Q_2$, $Q_0 \leqslant Q_3$, $Q_1 \leqslant Q_3$, $Q_2 \leqslant Q_3$. Эти соотношения выполняются, например, при $Q_0 = G_0$, $Q_1 = G_1$, $Q_2 = G_2$, $Q_3 = G_3$. Составим уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение в МФ имеет вид:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

При этом $\Phi_1 = x_1$, $\Phi_2 = x_2$.

Так как отношения покрытия выполняются, то из [48] следует, что

$$f = Q_0 \vee Q_1 \Phi_2 \vee Q_2 \Phi_1 \vee Q_3 \Phi_1 \Phi_2 .$$

Учитывая, что $Q_0 = 0,\ Q_1 = !Q_2 = Q,\ Q_3 = 1$, получим:

$$f = \Phi_1 !Q \vee \Phi_2 Q.$$

Вариант 2. Построим карту декомпозиции (табл. 3.3).

Таблица 3.3

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	10	11
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
10	1	0	0	1
11	1	1	1	1

Из этой карты следует, что

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \left| 0011\ \ 0101\ \ 0101\ \ 0011 \right|^T .$$

В данном случае имеется только два типа фрагментов: $G_0 = g_0 = g_3 = x_1$ и $G_1 = g_1 = g_2 = x_2$. Полагая $Q_0 = x_1,\ Q_1 = x_2$, запишем уравнение

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi) ,$$

которое в МФ имеет следующий вид:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_0; x_3, x_4) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi) .$$

При этом $\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_3, x_4) = x_3 \oplus x_4$, а $f = x_1 !\Phi \vee x_2 \Phi$.

Таким образом, использование карты декомпозиции позволило найти декомпозицию менее трудоемко.

Пример 3.6. Построить мультиплексорную декомпозицию при $n - k = 2$ для булевой функции

$$f(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \left| 0000\ \ 0000\ \ 0010\ \ 1010\ \ 1000\ \ 1111\ \ 1010\ \ 1111 \right|^T .$$

В данном случае $R = 5$ и $m = 3$. Попытаемся уменьшить значения R и m за счет построения карты декомпозиции (табл. 3.4).

Т а б л и ц а 3.4

x_4x_5	$x_1x_2x_3$							
	000	001	010	011	100	101	110	111
00	0	0	0	0	0	0	0	0
01	0	0	1	0	1	0	1	0
10	1	0	0	0	1	1	1	1
11	1	0	1	0	1	1	1	1

Из этой карты следует, что при записи БФУ в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= \left|0011\ \ 0000\ \ 0101\ \ 0000\ \ 0111\ \ 0011\ \ 0111\ \ 0011\right|^T,$$

$R = 4$, а $m = 2$. Полагая $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_5$, $Q_2 = x_4$, $Q_3 = x_4 \vee x_5$, выполняются отношения покрытия, и поэтому $f = x_4\Phi_1 \vee x_5\Phi_2$.

Для определения функций Φ_1 и Φ_2 составим уравнение в МФ:

$$\text{MX}(Q_2, Q_0, Q_1, Q_0, Q_3, Q_2, Q_3, Q_2; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$\Phi_1 = \text{MX}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee !x_2!x_3;$$

$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)!x_3.$$

3.2.4. Разложения Шеннона по крайним левым входным переменным

Разложение по крайней левой входной переменной. Если в соотношении (3.4) выбрать $m = k - 1$, $Q_0 = f(x_1 = 0) = f(0)$, $Q_1 = f(x_1 = 1) = f(1)$, то $\Phi = x_1$.

При этом

$$f = \text{MX}\big(f(0), f(1); x_1\big).$$

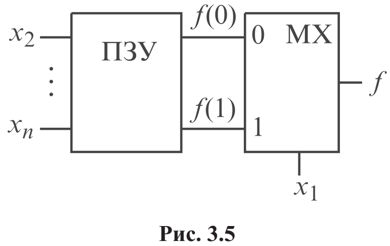

Рис. 3.5

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по крайней левой входной переменной. Стандартная схема, реализующая это соотношение, приведена на рис.3.5.

Разложение по *k* крайним левым входным переменным. Если в соотношении (3.4) выбрать $m = k$, $Q_0 = f(x_1 = 0, \ldots, x_k = 0) = f_0(X_1)$, $Q_1 = f(x_1 = 0, \ldots, x_k = 1) = f_1(X_1), \ldots, Q_{2^k-1} = f(x_1 = 1, \ldots, x_k = 1) = f_{2^k-1}(X_1)$, то функции Φ_j могут быть определены следующим образом:

$$\Phi_1 = x_1,\ \Phi_2 = x_2, \ldots,\ \Phi_k = x_k.$$

При этом

$$f = \text{MX}\left(f_0(X_1), f_1(X_1), \ldots, f_{2^k-1}(X_1); x_1, x_2, \ldots, x_k\right).$$

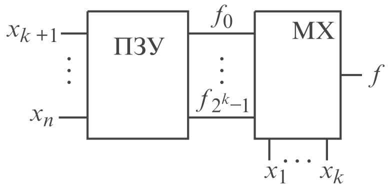

Рис. 3.6

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по *k* крайним левым входным переменным. Стандартная схема, реализующая это соотношение, приведена на рис. 3.6.

Разложение по *n* – 1 крайним левым входным переменным. Если в соотношении (3.4) выбрать $m = n - 1$, $Q_0 = f(x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0,\ x_n) = f_0(x_n), \ldots,\ Q_{2^{n-1}-1} = f(x_1 = 1, \ldots,\ x_{n-1} = 1,\ x_n) = f_{2^{n-1}-1}(x_n)$, то функции Φ_j могут быть определены следующим образом:

$$\Phi_1 = x_1,\ \Phi_2 = x_2, \ldots, \Phi_{2^{n-1}-1} = x_{n-1}.$$

При этом

$$f = \text{MX}(f_0(x_n), f_1(x_n), \ldots, f_{2^{n-1}-1}(x_n); x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

где $f_i(x_n) = \{0, 1, !x_n, x_n\}$.

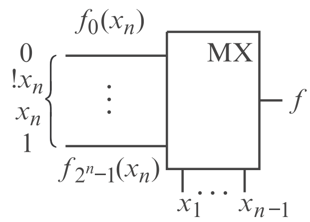

Рис. 3.7

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по $n-1$ крайним левым входным переменным. Стандартная схема, реализующая это соотношение, приведена на рис. 3.7.

Разложение по всем входным переменным. Если в соотношении (3.4) выбрать $m = n$, $Q_0 = f(x_1 = 0, \ldots, x_n = 0) = f_0, \ldots, Q_{2^n-1} = f(x_1 = 1, \ldots, x_n = 1) = f_{2^n-1}$, то функции Φ_j могут быть определены следующим образом:

$$\Phi_1 = x_1, \ldots, \Phi_{2^n-1} = x_n.$$

При этом

$$f = \mathrm{MX}(f_0, \ldots, f_{2^n-1}; x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ где } f_i = 0, 1.$$

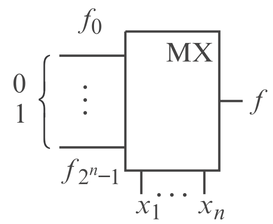

Рис. 3.8

Это соотношение может быть названо разложением Шеннона по всем входным переменным. Стандартная схема, реализующая это соотношение, приведена на рис. 3.8.

Методы реализации БФУ схемами, приведенными в этом разделе, хорошо известны и рассмотрены, например в [50].

3.2.5. Универсальные разложения булевых функций по крайним правым входным переменным

Разложение по крайней правой входной переменной. Рассмотрим соотношение

$$f = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2),$$

где $Q_i = \{0, 1, !x_n, x_n\}, Q_0 \neq Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$, а функции Φ_1 и Φ_2 не зависят от переменной x_n.

Покажем, что это соотношение порождает при различных назначениях функций Q_i все универсальные разложения произвольной БФУ на две остаточные функции по переменной x_n, причем каждое из них однотипно либо с разложением Шеннона, либо с одним из разложений Рида по этой переменной.

Тем самым доказывается, что не существует универсальных разложений по одной переменной, отличных от однотипных с разложениями Шеннона и Рида.

Для рассматриваемого случая существует 4! = 24 (! — символ операции «факториал») варианта назначений функций Q_i в рас-

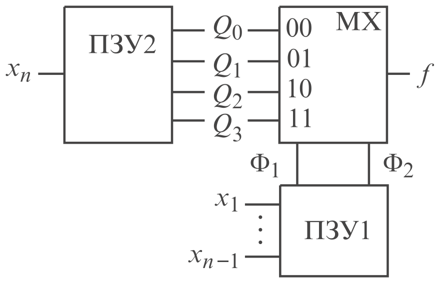

Рис. 3.9

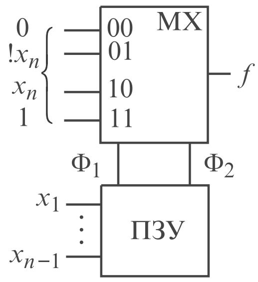

Рис. 3.10

сматриваемом соотношении, которому соответствует стандартная схема, приведенная на рис. 3.9. Эта схема может быть так же изображена, как показано на рис. 3.10.

Каждое из назначений приводит к определенной БФУ и соответствующей БФ (табл. 3.5).

Таблица 3.5

N	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	f	N	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	f
1	0	1	$!x_n$	x_n	$\Phi_2 \oplus \Phi_1 !x_n$	13	$!x_n$	0	1	x_n	$!\Phi_2 !x_n \vee \Phi_1 x_n$
2	0	1	x_n	$!x_n$	$\Phi_2 \oplus \Phi_1 x_n$	14	$!x_n$	0	x_n	1	$!\Phi_2 !x_n \oplus \Phi_1$
3	0	$!x_n$	1	x_n	$\Phi_1 \oplus \Phi_2 !x_n$	15	$!x_n$	1	0	x_n	$!\Phi_1 !x_n \vee \Phi_2 x_n$
4	0	$!x_n$	x_n	1	$\Phi_2 !x_n \vee \Phi_1 x_n$	16	$!x_n$	1	x_n	0	$!\Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_n$
5	0	x_n	1	$!x_n$	$\Phi_1 \oplus \Phi_2 x_n$	17	$!x_n$	x_n	0	1	$!\Phi_1 !x_n \oplus \Phi_2$
6	0	x_n	$!x_n$	1	$\Phi_1 !x_n \vee \Phi_2 x_n$	18	$!x_n$	x_n	1	0	$!\Phi_2 \oplus !\Phi_1 x_n$
7	1	0	$!x_n$	x_n	$!\Phi_2 \oplus \Phi_1 x_n$	19	x_n	0	1	$!x_n$	$\Phi_1 !x_n \vee !\Phi_2 x_n$
8	1	0	x_n	$!x_n$	$\Phi_1 !x_n \oplus !\Phi_2$	20	x_n	0	$!x_n$	1	$\Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_n$
9	1	$!x_n$	0	x_n	$!\Phi_1 \oplus \Phi_2 x_n$	21	x_n	1	0	$!x_n$	$\Phi_2 !x_n \vee !\Phi_1 x_n$
10	1	$!x_n$	x_n	0	$!\Phi_1 !x_n \vee !\Phi_2 x_n$	22	x_n	1	$!x_n$	0	$!\Phi_2 !x_n \oplus !\Phi_1$
11	1	x_n	0	$!x_n$	$\Phi_2 !x_n \oplus \Phi_1$	23	x_n	$!x_n$	0	1	$\Phi_2 \oplus !\Phi_1 x_n$
12	1	x_n	$!x_n$	0	$!\Phi_2 !x_n \vee !\Phi_1 x_n$	24	x_n	$!x_n$	1	0	$!\Phi_1 !x_n \oplus !\Phi_2$

Из рассмотрения этой таблицы следует, что восемь выражений в ней (4, 6, 10, 12, 13, 15, 19, 21) *PN*-однотипны с разложением Шеннона, восемь (2, 5, 7, 9, 16, 18, 20, 23) — *PN*-однотипны с разложением Рида по переменной x_n, а последние восемь (1, 3, 8, 11, 14, 17, 22,

24) — *PN*-однотипны с разложением Рида по переменной $!x_n$. Из изложенного следует, что не существует универсальных разложений на две остаточные функции, отличных от разложений Шеннона и Рида и *PN*-однотипных с ними, что до сих пор не было известно.

