Глава 2

Формульный метод синтеза комбинационных схем из произвольных логических элементов

Одной из важнейших задач в области логического синтеза является задача построения комбинационных схем, реализующих булевы функции, из произвольных априори известных логических элементов.

Эта задача является достаточно сложной, и поэтому рассмотрим вопрос о реализации одной булевой функции.

Возможны два подхода к построению комбинационных схем: от выхода к входам и от входов к выходу.

Первый из этих подходов, названный мультиплексорным методом, рассмотрен в гл. 3. В настоящей главе излагается второй подход, названный *формульным методом*, который существенно отличается от предложенного в [1]. В формульном методе реализуемая булева функция задана нормальной булевой формулой, которая может содержать скобки произвольной глубины, а ее двухместные операции подчиняются сочетательному закону.

Выполнение этого закона позволяет весьма просто «разделять» формулу на подформулы [2]. При этом будут рассматриваться два базиса логических операций: И, ИЛИ, НЕ и И, ИЛИ, НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, НЕ. Если это особо не оговаривается, то в дальнейшем будем предполагать, что применяются формулы, записанные в первом базисе, а прямые и инверсные выходы источников информации равнодоступны.

В отличие от традиционного подхода, используемого в логическом синтезе, в качестве основной метрики будем применять не число входных переменных n в БФУ, а число букв h в БФ при фиксированном базисе логических операций, которые используются при ее записи. При этом повторная БФ, зависящая от n переменных и содержащая h букв, может первоначально реализовываться как бесповторная БФ той же структуры, которая зависит от h переменных, а затем за счет отождествлений соответствующих переменных осуществляется обратный переход к заданной формуле. Например, если требуется реализовать БФ $f=(x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1 x_2$, для которой n = 3, h = 5, то первоначально вместо нее реализуется ББФ $f=(z_1 \vee z_2)z_3 \vee z_4 z_5$ с $n = h = 5$, а затем выполняются следующие отождествления переменных: $z_1 = z_4 = x_1$, $z_2 = z_5 = x_2$, $z_3 = x_3$.

Основная идея предлагаемого метода состоит в реализации произвольной БФ в рассматриваемом базисе из h букв схемой из модулей, универсальных в классе произвольных БФ в том же базисе из q и менее букв, где $h \geqslant q$. В дальнейшем будем называть такие модули q-универсальными. Из изложенного следует, что для универсальности в классе произвольных БФ требуется, чтобы модуль был универсален только в классе ББФ в том же базисе из фиксированного числа букв, т. е. мог реализовать путем настройки представителя каждого типа ББФ в этом базисе и из этого числа букв в выбранной классификации.

Рассматриваются два типа универсальных модулей. Модули первого типа названы настраиваемыми, а второго — виртуальными.

Для модулей первого типа характерно, что каждый из них реализует порождающую функцию, объединяющую представителей всех типов ББФ в выбранной классификации из определенного числа букв. После этого модуль может быть настроен на реализацию любого из указанных представителей типов. Метод построения таких модулей изложен в гл. 7.

Для модулей второго типа характерно, что представитель каждого типа ББФ в выбранной классификации из определенного числа букв реализуется с помощью известных или предлагаемых в настоящей работе методов схемой из заданных произвольных элементов. При этом все построенные схемы образуют «таблицу настройки» виртуального модуля.

После разработки метода синтеза схем на настраиваемых q-универсальных модулях он сначала может быть распространен на синтез схем из настраиваемых многофункциональных модулей, которые, обладая q-универсальностью, реализуют также представителей некоторых типов формул из числа букв большего q (эти модули могут не проектироваться специально как многофункциональные, являясь ими по сути) , а затем на синтез схем из виртуальных модулей и тем самым на синтез схем из произвольных априори известных логических элементов.

Предлагаемый метод в общем случае не гарантирует оптимальности схем ни по сложности, ни по быстродействию, но в отличие от известных методов обеспечивает линейную зависимость числа весьма сложных элементов в схеме от числа букв в реализуемой БФ. Этот метод был впервые описан в [3—7], а комплекс программ, его реализующих, — в [8].