Каждое из этих выражений является универсальным, так как может использоваться в качестве образа декомпозиции произвольной булевой функции n переменных. Обратим внимание на тот факт, что при применении каждого из этих выражений существует единственный набор функций Φ_1 и Φ_2.

Пример 3.7. Используя строку 6 табл. 3.5, выполнить декомпозицию функции

$$f(x_1, x_2, x_4, x_3) = \left|0101 \;\; 0100 \;\; 0110 \;\; 0111\right|^T.$$

Составим уравнение $f = \Phi_1 ! x_3 \vee \Phi_2 x_3$ и запишем его в мультиплексной форме, применяя вместо функций Q_i их выражения:

$$\begin{aligned} &\mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_4) = \\ &\qquad = \mathrm{MX}(0, x_3, !x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2). \end{aligned}$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_4) = x_1 x_4;$$

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_4) = (!x_1 \oplus x_2) \vee !x_4.$$

Эта декомпозиция соответствует разложению Шеннона по переменной x_3, так как $f(x_3 = 0) = \Phi_1$, $f(x_3 = 1) = \Phi_2$. При этом $f = x_1 x_4 ! x_3 \vee \big((!x_1 \oplus x_2) \vee !x_4\big) x_3$.

Пример 3.8. Используя строку 21 табл. 3.5, выполнить декомпозицию функции, рассмотренной в предыдущем примере.

В этом случае $f = \Phi_2 ! x_3 \vee ! \Phi_1 x_3$, и поэтому

$$\begin{aligned} &\mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_4) = \\ &\qquad = \mathrm{MX}(x_3, 1, 0, !x_3; \Phi_1, \Phi_2); \end{aligned}$$

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0; x_1, x_2, x_4) = (x_1 \oplus x_2) x_4;$$

$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_4) = x_1 x_4.$$

Эта декомпозиция однотипна с разложением Шеннона по переменной x_3. При этом $f = x_1 x_4 ! x_3 \vee ! \big((x_1 \oplus x_2) x_4\big) x_3$.

Пример 3.9. Применяя строку 1 табл. 3.5, выполнить декомпозицию функции, рассмотренной в примере *3.7.*

В этом случае $f = \Phi_2 \oplus \Phi_1 ! x_3$, и поэтому

$$\mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_4) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, 1, !x_3, x_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_4) = !x_2 \vee !x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_4) = (!x_1 \oplus x_2) \vee !x_4.$$

Эта декомпозиция однотипна с разложением Рида по переменной $!x_3$, так как $f(x_3 = 1) = \Phi_2$, $f(x_3 = 0) \oplus f(x_3 = 1) = \Phi_1$. При этом $f = \big((!x_1 \oplus x_2) \vee !x_4\big) \oplus (!x_2 \vee !x_4)!x_3$.

Пример 3.10. Используя строку 5 табл. 3.5, выполнить декомпозицию функции, рассмотренной в примере *3.7.*

В этом случае $f = \Phi_1 \oplus \Phi_2 x_3$, и поэтому

$$\mathrm{MX}(x_3, x_3, x_3, 0, x_3, !x_3, x_3, 1; x_1, x_2, x_4) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_3, 1, !x_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_4) = x_1 x_4;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0; x_1, x_2, x_4) = !x_2 \vee !x_4.$$

Эта декомпозиция является разложением Рида по переменной x_3. В ней в отличие от предыдущих обе остаточные функции зависят от двух переменных. При этом $f = x_1 x_4 \oplus (!x_2 \vee !x_4) x_3$.

Пример 3.11. Применяя строку 20 табл. 3.5, выполнить декомпозицию функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0011\ \ 0010\ \ 0110\ \ 0111\right|^T.$$

В этом случае $f = \Phi_1 \oplus !\Phi_2 x_4$, и поэтому

$$\mathrm{MX}(0, 1, 0, !x_4, x_4, !x_4, x_4, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(x_4, 0, !x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = !x_1 \oplus x_2 x_3.$$

Таким образом, $f = x_3 \oplus (!x_1 \oplus x_2 x_3) x_4$.

Булевы формулы, полученные в двух последних примерах, либо минимальны по числу букв, либо отличаются от минимальной не более чем на одну букву. При этом отметим, что БФУ для них существенно зависят от всех своих переменных, а их столбцы значений содержат четное число единиц и поэтому они не могут быть реализованы БФ, бесповторными в базисе $\{\&, \vee, !\}$.

Из изложенного следует, что ответ на вопрос о нахождении простейшей декомпозиции при разложении по последней переменной, как и обычно в логическом проектировании [11], остается открытым, так как этот ответ в общем случае связан с полным перебором по порядку расположения входных переменных в ТИ и назначением функций Q_i. Достоинство предлагаемого подхода состоит в том, что он позволяет весьма просто, с единых позиций проводить как разложение Шеннона, так и разложение Рида, а также разложения, однотипные с ними, что до сих пор не было известно.

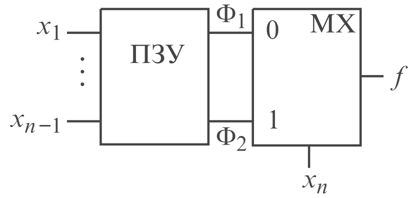

Рис. 3.11

Однако ответ на вопрос, «при каком назначении функций Q_i разложение по последней переменной наименее трудоемко?», находится в строке 6 табл. 3.5, так как при этом схема на рис. 3.10 трансформируется и резко упрощается, превращаясь в схему на рис. 3.11, структура которой аналогична структуре схемы на рис. 3.5, соответствующей разложению Шеннона по крайней левой входной переменной.

Для нахождения функций Φ_1 и Φ_2 (рис. 3.11) по заданной БФУ предлагается простой метод, состоящий в распаковывании (распределении) ее столбца значений. При этом функция Φ_1 (Φ_2) образует-

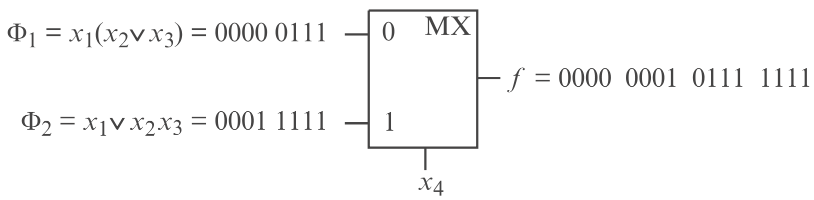

Рис. 3.12

ся из значений функции f, расположенных на четных (нечетных) позициях.

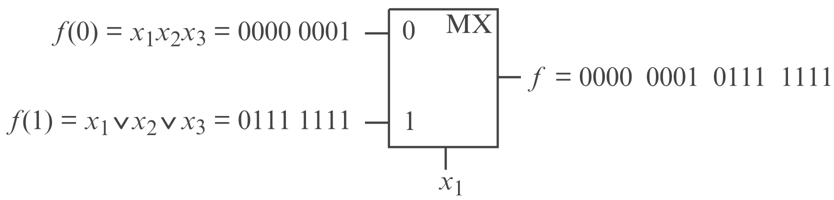

Рис. 3.13

Пример 3.12. Разложить по переменной x_4 булеву функцию

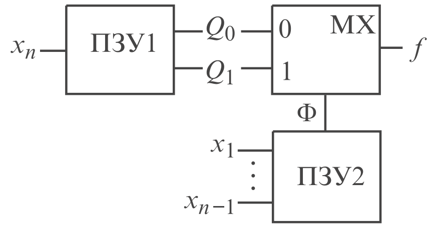

Рис. 3.14

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |0000\ \ 0001\ \ 0111\ \ 1111|^T .$$

Искомое разложение приведено на рис. 3.12.

Традиционное разложение этой функции по переменной x_1 приведено на рис. 3.13.

Отметим, что если функция f содержит только два типа фрагментов длиной два, то стандартная схема на рис. 3.9 упрощается и превращается в схему на рис. 3.14.

Разложение по двум и более крайним правым входным переменным. Для построения стандартной схемы, обеспечивающей декомпозицию произвольной БФУ по функциям Q_i, зависящим от $n - k$ крайних правых переменных, множество этих функций должно состоять из всех функций $n - k$ переменных. При этом для $n - k = 2$ справедливо соотношение

$$f = \mathrm{MX}\big(Q_0(X_1), \ldots, Q_{15}(X_1);$$
$$\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0), \Phi_3(X_0), \Phi_4(X_0)\big),$$

где $X_0 = \{x_1, \ldots, x_{n-2}\}$, $X_1 = \{x_{n-1}, x_n\}$, а для $n - k = 3$ справедливо соотношение

$$f = \mathrm{MX}\big(Q_0(X_1), \ldots, Q_{255}(X_1); \Phi_1(X_0), \ldots, \Phi_8(X_0)\big),$$

где $X_0 = \{x_1, \ldots, x_{n-3}\}$, $X_1 = \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$.

Сложность последнего выражения, а тем более выражений для $n - k \geqslant 3$, привела к тому, что в [49] был рассмотрен только один пример для случая $n - k = 2$. В этой работе вместо МФ использовалось весьма громоздкое выражение вида:

$$f = \bigvee_{i=0}^{15} Q_i(X_1)\,\widetilde{\Phi}_1(X_0)\,\widetilde{\Phi}_2(X_0)\,\widetilde{\Phi}_3(X_0)\,\widetilde{\Phi}_4(X_0)\,,$$

где «~» — символ прямой или инверсной переменной (функции).

Для этого выражения в [49] было отмечено, что если функции $Q_i(X_1)$ зафиксировать, то нахождение декомпозиции сводится к

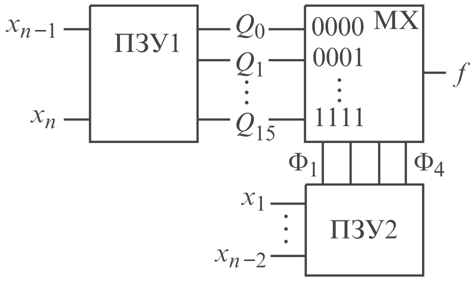

Рис. 3.15

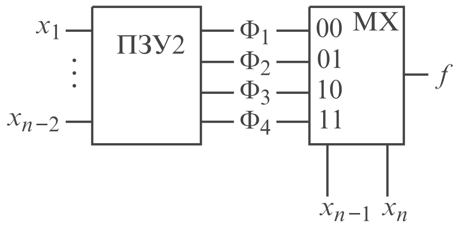

Рис. 3.16

определению функций $\Phi_j(X_0)$. Однако как выполнить фиксацию функций $Q_i(X_1)$, в этой работе не было предложено.

Решим этот вопрос сначала для $n - k = 2$, а затем и в общем случае.

Стандартная схема для $n - k = 2$, являющаяся частным случаем схемы на рис. 3.1, приведена на рис. 3.15. Автором был отмечен у д и в и т е л ь н ы й факт, состоящий в том, что среди 16! вариантов назначений 16 функций двух переменных Q_i на 16 входов мультиплексора «16 в 1» имеется один вариант, который приводит к замене этой схемы на существенно более простую стандартную схему (рис. 3.16).

Упрощение схемы на рис. 3.15 достигается в том случае, если функции Q_i на входах MX расположить так, чтобы для каждой из них столбец значений совпадал с двоичным адресом входа MX, к которому эта функция подключена. При этом приведенное выше соотношение для $n - k = 2$ также резко упрощается и приобретает вид:

$$f = \text{MX}\big(\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0), \Phi_3(X_0), \Phi_4(X_0); x_{n-1}, x_n\big).$$

Таким образом, рассмотренная выше декомпозиция функции f

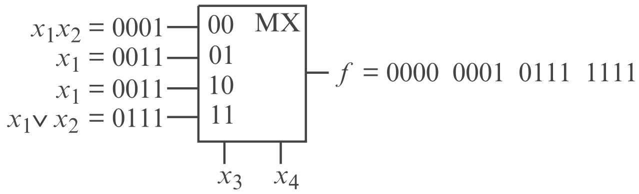

Рис. 3.17

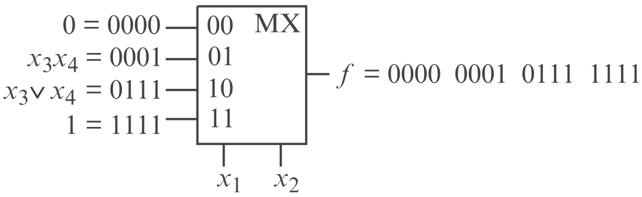

Рис. 3.18

свелась к ее разложению по двум крайним правым переменным — x_{n-1} и x_n. Предложим простейший способ определения функций Φ_j для БФУ, заданной ТИ: столбец значений этой функции «распределяется» так, что столбцы значений функций Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 образуются из значений функции f с номерами 0, 4, 8, 12, ...; 1, 5, 9, 13, ...; 2, 6, 10, 14, ...; 3, 7, 11, 15, ... соответственно.

Пример 3.13. Разложить по двум последним переменным БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |0000\ \ 0001\ \ 0111\ \ 1111|^T.$$

Искомое разложение приведено на рис. 3.17.

Традиционное разложение Шеннона при табличном задании БФУ приведено на рис. 3.18.

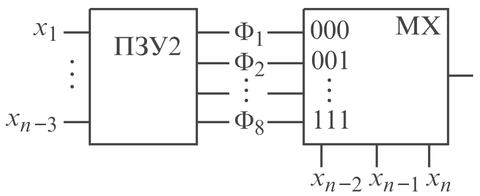

Рис. 3.19

Таким образом, при применении предлагаемого и известного подходов появляется возможность по заданной ТИ без изменения порядка входных переменных в ней получить два решения и выбрать простейшее, что до сих пор было не известно.

Рассмотренный подход, осуществляющий замену декомпозиции на разложение по крайним правым переменным, справедлив также и для произвольных значений $n - k$:

$$f = \mathrm{MX}\left(\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0), \ldots, \Phi_{2^{n-k}}(X_0); x_{k+1}, \ldots, x_n\right).$$

При $n - k = 3$ предлагаемый подход позволяет в стандартной схеме, получаемой из схемы на рис. 3.1, исключить ПЗУ1 с тремя входами и 256 выходами и заменить MX «256 в 1» на MX «8 в 1» (рис. 3.19).

При разложении по $n - k$ последним переменным столбец значений заданной БФУ «распределяется» на 2^{n-k} функций по аналогии с тем, как это было изложено для $n - k = 1, 2$.

3.3. Использование мультиплексорной декомпозиции при реализации булевых функций

В разд. 3.2 для заданной БФУ при фиксированном значении k определялась декомпозиция по образу мультиплексорной функции относительно переменных Q_i и Φ_j. При этом после нахождения функций Q_i появлялась возможность определения образа декомпозиции относительно переменных Φ_j. Эта задача всегда имеет решение для произвольной БФУ, причем оно в общем случае не является единственным.

Теоретический и практический интерес представляет еще ряд задач:

— задан образ декомпозиции и требуется декомпозировать заданную БФУ по этому образу (определить функции Φ_j);

— задана порождающая функция (ПФ) модуля и требуется декомпозировать БФУ по образу ПФ;

— задана ПФ модуля и требуется декомпозировать БФУ по образу ПФ так, чтобы функции Φ_j обладали определенными свойствами;

— задана ПФ модуля и требуется реализовать БФУ в базисе заданного модуля;

— задана ПФ модуля и требуется реализовать БФУ в базисе заданного модуля так, чтобы число модулей в схеме было минимизировано.

Сложность решения этих задач увеличивается от первой задачи к пятой. При этом отметим, что решение третьей задачи не всегда существует. Так, например, в [42] показано, что существуют БФУ, для которых простая мажоритарная декомпозиция не может быть построена.

В настоящей работе предлагается единый подход к решению этих задач. Этот подход может быть использован также и для случая применения разнотипных модулей.

3.3.1. Декомпозиция булевых функций по заданному образу

Пусть образ декомпозиции задан БФ вида:

$$F = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_m, X_1).$$

Задача декомпозиции БФУ $f(x_1, \ldots, x_k, X_1)$ по заданному образу может быть сведена к решению относительно переменных $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ логического уравнения

$$f(x_1, \ldots, x_k, X_1) = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_m, X_1).$$

Решение этого уравнения, если оно существует, в общем случае имеет вид:

$$\Phi_1 = f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, \Phi_m = f_m(x_1, \ldots, x_k).$$

Предлагаемый метод состоит из следующих этапов:

— заданный образ декомпозиции записывается в МФ

$$F = \text{МХ}\left(Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1); \Phi_1, \ldots, \Phi_m\right),$$

в которой функции Q_i могут быть одинаковыми;

— определяется возможность записи декомпозируемой БФУ в виде:

$$f = \text{МХ}\left(f_0(X_1), \ldots, f_{2^k-1}(X_1); x_1, \ldots, x_k\right),$$

где $f_t(X_1) = \{Q_0(X_1), \ldots, Q_{2^m-1}(X_1)\}$;

— если БФУ записать в таком виде не удается, то искомая декомпозиция отсутствует;

— если указанная форма представления БФУ существует, то исходное логическое уравнение записывается в МФ:

$$\begin{gathered} 2^k \\ \text{МХ}\left(Q_q(X_1), \ldots, Q_l(X_1); x_1, \ldots, x_k\right) = \\ = \text{МХ}\left(f_0(X_1), \ldots, f_{2^m-1}(X_1); \Phi_1, \ldots, \Phi_m\right), \end{gathered}$$

где $q, \ldots, l = \{0, \ldots, 2^m - 1\}$.

Это уравнение всегда имеет решения, число которых при его записи в явной форме определяется соотношением

$$r = P_0^{t_0} P_1^{t_1}, \ldots, P_{2^m-1}^{t_{2^m-1}},$$

где P_i — число функций $Q_i(X_1)$ в правой части уравнения; t_i — число функций $Q_i(X_1)$ в левой части уравнения.

Из этого соотношения следует, что если все функции Q в правой части уравнения различны, то решение единственно. При наличии нескольких решений среди них может быть выбрано одно, обладающее требуемыми свойствами. Предлагаемый подход, по крайней мере теоретически, позволяет проводить декомпозицию произвольной БФУ по произвольному образу. При $X_1 = 0$ декомпозиция всегда существует, но ее нахождение в случае, когда функции Φ_j должны обладать заданными свойствами, связано с огромным перебором.

Пример 3.14. Декомпозировать БФУ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3$ по образу $F(\Phi, x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3$.

Запишем уравнение

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = \Phi(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Запишем функцию F в МФ:

$$F = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi),$$

где $Q_0 = x_1 x_2 x_3$, $Q_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

В силу того что функция f не содержит фрагментов Q_0 и Q_1, исходное уравнение не имеет решения.

Пример 3.15. Декомпозировать БФУ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3$ по образу $F(\Phi_1, \Phi_2, F(\Phi_1, \Phi_2, x_2, x_3) x_2, x_3) = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_2 \vee x_3) \vee \vee \Phi_2 x_2 x_3$.

Запишем уравнение

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_2 \vee x_3) \vee \Phi_2 x_2 x_3 .$$

Запишем это уравнение в МФ:

$$\mathrm{MX}(x_2 x_3, x_2 \vee x_3; x_1) = \mathrm{MX}(0, x_2 x_3, x_2 \vee x_3, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0; x_1) = !x_1 .$$

Пример 3.16. Декомпозировать БФУ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# x_3$ по образу $F(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = \Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \Phi_4) \vee \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4$.

Запишем уравнение

$$x_1 \# x_2 \# x_3 = \Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \Phi_4) \vee \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 .$$

Запишем это уравнение в МФ:

$$\text{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это уравнение имеет огромное число решений $8^4 \cdot 8^4 = 8^8$.

Среди этих решений, естественно, имеется и решение, найденное без перебора в предыдущем примере:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 ;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = !x_1 ;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_2 ;$$
$$\Phi_4 = \text{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_3 .$$

3.3.2. Декомпозиция булевых функций в базисе заданного модуля

До проведения декомпозиции в этом случае необходимо сначала исследовать функциональные возможности модуля в части допустимых образов декомпозиции, а затем при максимально возможной величине $n - k$ выбрать для заданной БФУ ее образ и, если он существует, выполнить по нему декомпозицию с помощью метода, изложенного в предыдущем разделе.

Рассмотрим вопрос об исследовании функциональных возможностей заданного модуля. В [48] был предложен метод построения настраиваемых модулей, состоящий в том, что для N заданных БФУ, существенно зависящих от n переменных, в порождающую функцию (ПФ) модуля объединялись все разнотипные фрагменты Q_i длиной 2^{n-1}, образующие столбцы значений ТИ этих функций, причем все эти ТИ были записаны при одном и том же порядке переменных. При этом было предложено ПФ модуля строить в виде

$$F = \text{MX}\big(Q_0(x_2, \ldots, x_n), \ldots, Q_{R-1}(x_2, \ldots, x_n); z_1, \ldots, z_m\big),$$

где R — число разнотипных фрагментов; $m =]\log R[$.

Такой модуль при настройке $z_i = \{0, 1, !x_1, x_1\}$ может реализовать любую из N заданных функций, «собирая» ее из двух фрагментов.