2.1. Синтез схем из модулей, универсальных в классе формул

2.1.1. Реализация булевых формул схемами из положительно монотонных *q*-универсальных модулей

Будем использовать *PN*-классификацию и представлять реализуемую формулу и формулы, реализуемые модулем путем настройки, в виде структурных полиномов. В [2, 9] показано, что оптимальная стратегия, обеспечивающая минимальную элементную сложность реализации ББФ, состоит в том, что синтез проводится от входов к выходу и у применяемого модуля на каждом шаге реализации формулы должно быть использовано максимально возможное число информационных входов из q возможных. Таким образом, в данном случае отдельные шаги при движении от входов к выходу схемы независимы и, принимая оптимальное решение на каждом шаге, мы не ухудшаем окончательного результата.

В [9] доказано, что эта стратегия обеспечивает выполнение следующего соотношения, определяющего число модулей в схеме:

$$\left]\frac{h-1}{q-1}\right[\leqslant L(h,q) \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{q}\right[, \tag{2.1}$$

где $]a[$ — символ округления числа a до ближайшего большего целого.

Нижняя оценка числа шагов совпадает с нижней оценкой в соотношении (2.1) , а верхняя оценка числа шагов равна верхней оценке в соотношении (2.1) , умноженной на константу $]q/2[$.

Обратим внимание, что при $q = 2$

$$L(h,2) = h - 1.$$

Пример 2.1. Реализовать на 3-универсальных модулях формулу

$$f = \big((!x_1 x_2 \vee x_1 !x_2)x_3 \vee x_4 x_5\big)(x_6 \vee x_7) \vee x_8 .$$

В данном случае $h = 10$, $q = 3$, и поэтому $5 \leqslant L(10,3) \leqslant 6$. Из приведенного соотношения следует, что произвольная (в том числе и заданная) БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из десяти букв в зависимости от ее структуры реализуется схемой из пяти либо из шести таких модулей.

Представим заданную БФ в виде полинома $\big((2+2)1+2\big)(1 + 1) + 1$.

Процедура реализации состоит в следующем.

1. Формула не содержит подформул из трех букв.
2. Выделяем подформулу 2. Остаток: $\big((1+2)+2\big)(1 + 1) + 1$.
3. Выделяем подформулу 1 + 2. Остаток: (2 + 2) (1 + 1) + 1.
4. Остаточная формула не содержит подформул из трех букв.
5. Выделяем подформулу 2. Остаток: (1 + 2) (1 + 1) + 1.

6. Выделяем подформулу 1 + 2. Остаток: 1 (1 + 1) + 1.
7. Выделяем подформулу 1 (1 + 1) . Остаток: 1 + 1.
8. Остаточная формула содержит менее трех букв.
9. Выделяем подформулу 1 + 1. Остаток: 1.

Построенная схема из шести модулей приведена на рис.2.1.

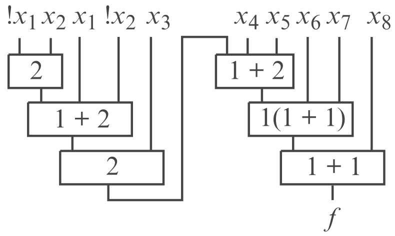

Рис. 2.1

Структура заданной БФ такова, что при $q = 3$ у трех из шести модулей удалось применить только два информационных входа из трех, что привело к построению схемы с числом модулей, определяемым верхней оценкой.

Пример 2.2. Реализовать формулу, рассмотренную в примере *2.1*, на 4-универсальных модулях.

В этом случае $h = 10$, $q = 4$, и поэтому $3 \leqslant L(10, 4) \leqslant 5$.

Из сопоставления этого неравенства с приведенным в предыдущем примере следует, что при $h = 10$ усложнение модуля ($q = 4$ вместо $q = 3$) резко уменьшает оценку сложности: нижняя оценка при $q = 3$ становится верхней при $q = 4$.