Поэтому, памятуя поговорку, «что посеешь, то и пожнешь», естественным образом следует ожидать, что с помощью метода, изложенного в предыдущем разделе, можно декомпозировать только такие БФУ, столбцы значений которых образованы фрагментами Q_i, заложенными в ПФ модуля. Однако применительно к настраиваемым модулям имеет место ситуация, при которой «сжать можно больше, чем посеять», что позволяет расширить класс БФУ, декомпозируемых с помощью рассматриваемого модуля. Например, порождающая функция модуля $F = a(b \vee c \vee d) \vee bcd$ в [48] строилась в результате объединения разнотипных фрагментов длиной четыре ($n - k = 2$) для представителей *PN*-типов пороговых функций трех переменных. Таким образом, этот модуль предполагалось использовать для построения декомпозиций по следующему образу:

$$F = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_{n-1} \vee x_n) \vee \Phi_2 x_{n-1} x_n,$$

который в МФ имеет вид:

$$F = \mathrm{MX}(0, x_{n-1} x_n, x_{n-1} \vee x_n, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Однако этой ПФ соответствуют еще три образа декомпозиции:
— при $n - k = 0$

$$F = \Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \Phi_4) \vee \Phi_2\Phi_3\Phi_4 =$$
$$= \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4);$$

— при $n - k = 1$

$$F = \Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee x_n) \vee \Phi_2 \Phi_3 x_n =$$
$$= \mathrm{MX}(0, 0, 0, x_n, x_n, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3);$$

— при $n - k = 3$

$$F = \Phi(x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n) \vee x_{n-2} x_{n-1} x_n =$$
$$= \mathrm{MX}(x_{n-2} x_{n-1} x_n, x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n; \Phi),$$

которые расширяют класс положительно монотонных БФУ, декомпозируемых с помощью этого модуля. Из приведенных соотношений следует, что если декомпозируемая функция *f* при фиксированном $n - k$ состоит из фрагментов, входящих в мультиплексорную форму образа декомпозиции, то при $n - k = 0$ существует восемь в степени 2^n решений; при $n - k = 1$ — $3^{t_0} \cdot 3^{t_1} \cdot 2^{t_2}$ решений; при $n - k$ = = 2, 3 — единственное решение. При этом отметим, что в общем случае при $n - k = 3$ $\Phi = f(x_1, \ldots, x_{n-3})$; при $n - k = 2$ $\Phi_j = f_j(x_1, \ldots, x_{n-2})$; при $n - k = 1$ $\Phi_j = f_j(x_1, \ldots, x_{n-1})$; при $n - k = 0$ $\Phi_j = f_j(x_1, \ldots, x_n)$.

Отсюда следует, что простейшую декомпозицию по критерию гарантированной зависимости функций $Ф_j$ от минимального числа переменных следует искать при максимально возможной величине $n - k$, что ограничивает или исключает перебор. Если при некотором значении $n - k$ декомпозиция найдена, то это не исключает того, что, уменьшая величину $n - k$ за счет увеличения перебора (числа решений), может быть найдено и более простое, например по числу букв, решение. При этом отметим, что среди этих решений находятся также и все решения, найденные при бóльших значениях $n - k$.

Из изложенного следует, что эффективное использование модуля связано с исследованием его функциональных возможностей в части определения всех образов декомпозиции, которые он порождает.

Будем называть образы декомпозиции, получаемые в результате замены входных переменных в ПФ переменными x_i и $Ф_j$, основными функциональными возможностями модуля. Полное исследование основных функциональных возможностей модуля может быть выполнено только при учете всех допустимых перестановок несимметричных входных переменных в таблице истинности ПФ модуля, что связано с перебором. Исследование дополнительных возможностей модуля осуществляется при условии, что кроме прямых переменных доступны также и их инверсии.

При этом для рассматриваемого модуля, в частности, удается установить, что он позволяет при $n - k = 1$ декомпозировать отрицательно монотонные функции, применяя уравнение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = Ф_1(Ф_2 \vee Ф_3 \vee !x_n) \vee Ф_2 Ф_3 !x_n,$$

которое в «полумультиплексорной» форме имеет вид:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{MX}(0, 0, 0, !x_n, !x_n, 1, 1, 1; Ф_1, Ф_2, Ф_3).$$

Пример 3.17. Декомпозировать по ПФ рассматриваемого модуля булеву функцию

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0001\ \ 0101\ \ 0101\ \ 0111\right|^T.$$

Из рассмотрения столбца значений БФУ следует, что она не может быть декомпозирована при $n - k = 3, 2$, так как при этих значениях она содержит «запрещенные» для соответствующих декомпозиций фрагменты. Так как при $n - k = 1$ все фрагменты длиной два разрешены, то искомую декомпозицию будем определять в результате решения уравнения

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = Ф_1(Ф_2 \vee Ф_3 \vee x_4) \vee Ф_2 Ф_3 x_4,$$

которое в МФ имеет вид:

$$\text{MX}(0, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, x_4, 1; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(0, 0, 0, x_4, x_4, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3).$$

Это уравнение имеет $3^1 \cdot 3^1 \cdot 2^6 = 576$ решений, среди которых отсутствуют такие, в которых все функции Φ_j равны переменным. Однако среди этих решений существует такое, в котором две функции Φ_j равны переменным:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \# x_2 \# !x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_3;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

Если уменьшить величину $n - k$ до нуля, то

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi_1(\Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \Phi_4) \vee \Phi_2\Phi_3\Phi_4;$$
$$\text{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4).$$

Это уравнение имеет огромное число решений, равное 8^{16}, среди которых содержится простейшее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_4;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1;$$
$$\Phi_3 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_2;$$
$$\Phi_4 = \text{MX}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_3.$$

Пример 3.18. Декомпозировать по ПФ рассматриваемого модуля БФУ из предыдущего примера, записав ее при другом порядке переменных:

$$f(x_4, x_1, x_2, x_3) = \left|0000\ \ 0001\ \ 0111\ \ 1111\right|^T.$$

В этом случае минимальное решение может быть найдено уже при $n - k = 3$:

$$f(x_4, x_1, x_2, x_3) = \Phi(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3;$$
$$\text{MX}(x_1 x_2 x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3; x_4) = \text{MX}(x_1 x_2 x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3; \Phi).$$

Это уравнение имеет единственное решение $\Phi = x_4$.

Из рассмотренных примеров следует, что для построения простейшей декомпозиции функции f по ПФ модуля возможны два подхода:

— исследование основных и дополнительных функциональных возможностей модуля и перебор по порядку расположения входных переменных в ТИ заданной функции f;

— однократное исследование всех функциональных возможностей модуля, основанное на переборе входных переменных в ТИ порождающей функции модуля, и исключение перебора в ТИ заданной функции.

При «ручной» декомпозиции первый подход следует применять для достаточно сложных модулей, у которых ПФ несимметричны и зависят от пяти и более переменных. Для простых модулей, порождающие функции которых симметричны или не зависят более чем от четырех переменных, более целесобразен второй подход.

Исследование основных функциональных возможностей модуля осуществляется за счет определения мультиплексорной формы представления ПФ модуля при $n - k = 0, 1, ..., m - 1$, где m — число входов модуля. Полное исследование основных возможностей модуля выполняется следующим образом:

— используя m входных переменных, строится исходная таблица истинности для ПФ модуля;

— по исходной ТИ за счет изменения порядка входных переменных строятся новые ТИ, столбцы значений которых отличаются и между собой, и от столбца значений исходной ТИ. Пусть, например, число ТИ с различными столбцами значений равно M;

— в каждой из M таблиц истинности выполняется замена кортежа входных переменных на кортеж новых переменных $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$. При этом строятся M порождающих функций $F_1(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, … , $F_M(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, имеющих различные столбцы значений. Этим порождающим функциям соответствует «сборка» реализуемой БФУ из фрагментов длиной $2^0 = 1\,(n - k = 0)$. Так как при перестановке входных переменных номенклатура фрагментов длиной один не изменяется, то из этих функций бывает целесообразно использовать только функцию $F_1(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$;

— в каждой из M таблиц истинности выполняется замена кортежа входных переменных на кортеж новых переменных $\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}, x_n$. При этом строятся M порождающих функций $F_1(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}, x_n)$, … , $F_M(\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}, x_n)$, имеющих различные столбцы значений. Этим ПФ соответствует «сборка» реализуемой БФУ из фрагментов длиной 2^1, зависящих от переменной $x_n\,(n - k = 1)$.

Эти соотношения могут быть названы декомпозицией по функциям $\Phi_1, \ldots, \Phi_{m-1}$, или разложением по одной (последней) переменной x_n.

Разложение по функции $Q(X_1)$ в этом случае строится при замене в этих соотношениях переменной x_n на эту функцию. Для рассмотренных ПФ бывает целесообразным применять только те из них, которые различаются номенклатурой фрагментов длиной два. Например, функции $F_1 = (!\Phi_1 \oplus \Phi_2) x_n$ соответствует столбец значений с двумя типами фрагментов длиной два, а функциям $F_2 = (!\Phi_2 \oplus x_n)\Phi_1$ и $F_3 = (!\Phi_1 \oplus x_n)\Phi_2$ соответствуют различные столбцы значений с тремя одинаковыми типами фрагментов длиной два;

— увеличение величины $n - k$ продолжается до тех пор, пока не выполнится условие $n - k = m - 1$. При этом могут быть построены M порождающих функций $F_1(\Phi, x_{n-m+2}, \dots, x_n)$, …, $F_M(\Phi, x_{n-m+2}, \dots, x_n)$, имеющих различные столбцы значений. Этим ПФ соответствует «сборка» реализуемой БФУ из фрагментов длиной 2^{m-1}, зависящих от переменных $x_{n-m+2}, \dots, x_n$.

На этом завершается исследование основных возможностей модуля. Исследование дополнительных возможностей не проводится при $n - k = 0$, а также при $n - k = 1$, если столбец значений образа декомпозиции содержит все четыре типа фрагментов длиной два: 0, 1, $!x_n$, x_n. Исследование дополнительных возможностей в остальных случаях может быть заменено определением однотипности фрагментов заданной функции f и рассматриваемого образа декомпозиции при выбранном значении $n - k$. При этом при подстановке фрагментов функции f в мультиплексорную форму образа декомпозиции получаемая формула должна быть N-однотипной с булевой формулой образа.

Пример 3.19. Определить возможность декомпозиции при $n - k = 2$ по ПФ рассматриваемого модуля для БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ \ 0100\ \ 0111\ \ 1111\right|^T.$$

Составим выражение $F_1 = \mathrm{MX}(0, !x_3 x_4, x_3 \vee x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2)$. Так как формула $F_1 = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee \Phi_2 !x_3 x_4$ не является N-однотипной с ПФ модуля $F = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee \Phi_2 x_3 x_4$, то искомая декомпозиция не может быть построена.