Заданная БФ реализуется в данном случае следующим образом.
1. Выделяем подформулу 2 + 2. Остаток: (2 + 2) (1 + 1) + 1.
2. Выделяем подформулу 2 + 2. Остаток: 1 (1 + 1) + 1.
3. Выделяем подформулу 1 (1 + 1) + 1. Остаток: 1.

Структура заданной формулы такова, что при $q = 4$ у всех трех модулей удалось применить все четыре информационных входа, что привело в этом случае к построению схемы с числом модулей, определяемым нижней оценкой. Таким образом, по сравнению с предыдущим примером усложнение модуля привело к двухкратному сокращению числа модулей в схеме. При этом, однако, нельзя сказать, что суммарная элементная сложность схемы уменьшилась, так как рассматриваемый модуль может быть реализован схемой из двух 3-универсальных модулей. Однако существует показатель, значение которого свидетельствует о том, что для заданной БФ применение 4-универсального модуля более эффективно. Это суммарное число логических выводов (внешние выводы без учета выводов для подачи питания) в модулях схемы. При $q = 4$ значение этого показателя равно $3 \cdot 7 = 21$, в то время как при $q = 2$ и $q = 3$ этот показатель равен $9 \cdot 4 = 36$ и $6 \cdot 5 = 30$ соответственно.

Пример 2.3. Реализовать формулу, рассмотренную в примере *2.1*, на 5-универсальных модулях.

В этом случае $h = 10$, $q = 5$ и $3 \leqslant L(10, 5) \leqslant 4$. Из сравнения этого соотношения с приведенным в предыдущем примере следует, что за счет усложнения модуля верхняя оценка несколько снизилась, а нижняя не изменилась. Так как при $q = 4$ заданную ББФ удалось реализовать по нижней оценке, то реализовывать ее при $q = 5$ нецелесообразно.

Пример 2.4. Расширим базис двухместных операций, введя в него операцию НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ. При этом БФУ, рассмотренная в примере *2.1*, может быть представлена в виде:

$$f = \big((x_1 \oplus x_2)x_3 \vee x_4 x_5\big)\ (x_6 \vee x_7) \vee x_8 .$$

В данном случае число букв уменьшилось до восьми. При использовании 3-универсального в базисе $\{\&, \vee, \oplus, !\}$ модуля выполняется соотношение $4 \leqslant L(8, 3) \leqslant 5$. Представим полученную ББФ в виде структурного полинома $\big((1 \oplus 1)\,1 + 2\big)(1 + 1) + 1$. При этом процедура реализации состоит в следующем.

1. Выделяем подформулу $(1 \oplus 1)\ 1$. Остаток: $(2 + 2)\ (1 + 1) + 1$.
2. Остаточная формула не содержит подформул из трех букв.
3. Выделяем подформулу 2. Остаток: $(1 + 2)\ (1 + 1) + 1$.
4. Выделяем подформулу $1 + 2$. Остаток: $1\ (1 + 1) + 1$.
5. Выделяем подформулу $1\ (1 + 1)$. Остаток: $1 + 1$.
6. Остаточная формула содержит менее трех букв.
7. Выделяем подформулу $1 + 1$. Остаток: 1.

Таким образом, рассматриваемая формула реализуется по верхней оценке сложности. Суммарное число логических выводов в этом случае $5 \cdot 6 = 30$. Следовательно, по этому критерию расширение базиса в данном случае нецелесообразно.

2.1.2. Минимизация числа *q*-универсальных модулей в схемах

Из соотношения (2.1) следует, что сокращение числа букв h при $q = \text{const}$, вообще говоря, приводит к сокращению числа модулей, однако для конкретных скобочных формул это может оказаться не так. Например, формула $f = x_1(x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_5 x_6 \vee x_7 x_8)$, содержащая девять букв, реализуется схемой из четырех 3-универсальных модулей, в то время как формула $f = x_1\big(x_2(x_3 x_4 \vee x_5 x_6) \vee x_7 x_8\big)$, получающаяся в результате минимизации предыдущей формулы и содержащая восемь букв, реализуется схемой из пяти таких модулей.

В [2] доказано, что, для того чтобы в результате минимизации числа букв в БФ от h до h число модулей в схеме не увеличивалось, должно выполняться соотношение

$$h_1 \leqslant \left[1+\frac{h-1}{2}\,\frac{q}{q-1}\right], \tag{2.2}$$

а для того чтобы число модулей в схеме сокращалось, должно выполняться соотношение

$$h_1 \leqslant \left[1+\frac{h-1}{2}\,\frac{q}{q-1}\right] - \left]\frac{q}{2}\right[. \tag{2.3}$$

Таким образом, для гарантированного уменьшения числа модулей в схеме при больших h и $h \gg q$ число букв в формуле должно быть сокращено почти в два раза. При $h = 9$, $q = 3$ для уменьшения числа модулей должно выполняться неравенство $h_1 \leqslant 5$.

2.1.3. Реализация не полностью определенных булевых функций схемами из *q*-универсальных модулей

Получим на основании соотношения (2.1) оценку сложности реализации не полностью определенных БФУ. В [10] доказано, что для БФУ n переменных, равной нулю на t_0 входных наборах и единице — на t_1 входных наборах, может быть построена БФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ с числом букв

$$h \leqslant 2t_1 + t_0 - 2\,. \tag{2.4}$$

Таким образом, если

$$n > 2t_1 + t_0 - 2,$$

то по крайней мере от $(n - 2t_1 - t_0 + 2)$ переменных БФУ зависит несущественно.

В [11] доказано, что для БФУ, заданной на t входных наборах, может быть построена БФ в указанном базисе с числом букв

$$h \leqslant \frac{3}{2}t - 2 \ \text{ при } \ t \geqslant 2\,. \tag{2.5}$$

Таким образом, из соотношений (2.1) , (2.4) , (2.5) следует, что

$$L \leqslant \min\left(\left]\frac{2(2t_1 + t_0 - 3)}{q}\right[, \left]\frac{3(t-2)}{q}\right[\right). \tag{2.6}$$

Пример 2.5. Реализовать не полностью определенную БФУ, заданную табл.2.1, на 3-универсальных модулях.

Т а б л и ц а 2.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0

В данном случае $t_1 = t_0 = 4$, $t = 8$, $q = 3$, и поэтому из соотношения (2.6) следует, что $L \leqslant 6$. Для заданной БФУ с помощью алгоритма [10] может быть построена формула $f = x_1 \, ! x_3 \vee ! x_1 x_3 \, ! x_4$, которая формульным методом реализуется схемой из двух модулей.

2.1.4. Реализация булевых формул схемами из положительно монотонных модулей, универсальных в классе дизъюнктивных нормальных форм из *q* букв

Метод, изложенный в предыдущем разделе, может быть использован и в данном случае, однако уменьшение функциональных возможностей модулей приводит к повышению верхней оценки сложности. В [2] доказано, что для таких модулей справедливо соотношение

$$\left]\frac{h-1}{q-1}\right[\leqslant L_1(h, q) \leqslant \left]\frac{h-1}{[(q/2)+1]}\right[+ \frac{c}{2}, \qquad (2.7)$$

где c — число скобок в формуле.

Пример 2.6. Реализовать формулу, рассмотренную в примере *2.1*, на модулях рассматриваемого класса при $q = 3$.

В данном случае $h = 10$, $q = 3$, и поэтому $5 \leqslant L_1(10, 3) \leqslant 8$, а заданная формула реализуется следующим образом.

1. Заданная БФ не содержит подформул, являющихся ДНФ из трех букв.
2. Выделяем подформулу 2. Остаток: $\big((1+2)1+2\big)(1+1)+1$.
3. Выделяем подформулу 1 + 2. Остаток: (2 + 2) (1 + 1) + 1.
4. Остаточная формула не содержит подформул, являющихся ДНФ из трех букв.
5. Выделяем подформулу 2. Остаток: (1 + 2) (1 + 1) + 1.

6. Выделяем подформулу 1 + 2. Остаток: 1 (1 + 1) + 1.

7. Остаточная формула не содержит подформул, являющихся ДНФ из трех букв.

8. Выделяем подформулу 1 + 1. Остаток: 2 + 1.