Пример 3.20. Определить возможность декомпозиции при $n - k = 2$ по ПФ рассматриваемого модуля для БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0000\ \ 0100\ \ 1101\ \ 1101\right|^T.$$

Составим выражение $F_1 = \mathrm{MX}(0, !x_3 x_4, !x_3 \vee x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2)$. Так как формула $F_1 = \Phi_1(\Phi_2 \vee !x_3 \vee x_4) \vee \Phi_2 !x_3 x_4$ является N-однотипной с ПФ модуля $F = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_3 \vee x_4) \vee \Phi_2 x_3 x_4$, то искомая декомпозиция может быть построена:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi_1(\Phi_2 \vee !x_3 \vee x_4) \vee \Phi_2 !x_3 x_4;$$

$$\text{MX}(0, !x_3 x_4, !x_3 \vee x_4, !x_3 \vee x_4; x_1, x_2) =$$
$$= \text{MX}(0, !x_3 x_4, !x_3 \vee x_4, 1; \Phi_1, \Phi_2);$$

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1;$$

$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2.$$

3.3.3. Мультиплексорный метод реализации булевых функций

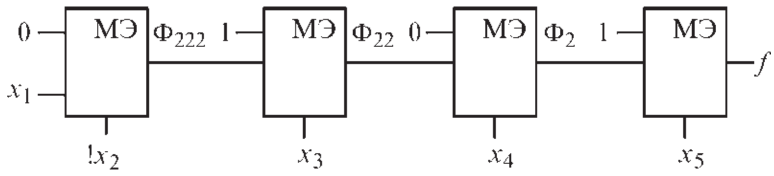

Рис. 3.20

Этот метод базируется на:

— исследовании функциональных возможностей применяемого элемента в части образов декомпозиции, которые он порождает;

— мультиплексорном разложении заданной БФУ по одному из образов декомпозиции, порождаемому элементом;

— мультиплексорной декомпозиции заданной БФУ с последующей реализацией образа декомпозиции и остаточных функций схемами из используемых элементов, которые строятся на основе мультиплексорного разложения.

В зависимости от свойств применяемого элемента этот метод может дополняться и другими приемами, упрощающими реализацию. Метод в отличие от формульного метода позволяет использовать повторность ПФ и ее остаточных.

Пример 3.21. Реализовать булеву функцию

$$f(x_1, \ldots, x_5) = |0101\ 0111\ 0101\ 0111\ 0111\ 0111\ 0101\ 0111|^T$$

схемой из трехвходовых мажоритарных элементов.

Эта БФУ содержит нечетное число единиц, что является необходимым условием бесповторности. Она реализуется ББФ $f = (x_1 !x_2 \vee \vee x_3) x_4 \vee x_5$.

1. Бесповторная каскадная схема, построенная формульным методом, приведена на рис. 3.20.

2. Так как заданная БФУ монотонна по переменной x_5, то выполним мажоритарное разложение по этой переменной:

$$f(x_1, \dots, x_5) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# x_5;$$
$$\mathrm{MX}(x_5, x_5, x_5, 1, x_5, x_5, x_5, 1, x_5, 1, x_5, 1, x_5, x_5, x_5, 1;$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{MX}(0, x_5, x_5, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет $2^{11} = 2048$ решений, одно из которых следующее:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3, x_4) = 1;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= (x_1 ! x_2 \vee x_3) x_4 .$$

Функция Φ_2 монотонна по переменной x_4, и поэтому

$$\Phi_2(x_1, \dots, x_4) = \Phi_{21} \# \Phi_{22} \# x_4;$$
$$\mathrm{MX}(0, x_4, 0, x_4, x_4, x_4, 0, x_4; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(0, x_4, x_4, 1; \Phi_{21}, \Phi_{22}).$$

Это уравнение имеет 32 решения, одно из которых следующее:

$$\Phi_{21} = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; x_1, x_2, x_3) = 0;$$
$$\Phi_{22} = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 ! x_2 \vee x_3 .$$

Функция Φ_{22} монотонна по переменной x_3, и поэтому

$$\Phi_{22}(x_1, x_2, x_3) = \Phi_{221} \# \Phi_{222} \# x_3;$$
$$\mathrm{MX}(x_3, x_3, 1, x_3; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; \Phi_{221}, \Phi_{222}).$$

Это уравнение имеет восемь решений, одно из которых следующее:

$$\Phi_{221} = \mathrm{MX}(1, 1, 1, 1; x_1, x_2) = 1;$$
$$\Phi_{222} = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 ! x_2 .$$

Функция Φ_{222} монотонна по переменной $!x_2$, и поэтому

$$\Phi_{222}(x_1, x_2) = \Phi_{2221} \# \Phi_{2222} \# !x_2;$$
$$\mathrm{MX}(0, !x_2; x_1) = \mathrm{MX}(0, !x_2, !x_2, 1; \Phi_{2221}, \Phi_{2222}).$$

Это уравнение имеет два решения, одно из которых следующее:

$$\Phi_{2221} = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_{2222} = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1 .$$

В результате изложенного получается бесповторная каскадная схема (рис. 3.20), которая построена формульным методом существенно менее трудоемко. Однако формульный метод в данном случае по заданной формуле позволяет построить только одну схему, в то время как мультиплексорный метод, используя таблицу истинности, позволяет даже без перестановки столбцов входных переменных в ней получать большое число решений (схем).

Пример 3.22. Реализовать БФ $f = x_1(x_2 x_3 \vee x_4 x_5)$ схемой из 3-универсальных модулей, структура каждого из которых описывается булевой формулой

$$F(a, b, c, d) = a(b \vee c \vee d) \vee bcd = \left|0000\ \ 0001\ \ 0111\ \ 1111\right|^T.$$

По формуле f построим ТИ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= \left|0000\ \ 0000\ \ 0000\ \ 0000\ \ 0001\ \ 0001\ \ 0001\ \ 1111\right|^T.$$

При $n - k = 2$ предположим, что $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_4 x_5$, $Q_2 = x_4 \vee x_5$, $Q_3 = 1$, и запишем уравнение:

$$x_1(x_2 x_3 \vee x_4 x_5) = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_4 \vee x_5) \vee \Phi_2 x_4 x_5;$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_0, Q_0, Q_0, Q_1, Q_1, Q_1, Q_3; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет единственное решение:

$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1.$$

Для реализации функции Φ_1 вновь запишем и решим уравнение при $n - k = 2$, которое также имеет единственное решение:

$$x_1 x_2 x_3 = \Phi_{11}(\Phi_{21} \vee x_2 \vee x_3) \vee \Phi_{21} x_2 x_3;$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_{11}, \Phi_{21});$$
$$\Phi_{11} = \mathrm{MX}(0, 0; x_1) = 0;$$
$$\Phi_{21} = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1.$$

Таким образом, заданная БФ с помощью мультиплексорного метода, использующего на каждом шаге разделительную декомпозицию, реализуется неразделительной (повторной) схемой из двух модулей:

$$\Phi = 0(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3,$$
$$f = \Phi(x_1 \vee x_4 \vee x_5) \vee x_1 x_4 x_5.$$

При применении формульного метода эта БФ реализуется бесповторной схемой из трех модулей:

$$f_1 = 0(1 \vee x_2 \vee x_3) \vee 1x_2x_3 = x_2x_3,$$
$$f_2 = f_1(1 \vee x_4 \vee x_5) \vee 1x_4x_5 = f_1 \vee x_4x_5,$$
$$f = 0(1 \vee x_1 \vee f_2) \vee 1x_1f_2 = x_1f_2.$$

Следовательно, для рассмотренной формулы мультиплексорный метод является более эффективным по сравнению с формульным методом, так как в первом случае все четыре входа выходного модуля используются в качестве информационных входов, а во втором — у каждого модуля в схеме в качестве информационных применяется не более чем три входа. Формульный метод не позволяет реализовать формулу Ф, так как она отсутствует в заданной формуле.

Такую же сложность при использовании мультиплексорного метода имеет и формула $f_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5)$, двойственная с заданной, которая с помощью формульного метода также реализуется схемой из трех модулей:

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5) = \Phi_1(\Phi_2 \vee x_4 \vee x_5) \vee \Phi_2x_4x_5;$$
$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_2, Q_2, Q_2, Q_3, Q_3, Q_3, Q_3; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1.$$

Для реализации функции Φ_1 вновь запишем и решим уравнение при $n - k = 2$, которое также имеет единственное решение:

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \Phi_{11}(\Phi_{21} \vee x_2 \vee x_3) \vee \Phi_{21}x_2x_3;$$
$$\mathrm{MX}(Q_2, Q_3; x_1) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_{11}, \Phi_{21});$$
$$\Phi_{11} = \mathrm{MX}(1, 1; x_1) = 1;$$
$$\Phi_{21} = \mathrm{MX}(0, 1; x_1) = x_1.$$

Таким образом,

$$\Phi = 1(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3,$$
$$f_3 = \Phi(x_1 \vee x_4 \vee x_5) \vee x_1x_4x_5.$$

Так как только эти два *PN*-типа формул в базисе {&, ∨, !} при $h = 5$ реализуются формульным методом схемой из трех таких модулей, то тем самым вместо соотношения

$$2 \leqslant L(5, 3) \leqslant 3$$

доказано, что

$$L(5, 3) = 2,$$

что до сих пор было не известно.

Особенности применения этого метода при синтезе схем в различных элементных базисах подробно рассмотрены в гл. 4—6.

Изложенный метод может быть модифицирован для реализации на его основе произвольной булевой функции n переменных схемой из табличных преобразователей [51], каждый из которых реализован, например, постоянным запоминающим устройством (ПЗУ) с m входами и одним выходом ($m < n$). Такое ПЗУ, несмотря на то что оно не имеет настроечных входов, может за счет программирования реализовать произвольную БФУ m и менее переменных. При этом отметим, что при синтезе схем из логических элементов для каждого из них априори известны число входов и его порождающая функция, которая может быть произвольной, в то время как при синтезе схем из ПЗУ для каждого из них априори известно только число его входов, а при синтезе схем из пороговых элементов каждого элемента априори не известно даже это число.

Предположим, что требуется реализовать БФУ, рассмотренную в примере *3.22* схемой из ПЗУ с $m \leqslant 4$. Если использовать схему из двух ПЗУ, аналогичную с приведенной в [51] для логического блока, применяемого в семействе микросхем XC4000 фирмы «Xilinx», то одно ПЗУ с $m = 3$ реализует разложение Шеннона по переменной x_1, а второе ПЗУ с $m = 4$ — остаточную функцию от остальных переменных. Покажем, что модифицикация предлагаемого метода позволяет упростить эту схему, а также схему, построенную в примере *3.22*, за счет использования более широких функциональных возможностей ПЗУ по сравнению с функциональными возможностями рассмотренного модуля.

Так как при $m = 4$ каждое ПЗУ можно запрограммировать на реализацию только одного типа фрагментов длиной 16, а ТИ заданной БФУ состоит из двух разнотипных фрагментов этой длины, то на одном ПЗУ эта функция не может быть реализована. Эта функция также не может быть декомпозирована по фрагментам длиной восемь, так как ее ТИ состоит из трех типов такой же длины, а ПЗУ может реализовать только два фрагмента этой же длины ($n - k = 1$).

Декомпозиция может быть выполнена по фрагментам длиной четыре, так как ТИ заданной функции состоит из трех разнотипных фрагментов такой же длины, а ПЗУ может реализовать четыре фрагмента этой же длины ($n - k = 2$), три из которых определяются номенклатурой фрагментов реализуемой функции, а четвертый может быть выбран произвольно. Возможность произвольного выбора этого фрагмента позволяет упростить по сравнению с примером *3.22* остаточную функцию, получаемую после первого шага декомпозиции.

Полагая, что $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_4 x_5$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 1$, запишем уравнение:

$$x_1(x_2 x_3 \vee x_4 x_5) = \Phi_2(\Phi_1 \vee x_4 x_5);$$

$$\text{MX}(Q_0 ? Q_2, Q_0 ? Q_2, Q_0 ? Q_2, Q_0 ? Q_2, Q_1, Q_1, Q_1, Q_3; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \text{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2).$$

Из 16 решений этого уравнения выберем следующее:

$$\Phi_1 = \text{MX}(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1; x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3;$$
$$\Phi_2 = \text{MX}(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1.$$

Таким образом, модификация предлагаемого метода, которая может быть названа мультиплексорным методом с настраиваемым образом декомпозиции, и более широкие функциональные возможности ПЗУ позволили построить подфункцию Φ_1, зависящую только от двух переменных, и тем самым реализовать заданную БФУ схемой из двух ПЗУ — с $m = 4$ и $m = 2$.

Отметим, что в данном случае формульный метод строит из тех же элементов схему, реализующую другую декомпозицию: $\Phi = x_2 x_3 \vee \vee x_4 x_5$, $f = x_1 \Phi$.

Отметим также, что уже при $m = 3$ постоянное запоминающее устройство может быть использовано для реализации разложения Шеннона заданной БФУ по крайней правой входной переменной ее таблицы истинности, так как при этом значении m в столбце значений ПЗУ могут быть «расположены» все четыре типа фрагментов длиной два.

Рассмотренная модификация мультиплексорного метода применима также и для реализации БФУ в базисе мультиплексоров «2^m в 1».

Из изложенного следует, что при использовании ПЗУ и мультиплексоров с помощью изложенного метода при $m \geqslant 3$ каждый шаг декомпозиции является результативным, а настройка каждого из них определяется структурой столбца значений ТИ реализуемой БФУ (ее остаточной), в то время как при применении других типов элементов результативность шага декомпозиции определяется совпадением типов фрагментов длиной более одного в столбцах значений таблиц истинности реализуемой БФУ (ее остаточной) и порождающей функции элемента.

3.4. Сравнение мультиплексорного метода с известными методами

3.4.1. Мультиплексорный метод и декомпозиционный метод Миллера

В [32] на основе применения соотношения (3.1) рассмотрен декомпозиционный метод синтеза в двух постановках задачи:

— заданы функции f и F и требуется определить функции Φ_j ;

— заданы функции f и Φ_j и требуется определить функцию F.

При этом функция f может быть как полностью определенной, так и определенной лишь частично.

Этот метод базируется на весьма специфическом математическом аппарате, использующем нетрадиционные для булевой алгебры термины, такие, например, как частичное упорядочение функций, расширение функций, совместимость и несовместимость множеств, максимальная совместимость множеств и т.д. Это усложняет понимание и применение этого метода.

Покажем на примерах из [32], что предлагаемый существенно более простой мультиплексорный метод для многих БФУ приводит к тем же результатам.

Пример 3.23. При $m = 1$ и $n - k = 2$ построить функцию Ф, если F — мажоритарная функция трех переменных, а f — частично определенная функция вида

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |00-- \;\; --11 \;\; 0111 \;\; 0--1|^T .$$

1.1. Эта ТИ содержит четыре фрагмента длиной четыре, которые могут быть доопределены до трех типов фрагментов, обеспечивающих получение в качестве образа декомпозиции мажоранты (табл. 3.6).

Таблица 3.6

x_3	x_4	g_1	g_1	g_2	g_3
0	0	0	– 1	0	0
0	1	0	– 1	1	– 1
1	0	– 0	1	1	– 1
1	1	– 0	1	1	1

1.2. При $Q_0 = 0$, $Q = Q_1 = Q_2 = x_3 \vee x_4$, $Q_3 = 1$ справедливо уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# (x_3 \vee x_4),$$

которое в МФ имеет вид:

$$\mathrm{MX}(0, 1, Q, Q; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Это уравнение имеет четыре решения, два из которых неизоморфны:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 0; x_1, x_2) = !x_1 x_2; \\ \Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee x_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 1, 0, 1; x_1, x_2) = x_2; \\ \Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 0; x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2. \end{cases}$$

Таким образом, в данном случае

$$f = !x_1 x_2 \# (x_1 \vee x_2) \# (x_3 \vee x_4) \text{ или}$$

$$f = x_2 \# (x_1 \oplus x_2) \# (x_3 \vee x_4).$$

2. Для заданной БФУ построим карту декомпозиции (табл. 3.7).

Т а б л и ц а 3.7

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	10	11
00	0	0	–	–
01	–	–	1	1
10	0	1	1	1
11	0	–	–	1

2.1. Из этой таблицы следует, что функция

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \left| 0-00 \;\; 0-1- \;\; -11- \;\; -111 \right|^T$$

также содержит четыре фрагмента длиной четыре, которые могут быть доопределены двумя способами до трех типов фрагментов, обеспечивающих получение мажоранты в качестве образа декомпозиции (табл. 3.8).

Т а б л и ц а 3.8

x_1	x_2	g_0	g_1	g_2	g_3	g_0	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1

При $Q_0 = g_0, Q = Q_1 = Q_2 = g_1 = g_2, Q_3 = g_3$ в первом случае

$$f(x_2, x_4, x_1, x_2) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# (x_1 \oplus x_2),$$

а во втором —

$$f(x_2, x_4, x_1, x_2) = \Phi_1 \# \Phi_2 \# (x_1 \vee x_2).$$

И в том и другом случае уравнение в МФ имеет вид:

$$\mathrm{MX}(0, Q, Q, 1; x_3, x_4) = \mathrm{MX}(0, Q, Q, 1; \Phi_1, \Phi_2).$$

Таким образом, $\Phi_1 = x_3, \Phi_2 = x_4$. Следовательно,

$$f = x_3 \# x_4 \# (x_1 \oplus x_2) \text{ или } f = x_3 \# x_4 \# (x_1 \vee x_2).$$

Именно эти решения и приведены в [32].

Пример 3.24. При $m = 1$, $n - k = 2$, $Q = \{x_1 x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \vee x_2\}$ построить функцию F для БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |0000\ \ 0111\ \ 0111\ \ 0000|^T.$$

Используя карту декомпозиции, запишем заданную БФУ в виде:

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = |0000\ \ 0110\ \ 0110\ \ 0110|^T.$$

Полагая $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_1 \oplus x_2$, запишем логическое уравнение:

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi),$$

которое в МФ имеет вид:

$$\mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_1, Q_1; x_3, x_4) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1; \Phi);$$
$$\Phi = \mathrm{MX}(0, 1, 1, 1; x_3, x_4) = x_3 \vee x_4 .$$

Следовательно, $f = Q_1(x_3 \vee x_4)$, $Q_1 = x_1 \oplus x_2$, что совпадает с решением, приведенным в [32].

Пример 3.25. При $m = 1$, $n - k = 2$, $Q = \{x_1 x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 \vee x_2\}$ построить функцию F для БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left|0011 \ -010 \ -010 \ -011\right|^T .$$

При заданном порядке переменных разрешенные функции Q не могут быть получены. Построим карту декомпозиции (табл. 3.9).

Таблица 3.9

$x_1 x_2$	$x_3 x_4$			
	00	01	10	11
00	0	0	1	1
01	–	0	1	0
10	–	0	1	0
11	–	0	1	1

Доопределим эту функцию с новым порядком переменных следующим образом:

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \left|0110 \ 0000 \ 1111 \ 1001\right|^T .$$

При $Q_0 = 0$, $Q_1 = x_1 \oplus x_2$, $Q_2 = !(x_1 \oplus x_2)$, $Q_3 = 1$ справедливы соотношения:

$$f(x_3, x_4, x_1, x_2) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\mathrm{MX}(Q_1, Q_0, Q_3, Q_2; x_3, x_4) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_3, x_4) = x_3 ;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 0; x_3, x_4) = !\, x_4 .$$

Таким образом, $f = \Phi_1 !Q \vee \Phi_2 Q = x_3 !Q \vee !\, x_4 Q$, где $Q = x_1 \oplus x_2$.

Применяя разложение Рида по переменной x_4, получим БФ:

$$f = (x_3 \vee Q) \oplus Q x_4 ,$$

в которой устранены инверсии. Это решение найдено в [32] весьма трудоемко.

3.4.2. Мультиплексорный метод и декомпозиция булевых функций с помощью булевых матриц

В [45] был предложен метод решения логических уравнений на основе булевых матриц, а в [44] этот метод был использован для решения двух следующих задач:

— для заданной БФУ f определить значение m и функции F и Φ_j в декомпозиции (3.1);

— для заданных БФУ f и F определить функции Φ_j.

Рассмотрим применение этого метода для решения первой задачи. В [44] высказано утверждение, состоящее в том, что если при фиксированном значении $n - k$ фрагменты длиной 2^{n-k} у функций f и F совпадают, то эти задачи могут быть решены на основе составления и решения матричного уравнения, состоящего из трех булевых матриц:

$$|\mathbf{G}| * |\mathbf{X}| = |\mathbf{f}|,$$

где $|\mathbf{G}|$ — матрица фрагментов ПФ модуля размерности 2^{n-k} на 2^m; $|\mathbf{X}|$ — матрица для определения функций Φ_j размерности 2^m на 2^k; $|\mathbf{f}|$ — матрица фрагментов реализуемой функции f размерности 2^{n-k} на 2^k; $*$ — операция умножения булевых матриц, отличающаяся от стандартной операции умножения матриц заменой операций сложения и умножения на операции дизъюнкции и конъюнкции.

При этом в [44] было сформулировано необходимое и достаточное условие того, чтобы это уравнение имело решение в виде псевдоединичной матрицы, состоящее в том, что для каждого столбца матрицы $|\mathbf{f}|$ существует идентичный столбец матрицы $|\mathbf{G}|$.

Решение матричного уравнения определяется в виде:

$$|\mathbf{X}| = \overline{|\mathbf{G}|^T * \overline{|\mathbf{f}|}},$$

где $|\mathbf{G}|^T$ — транспонированная матрица $|\mathbf{G}|$; $\overline{|\mathbf{f}|}$ — дополнение матрицы $|\mathbf{f}|$.

Для нахождения искомой декомпозиции выполняются следующие этапы.

1. Строится матрица $|\mathbf{G}|$.
2. Строится матрица $|\mathbf{G}|^T$.
3. Строится матрица $|\mathbf{f}|$.
4. Строится матрица $\overline{|\mathbf{f}|}$.

5. Строится матрица $|\overline{\mathbf{X}}| = |\mathbf{G}|^T * |\overline{\mathbf{f}}|$.

6. Строится матрица $|\mathbf{X}| = |\overline{\overline{\mathbf{X}}}| = \overline{|\mathbf{G}|^T * |\overline{\mathbf{f}}|}$.

7. Так как матрица $|\mathbf{X}|$ является верхней гранью [45] множества решений матричного уравнения, то строится псевдоединичная матрица $|\mathbf{E}|$, являющаяся нижней гранью множества решений уравнения, каждый столбец которой содержит только одну единицу.

8. По матрице $|\mathbf{E}|$ строится матрица $|\mathbf{L}|$ размерности $]\log m[$ на 2^k по правилу: если $e_{ij} = 1$, то в $|\mathbf{L}|$ записывается столбец $\begin{vmatrix} i \\ j \end{vmatrix}$.

9. По матрице $|\mathbf{L}|$ строится матрица $|\Phi_д|$ размерности $]\log m[$ на 2^k по правилу:

$$\begin{vmatrix} i \\ j \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} j \\ i \end{vmatrix},$$

размещая значения j в порядке их возрастания.