9. Выделяем подформулу 2 + 1. Остаток: 1.

Заданная БФ реализуется схемой из шести рассматриваемых модулей.

Таким образом, эта БФ обладает такой структурой, что уменьшение функциональных возможностей модулей по сравнению с 3-универсальными модулями не привело к усложнению схемы.

Комплекс программ для выполнения синтеза в базисе рассмотренных модулей, созданный при участии автора, описан в [36].

2.1.5. Реализация булевых формул схемами из немонотонных q-универсальных модулей

Если в качестве представителей типов формул, объединяемых в модуль, применяются немонотонные формулы, то изложенный в разд. 2.1.1 метод должен быть модифицирован. В этом случае синтез выполняется в два этапа.

На первом этапе представители типов формул, реализуемых модулем путем настройки, заменяются однотипными положительно монотонными формулами и от входов к выходу выполняется синтез с помощью метода, изложенного в разд. 2.1.1.

На втором этапе, который проводится от выхода к входам, выполняется корректировка схемы, построенной на первом этапе, с целью учета инверсий в представителях типов формул, реализуемых модулем. Для этого строится схема, найденная на первом этапе, без указания формул, которые реализуют модули. После этого формулы для пометки модулей выбираются на основе следующего правила.

Тип формулы выходного модуля, найденный на первом этапе, не изменяется, а выбор типов формул всех остальных модулей в схеме выполняется по правилу, названному основным: если от выхода рассматриваемого модуля до выхода схемы имеется четное число инверсий, то тип формулы, реализуемой этим модулем, не изменяется, а если число инверсий нечетно — тип формулы изменяется на дополнительный с точностью до расстановки инверсий и совпадает с одной из формул, выполняемых модулем за счет настройки.

Второй этап может быть выполнен всегда, так как q-универсальный модуль для любой формулы, реализуемой путем настройки, выполняет также и дополнительную ей формулу в рассматриваемой классификации. Для оценки числа шагов на втором этапе можно использовать соотношение (2.1). При этом точное число шагов на этом этапе равно числу модулей, определенных на первом этапе.

Приведенное выше правило распространяется также и на входные переменные.

Если на некотором шаге настройка модуля может быть выполнена неоднозначно, то применим следующее дополнительное эвристическое правило: будем выбирать такую настройку модуля, при которой изменяется настройка минимального числа модулей, подключенных к его входам.

При выполнении этого правила, если имеется возможность, то настройка модуля должна выбираться так, чтобы для модулей, связанных со входами схемы, число инверторов на этих входах было минимальным. Применение какого-либо другого правила влияет только на число инверторов на входах схемы и не изменяет числа модулей, определяемого соотношением (2.1) .

Пример 2.7. Реализовать формулу, рассмотренную в примере *2.1*, на 3-универсальных модулях, каждый из которых может быть настроен на реализацию формул:

$$z_1 = !ab \vee !c,\ z_2 = (!a \vee !b)\,!c,$$

$$z_3 = !a \vee !b \vee !c,\ z_4 = abc.$$

Этот модуль реализует также следующих представителей *P*-типов формул из двух букв: $!a!c$, $!ab$, ab, $!a \vee !b$, $b \vee !c$.

Первый этап построения схемы описан в примере *2.1*. Выполним второй этап в обратном порядке.

6. Настроим шестой модуль на формулу $b \vee !c$.

5. Так как от выхода пятого модуля до выхода схемы нет инверторов, то сохраним тип настройки этого модуля: $!c\ (!a \vee !b)$.

4. Так как от выхода четвертого модуля до выхода схемы имеется один инвертор, то заменим настройку этого модуля на дополнительную: $!c\ (!a \vee !b)$.

3. Так как от выхода третьего модуля до выхода схемы имеется два инвертора, то, во-первых, сохраним тип настройки модуля, а во-вторых, сократим число инверсных переменных, подключенных ко входам модуля. Это обеспечивается при настройке ab.

2. Так как от выхода второго модуля до выхода схемы имеется два инвертора, то, во-первых, сохраним тип настройки модуля, а во-вторых, сократим число инверсных переменных, подключенных ко входам модуля. Это обеспечивается при настройке $!c \vee b\ !a$.

1. Так как от выхода первого модуля до выхода схемы имеется только два инвертора, то, во-первых, сохраним тип настройки модуля, а во-вторых, сократим число инверсных переменных, подключенных ко входам модуля. Это обеспечивается при настройке $!a\ b$.

Для каждого из входов схемы проверим выполнение основного правила с целью реализации заданной формулы. При этом восьмой, девятый и десятый входы схемы должны быть проинвертированы. Искомая схема приведена на рис. 2.2.

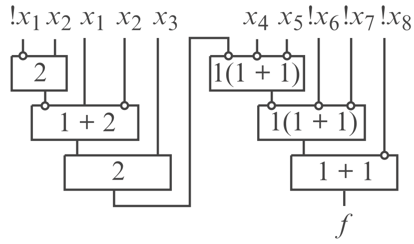

Рис. 2.2

Выполним верификацию построенной схемы. Для этого запишем по ней формулу, сопоставляя с каждым элементом пару круглых скобок, и приведем ее к нормальному виду, используя правило, предложенное в [2]: подсчитать число инверсий над каждой буквой и каждым знаком операции. Если число инверсий четно, то в формулу записывается буква без инверсии, а знак операции не изменяется. Если число инверсий нечетно, то буква записывается с инверсией, а знак изменяется на дополнительный: операция И изменяется на операцию ИЛИ, и наоборот. В данном случае

$$f = \big((!x_1 x_2 \vee x_1 !x_2) x_3 \vee x_4 x_5\big)(x_6 \vee x_7) \vee x_8.$$

Таким образом, заданная формула реализована корректно.

2.1.6. Реализация булевых формул схемами из немонотонных *q*-универсальных модулей, использующих *P*-классификацию

Если модуль реализует путем настройки немонотонные формулы, но он q-универсален при использовании P-классификации, то синтез вновь становится одноэтапным, а на входах схемы нет необходимости устанавливать инверторы. При этом все модули соединяются друг с другом по прямым входам, а немонотонные формулы применяются лишь для того, чтобы не устанавливать инверторы на входах схемы. Соотношение (2.1) выполняется и для этой разновидности модулей.

2.2. Оценка эффективности многофункциональных логических модулей и реализация булевых формул схемами из этих модулей

До появления работы [2] многофункциональные логические модули (МЛМ) рассматривались как класс элементов, принципиально отличающийся от других классов логических элементов, что отражалось в обозначениях соответствующих микросхем.

В [2] автором было высказано утверждение, что любой логический элемент, имеющий более одного входа, является многофункциональным, так как он путем настройки реализует более одной функции.

Вопросы логической эффективности элементов рассматривались в [12—14]. Однако показатель эффективности (число подфункций в порождающей функции элемента), использованный в этих работах, не позволяет установить связь между сложностью элементов и числом этих элементов, требующихся для реализации БФ в используемом базисе из h букв.

Этого недостатка лишен коэффициент логической эффективности, или коэффициент многофункциональности, предложенный автором и определяемый соотношением [15]:

$$k_{\text{м}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Phi(i)}{T_1(i)}, \tag{2.8}$$

где m — максимальное число букв, от которого модуль путем настройки реализует бесповторные в рассматриваемом базисе формулы; $\Phi(i)$ — число PN-типов бесповторных в том же базисе формул из i букв, реализуемых модулем путем настройки; $T_1(i)$ — число PN-типов бесповторных в этом базисе формул из i букв, существующих теоретически (гл. 1).

Если модуль имеет $M \geqslant m$ входов, то физический смысл введенного коэффициента состоит в том, что при реализации большого массива формул в среднем в каждом из этих модулей $k_{\text{м}}$ входов будут применяться как информационные, а остальные — как настроечные.

Для q-универсальных модулей $k_{\text{м}} = q$. При этом соотношение (2.1) связывает величину $k_{\text{м}}$ с величиной L.