10. Строится искомая матрица $|\Phi|$, столбцы которой формируются в результате представления чисел i в двоичной форме.

11. Каждая строка матрицы $|\Phi|$ заменяется искомой функцией Φ_j.

12. Используя столбцы матрицы $|\Phi|$, строится функция $F = f$.

Пример 3.26. Определить при $n - k = 2$ декомпозицию рассматриваемого вида для БФУ

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$
$$= |0011\ \ 0000\ \ 0101\ \ 0000\ \ 0111\ \ 0011\ \ 0111\ \ 0011|^T$$

с помощью изложенного метода.

1. Столбец значений этой функции состоит из четырех типов фрагментов длиной четыре: $G_0 = g_0 = g_5 = g_7 = |0011|^T$, $G_1 = g_1 = g_3 = |0000|^T$, $G_2 = g_2 = |0101|^T$, $G_3 = g_4 = g_6 = |0111|^T$. Рассматривая эти фрагменты в качестве столбцов матрицы $|\mathbf{G}|$, в зависимости от их расположения может быть построено 4! = 24 матрицы, каждой из которых соответствует определенная сложность функций F и Φ_j, получаемых в дальнейшем. Так как в [44, 45] не высказано никаких соображений по порядку расположения столбцов в матрице $|\mathbf{G}|$, то сформируем эту матрицу, например, следующим образом:

$$|\mathbf{G}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

и введем следующие обозначения: $Q_0(x_4, x_5) = G_1 = 0$, $Q_1(x_4, x_5) =$ $= G_2 = x_5$, $Q_2(x_4, x_5) = G_0 = x_4$, $Q_3(x_4, x_5) = G_3 = x_4 \vee x_5$.

2. Построим матрицу

$$|\mathbf{G}|^T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. По карте декомпозиции составим матрицу

$$|\mathbf{f}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Построим матрицу

$$\overline{|\mathbf{f}|} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Построим матрицу

$$\overline{|\mathbf{X}|} = |\mathbf{G}|^T * \overline{|\mathbf{f}|} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

6. Построим матрицу

$$|\mathbf{X}| = \overline{\overline{|\mathbf{X}|}} = \overline{|\mathbf{G}|^T * \overline{|\mathbf{f}|}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Построим матрицу

$$|\mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. Построим матрицу

$$|\mathbf{L}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 5 & 7 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

9. Построим матрицу

$$|\mathbf{\Phi}_{\text{д}}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

10. Построим искомую матрицу

$$|\mathbf{\Phi}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

11. Таким образом,

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = |1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1|^T = x_1 \vee !x_2 !x_3 ;$$
$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = |0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0|^T = (x_1 \vee x_2)!x_3 .$$

12. Построим функцию

$$F(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2) =$$
$$= Q_0!\Phi_1!\Phi_2 \vee Q_1!\Phi_1\Phi_2 \vee Q_2\Phi_1!\Phi_2 \vee Q_3\Phi_1\Phi_2 .$$

Подставляя в эту функцию функции Q_i, получим:

$$F\big(\Phi_1(X_0), \Phi_2(X_0), X_1\big) = \Phi_1 x_4 \vee \Phi_2 x_5 = f.$$

Таким образом, применение известного метода весьма трудоемко.

Пример 3.27. Определить при $n - k = 2$ с помощью мультиплексорного метода декомпозицию рассматриваемого вида для БФУ, приведенной в предыдущем примере.

В этом случае $G_0 = g_0 = g_5 = g_7 = x_4$, $G_1 = g_1 = g_3 = 0$, $G_2 = g_2 = = x_5$, $G_3 = g_4 = g_6 = x_4 \vee x_5$.

Предположим, что $Q_0 = G_1 = 0$, $Q_1 = G_2 = x_5$, $Q_2 = G_0 = x_4$, $Q_3 = = G_3 = x_4 \vee x_5$.

Составим и решим уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\mathrm{MX}(Q_2, Q_0, Q_1, Q_0, Q_3, Q_2, Q_3, Q_2; x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \mathrm{MX}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; \Phi_1, \Phi_2);$$
$$\Phi_1 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1; x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee !x_2 !x_3;$$
$$\Phi_2 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0; x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)!x_3.$$

Так как $Q_0 \leqslant Q_1$, $Q_0 \leqslant Q_2$, $Q_0 \leqslant Q_3$, $Q_1 \leqslant Q_3$, $Q_2 \leqslant Q_3$, то

$$f = Q_0 \vee Q_1\Phi_2 \vee Q_2\Phi_1 \vee Q_3\Phi_1\Phi_2 =$$
$$= x_5\Phi_2 \vee x_4\Phi_1 \vee (x_4 \vee x_5)\Phi_1\Phi_2 = \Phi_1 x_4 \vee \Phi_2 x_5.$$

Таким образом, предлагаемый метод решает поставленную задачу в «две строчки».

3.4.3. Мультиплексорный метод и метод решения логических уравнений

Задача декомпозиции функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по функции $F(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ может быть сведена к решению логического уравнения

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$$

относительно функций $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \Phi_m(x_1, \ldots, x_n)$.

Наиболее распространенным и универсальным методом решения поставленной задачи является сведение рассматриваемого логического уравнения к системе, состоящей из 2^n логических уравнений, зависящих в общем случае от $m2^n$ переменных.

Трудоемкость решения этой системы снижается при учете специфики функций F и Φ_j [42].

Рассмотрим применение этого метода на примере решения трех уравнений:

$$x_1 x_2 \vee ! x_2 x_3 = \Phi_1(x_1, x_2, x_3) \# \Phi_2(x_1, x_2, x_3) \# \Phi_3(x_1, x_2, x_3);$$
$$x_1 x_2 \vee ! x_2 x_3 = \Phi_4(x_2, x_3) \# \Phi_5(x_1, x_3) \# \Phi_6(x_1, x_2);$$
$$x_1 x_2 \vee ! x_2 x_3 = \Phi_7(x_1, x_2) \# \Phi_8(x_1, x_2) \# x_3.$$

Первое уравнение соответствует мажоритарной декомпозиции, второе — простой мажоритарной декомпозиции, а третье — мажоритарному разложению по переменной x_3 [46].

Для построения систем уравнений, эквивалентных каждому из приведенных уравнений, составим табл. 3.10.

Таблица 3.10

x_1	x_2	x_3	f	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8
0	0	0	0	a_{01}	a_{02}	a_{03}	a_{04}	a_{05}	a_{06}	a_{07}	a_{08}
0	0	1	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{06}	a_{07}	a_{08}
0	1	0	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{05}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
0	1	1	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
1	0	0	0	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{04}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}
1	0	1	1	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{14}	a_{35}	a_{26}	a_{27}	a_{28}
1	1	0	1	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{24}	a_{25}	a_{36}	a_{37}	a_{38}
1	1	1	1	a_{71}	a_{72}	a_{73}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}

Первому уравнению соответствует система из восьми уравнений с 24 неизвестными:

$$\begin{aligned} &a_{01} \# a_{02} \# a_{03} = 0; \qquad && a_{41} \# a_{42} \# a_{43} = 0;\\ &a_{11} \# a_{12} \# a_{13} = 1; && a_{51} \# a_{52} \# a_{53} = 1;\\ &a_{21} \# a_{22} \# a_{23} = 0; && a_{61} \# a_{62} \# a_{63} = 1;\\ &a_{31} \# a_{32} \# a_{33} = 0; && a_{71} \# a_{72} \# a_{73} = 1. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет 4^8 решений, и определение среди них такого, чтобы оно удовлетворяло заданным свойствам, связано с огромным перебором.

Второму уравнению соответствует система из восьми уравнений с 16 неизвестными:

$$
\begin{aligned}
&a_{04} \# a_{05} \# a_{06} = 0; \qquad &a_{04} \# a_{25} \# a_{26} = 0;\\
&a_{14} \# a_{15} \# a_{06} = 1; \qquad &a_{14} \# a_{35} \# a_{26} = 1;\\
&a_{24} \# a_{05} \# a_{16} = 0; \qquad &a_{24} \# a_{25} \# a_{36} = 1;\\
&a_{34} \# a_{15} \# a_{16} = 0; \qquad &a_{34} \# a_{35} \# a_{36} = 1.
\end{aligned}
$$

Процесс нахождения решения этой системы уравнений менее трудоемок, чем для предыдущей, но также является весьма сложным [42, 46].

Третьему уравнению соответствует система из восьми уравнений с восемью неизвестными:

$$
\begin{aligned}
&a_{07} \# a_{08} \# 0 = 0; \qquad &a_{27} \# a_{28} \# 0 = 0;\\
&a_{07} \# a_{08} \# 1 = 1; \qquad &a_{27} \# a_{28} \# 1 = 1;\\
&a_{17} \# a_{18} \# 0 = 0; \qquad &a_{37} \# a_{38} \# 0 = 1;\\
&a_{17} \# a_{18} \# 1 = 0; \qquad &a_{37} \# a_{38} \# 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Эта система уравнений может быть записана существенно проще:

$$
\begin{aligned}
&a_{07} \& a_{08} = 0; \qquad &a_{27} \& a_{28} = 0;\\
&a_{07} \vee a_{08} = 1; \qquad &a_{27} \vee a_{28} = 1;\\
&a_{17} \& a_{18} = 0; \qquad &a_{37} \& a_{38} = 1;\\
&a_{17} \vee a_{18} = 0; \qquad &a_{37} \vee a_{38} = 1;
\end{aligned}
$$

Полученная система состоит из четырех не связанных между собой систем, каждая из которых просто решается:

$$
\begin{aligned}
&a_{07} = 0, \quad a_{08} = 1 \quad \text{или} \quad a_{07} = 1, \quad a_{08} = 0;\\
&a_{17} = 0, \quad a_{18} = 0;\\
&a_{27} = 0, \quad a_{28} = 1 \quad \text{или} \quad a_{27} = 1, \quad a_{28} = 0;\\
&a_{37} = 1, \quad a_{38} = 1.
\end{aligned}
$$

Таким образом, получены четыре решения исходного уравнения:

$$
\begin{cases}
\Phi_7(x_1, x_2) = |0001|^T = x_1 x_2;\\
\Phi_8(x_1, x_2) = |1011|^T = x_1 \vee !x_2;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\Phi_7(x_1, x_2) = |1001|^T = !(x_1 \oplus x_2);\\
\Phi_8(x_1, x_2) = |0011|^T = x_1;
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \Phi_7(x_1, x_2) = |0011|^T = x_1; \\ \Phi_8(x_1, x_2) = |1001|^T = !(x_1 \oplus x_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_7(x_1, x_2) = |1011|^T = x_1 \vee !x_2; \\ \Phi_8(x_1, x_2) = |0001|^T = x_1 x_2. \end{cases}$$

Из изложенного следует, что использование известного метода даже в этом случае весьма трудоемко.

Первое уравнение решается мультиплексорным методом столь же сложно, как и рассмотренным методом. Второе уравнение, основанное на неразделительной декомпозиции, предлагаемым методом сводится к первому уравнению и с приемлемым объемом перебора не решается. Третье уравнение мультиплексорным методом решается весьма просто:

$$x_1 x_2 \vee !x_2 x_3 = \Phi_7(x_1, x_2) \mathbin{\#} \Phi_8(x_1, x_2) \mathbin{\#} x_3;$$

$$\mathrm{MX}(x_3, 0, x_3, 1; x_1, x_2) = \mathrm{MX}(0, x_3, x_3, 1; \Phi_7, \Phi_8);$$

$$\begin{cases} \Phi_7 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2; \\ \Phi_8 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee !x_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_7 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !(x_1 \oplus x_2); \\ \Phi_8 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_7 = \mathrm{MX}(0, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1; \\ \Phi_8 = \mathrm{MX}(1, 0, 0, 1; x_1, x_2) = !(x_1 \oplus x_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_7 = \mathrm{MX}(1, 0, 1, 1; x_1, x_2) = x_1 \vee !x_2; \\ \Phi_8 = \mathrm{MX}(0, 0, 0, 1; x_1, x_2) = x_1 x_2. \end{cases}$$

В заключение главы отметим, что предложенный метод позволяет на каждом шаге выполнять декомпозицию при «совпадении» свойств столбцов значений реализуемой булевой функции и порождающей функции используемого элемента. Общая задача разложения булевой функции описана в [52, 53].

Выводы

1. Введены понятия «мультиплексорная декомпозиция» и «простая мультиплексорная декомпозиция». Эти виды декомпозиции

выполняются по образу мультиплексорной функции и являются разделительными.

2. Предложена стандартная схема, состоящая из мультиплексора и двух ПЗУ, реализующая мультиплексорную декомпозицию.

3. Предложен метод построения мультиплексорных декомпозиций на основе решения логических уравнений.

4. Предложены параметрическая и явная мультиплексорные формы для решения логических уравнений, позволяющие решать их существенно проще, чем известными методами. По уравнению, записанному в одной из таких форм, легко определяется число решений, и для каждой из этих форм существует конструктивный и наглядный подход к построению каждого из решений.

5. Показано, что построение карт декомпозиции позволяет весьма просто (в отличие от таблиц истинности) находить второе множество входных переменных с целью построения более простой мультиплексорной декомпозиции.

6. Предложен метод разложения произвольной БФУ, заданной таблицей истинности, по крайним правым входным переменным, в то время как традиционно при таком задании БФУ раскладывается по крайним левым переменным.

7. Рассмотрены все возможные 24 разложения произвольной БФУ на две остаточные функции по крайней правой входной переменной и показано, что все разложения по этой переменной либо совпадают с разложениями Шеннона и Рида, либо *PN*-однотипны с ними и других универсальных разложений на две остаточные функции не существует.

8. Показано, что при разложении произвольной БФУ по двум и более крайним правым входным переменным существует такое назначение функций на входах мультиплексора, что предложенная в п. 2 стандартная схема существенно упрощается за счет уменьшения размерности мультиплексора и исключения одного из двух ПЗУ. Предложен распределительный метод реализации БФУ, осуществляющий такие разложения.

9. Предложен мультиплексорный метод реализации БФУ на произвольных, априори заданных логических элементах, основанный на исследовании их функциональных возможностей и составлении и решении в мультиплексорной форме для каждого шага декомпозиции логического уравнения. Метод обеспечивает построение схем от выхода к входам (сверху вниз). Для БФУ, зависящих от числа переменных $n \geqslant 6$, и элементов с числом входов $m \leqslant 6$ предлагается использовать этот метод совместно с другими методами, например с формульным, для реализации подфункций меньшего числа переменных.

10. Приведены примеры схем, построенных мультиплексорным методом, которые реализуют БФ из пяти букв, бесповторные в базисе И, ИЛИ, НЕ с числом 3-универсальных модулей меньшим, чем

их число в схемах, построенных формульным методом. Это позволило для произвольных БФ в этом базисе из указанного числа букв снизить оценку числа таких модулей в схемах до двух.

11. Если при применении формульного метода выполняется синтез на настроенных модулях, что сокращает функциональные возможности модулей, то при использовании более трудоемкого мультиплексорного метода настройка каждого из них определяется на соответствующем шаге процесса синтеза. Это приводит к тому, что мультиплексорный метод строит схемы, сложность которых не превышает сложности схем, которые строятся формульным методом, обеспечивающим оценки сложности, линейные от числа букв в реализуемой формуле, записанной в базисе $\{\&, \vee, !\}$ или $\{\&, \vee, \oplus, !\}$.

Литература

1. *Бибило П. Н.* Декомпозиция булевых функций // Проектирование устройств логического управления. М.: Наука, 1984.
2. *Shannon C.* A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. of American Inst. of Electrical engineirs. 1938. N 57.
3. *Поваров Г. Н.* О функциональной разделимости булевых функций // Докл. АН СССР. 1954. № 5.
4. *Reed I. S.* Class of multiple-error correcting codes and decoding scheme // IRE Trans. Inform. Theory. 1954. IT-4.
5. *Ashenhurst R. I.* The decomposition of switching functions // Annals of Computation Lab. of Harvard University. Mass. Cambridge. 1959. Vol. 29.
6. *Curtis H. A.* New approach to the design of switching circuits. N. J.: D. Van Nostrand Co, 1962.
7. *Karp R. M.* Functional decomposition and switching circuits design // J. Soc. Indust. Math. 1963. N 2.
8. *Карп Р. М.* Единый подход к функциональной декомпозиции // Синтез релейных структур. М.: Наука, 1965.
9. *Поваров Г. Н.* Математическая теория синтеза контактных (1, *k*)-полюсников // Докл. АН СССР. 1955. № 5.
10. *Блох А. Ш.* Канонический метод синтеза контактных схем // Автоматика и телемеханика. 1961. № 6.
11. *Блох А. Ш.* Граф-схемы и их применение. Минск: Вышэйшая школа, 1975.
12. *Блох А. Ш., Павловский А. И.* Синтез логических схем на трехвходовом операторе // Докл. АН БССР. 1979. № 7.
13. *Блох А. Ш., Павловский А. И.* Логические сети из трехвходовых операторов // Автоматика и вычисл. техника. 1980. № 4.
14. *Patt Y. N.* A complex logic module for the synthesis of combinational switching curcuits // Proc. 1967 AFIPS. Spring Joint Comput. Conf.
15. *Bertrand J. C.* Application des matrices booleennes a la synthese modulaire des fonctions logiques // These de Decteur de 3-e Cycle. Toulouse, 1970.
16. *Закурдаев Н. В.* О некоторых правилах предпочтения в декомпозиционных методах синтеза комбинационных схем // Автоматика и телемеханика. 1972. № 10.
17. *Варшавский В. И.* Некоторые вопросы теории логических сетей, построенных из пороговых элементов // Вопросы теории математических машин. М.: Физматгиз, 1962.
18. *Дертоузос М.* Пороговая логика. М.: Мир, 1967.
19. *Вавилов Е. Н., Егоров Б. М., Ланцев В. С., Тоценко В. Г.* Синтез схем на пороговых элементах. М.: Сов. радио, 1970.

20. *Бутаков Е. А.* Методы синтеза релейных устройств из пороговых элементов. М.: Энергия, 1970.
21. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я.* Синтез схем из пороговых и мажоритарных элементов // Сети передачи информации и их автоматизация. М.: Наука, 1965.
22. *Горбатов В. А.* Синтез логических схем в произвольном базисе // Теория дискретных автоматов. Рига: Зинатне, 1967.
23. *Горбатов В. А.* Схемы управления ЦВМ и графы. М.: Энергия, 1971.
24. *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики. М.: Высш. школа, 1986.
25. *Бивол Л. Г.* О реализации булевых функций на произвольных элементах // Абстрактная и структурная теория релейных устройств. М.: Наука, 1972.
26. *Пархоменко П. П.* Синтез структур релейных устройств методом замены входных переменных // Автоматика и телемеханика. 1967. № 1.
27. *Горовой В. Р.* Синтез релейных структур методом замены выходных функций // Автоматика и телемеханика. 1967. № 1.
28. *Гаврилов М. А., Копыленко В. М.* Метод «переходных таблиц» синтеза многовыходных комбинационных структур на произвольных элементах. М.: Ин-т проблем управления, 1970.
29. *Гаврилов М. А.* Декомпозиция комбинационных автоматов // Математические структуры. Вычислительная математика. Математическое моделирование. София, 1975.
30. *Гаврилов М. А.* Композиция и декомпозиция комбинационных автоматов // Теория автоматов. М.: Наука, 1976.
31. *Гаврилов М. А., Девятков В. В., Пупырев Е. И.* Логическое проектирование дискретных автоматов. М.: Наука, 1977.
32. *Миллер Р.* Теория переключательных схем. Т. 1. Комбинационные схемы. М.: Наука, 1970.
33. *Берлин А. Н.* Синтез логических устройств в коммутационной технике. М.: Радио и связь, 1982.
34. *Rudeanu S.* Boolean functions and equations. Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co., 1974.
35. *Рудяну С.* Локальные свойства булевых функций и экстремальные решения булевых уравнений // Теория автоматов. М.: Наука, 1976.
36. *Lowenheim L.* Über die Auflosung von Gleichungen in Logischen gebietkalkul // Math. Annal. 1910. Bd 68.
37. *Закревский А. Д.* Логические уравнения. Минск: Наука и техника, 1975.
38. *Сериков Ю. А., Лившиц А. Н.* Логические уравнения // Тез. докл. II Всесоюз. совещ. по теории релейных устройств и конечных автоматов. Рига, 1971.
39. *Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л.* Некоторые способы решения систем логических уравнений в произвольных базисах // Тез. докл. II Всесоюз. совещ. по теории релейных устройств и конечных автоматов. Рига, 1971.
40. *Розенблюм Л. Я.* Некоторые вопросы синтеза логических схем из мажоритарных элементов. Дис. на соиск. ученой степени канд. техн. наук. Л.: ВЦ ЛО Мат. ин-та им. В. А.Стеклова АН СССР, 1965.
41. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1963.
42. *Варшавский В. И.* Мажоритарная декомпозиция // Автоматика и телемеханика. 1965. № 1.
43. *Чистов В. П.* О системах логических уравнений. М.: ВИНИТИ. Деп. рук. № 2114-85.
44. *Пандеф Е.* Булевы матрицы // Булева алгебра и конечные автоматы. М.: Мир, 1969.
45. *Ледли Р.* Программирование и использование вычислительных машин. М.: Мир, 1966.
46. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974.
47. *Фридман А., Менон П.* Теория и проектирование переключательных схем. М.: Мир, 1978.

48. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.

49. *Li H. F.* Variable selection in logic synthesis using multiplexers // Int. J. Electronics. 1980. N 3.

50. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Унифицированные логические схемы. Л.: ИПК СП, 1981.

51. *Угрюмов Е. П., Грушвицкий Р. И., Альшевский А. Н.* БИС/СБИС с репрограммируемой структурой. СПб.: Гос. электротех. ун-т, 1996.

52. *Лупанов О. Б.* Об одном методе синтеза схем // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. № 1.

53. *Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А.* Введение в теорию конечных автоматов. М.: Физматлит, 1962.

54. *Брусенцов Н. П., Владимирова Ю. С.* Решение булевых уравнений // Методы математического моделирования. Труды ф-та ВМиК МГУ. М.: Диалог—МГУ, 1998.

55. *Левченко В. С.* Общий вид решения булевых уравнений // Автоматика и телемеханика. 2000. № 2.