Предположим, что задан МЛМ, характеризующийся величиной $k_{\text{м}}$, который также q-универсален ($q \leqslant k_{\text{м}}$). Тогда

$$\left]\frac{h-1}{m-1}\right[\leqslant L_2(h, q) \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{q}\right[\tag{2.9}$$

или в среднем:

$$\left]\frac{h-1}{k_{\text{м}}-1}\right[\lesssim L_3(h, k_{\text{м}}) \lesssim \left]\frac{2(h-1)}{k_{\text{м}}}\right[, \tag{2.10}$$

где $\lesssim$ — знак операции «приблизительно меньше» .

При синтезе схем из МЛМ должна использоваться та же стратегия, что и при синтезе схем из универсальных модулей: на каждом шаге у каждого модуля должно применяться максимально возможное число информационных входов. Однако использование всех функциональных возможностей МЛМ весьма трудоемко, так как в этом случае не любая подформула из h_1 букв ($q < h_1 \leqslant m$) может быть реализована одним таким модулем.

При этом отметим, что любая подформула из q и менее букв реализуется одним таким модулем всегда. Таким образом, если для q-универсальных модулей нерезультативные шаги определяются структурой реализуемой БФ, то для МЛМ появляется также и другая причина — неуниверсальность модуля при $h_1 > q$.

Из изложенного следует, что для упрощения синтеза при фиксированном числе логических выводов должен проектироваться модуль не с максимальной величиной $k_{\text{м}}$, а с максимальной величиной q.

Пример 2.8. Определить значения $k_{\text{м}}$ и q для элемента, структура которого описывается формулой $z = ab \vee cd$.

В этом случае $\Phi(1) = \Phi(4) = 1$, $\Phi(2) = \Phi(3) = 2$, $T_1(1) = 1$, $T_1(2) = 2$, $T_1(3) = 4$, $T_1(4) = 10$, и поэтому

$$k_{\text{м}} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{10} = 2.6;\ q = 2.$$

Таким образом, можно считать, что этот элемент при реализации большого массива формул имеет как бы 2.6 информационных и 1.4 настроечных входов.

Этот элемент имеет пять логических выводов. В [2] показано, что при этом числе логических выводов может быть построен модуль с $q = 3$.

Пример 2.9. Определить значения $k_{\text{м}}$ и q для микросхемы К1ЛР333, описываемой формулой

$$f = !(x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_5 x_6 \vee x_7 x_8 x_9).$$

В [1] показано, что в данном случае $q = 3$, так как

$$k_{\text{м}} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{8}{10} + \frac{10}{24} + \frac{12}{66} + \frac{9}{180} + \frac{4}{522} + \frac{1}{1532} = 4.46.$$

Из изложенного следует, что в этой микросхеме десять логических выводов применяются крайне неэффективно, так как известен 3-универсальный модуль с пятью логическими выводами [2].

Пример 2.10. Определить значения $k_{\text{м}}$ и q для модуля, описываемого системой булевых формул:

$$f_1 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 \,!x_8 \,!x_9 \,!x_{10} \vee (x_1 x_2 \vee x_3 x_4 \vee x_5 x_6 \vee$$
$$\vee x_7 x_8) x_9 \,!x_{10} \vee (x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_5 x_6 x_7 x_8)!\,x_9 x_{10} \vee$$
$$\vee (x_1 x_2 x_3 \vee x_4 x_5 x_6 \vee x_7 \vee !x_8) x_9 x_{10};$$
$$f_2 = !f.$$

Этот модуль, выпускаемый промышленностью в виде микросхемы К1ЖЛ081, в свое время (конец 60-х годов) обладал наивысшим уровнем интеграции среди логических микросхем, выпускаемых в мире [16]. Анализ функциональных возможностей этого элемента, выполненный в [17, 18], показал, что

$$k_{\text{м}} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{10} + \frac{24}{24} + \frac{58}{66} + \frac{50}{180} + \frac{26}{522} = 6.21;\; q = 5.$$

При этом также было установлено, что в классе ДНФ этот элемент имеет

$$k_{\text{м}} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{5}{5} + \frac{7}{7} + \frac{9}{15} + \frac{8}{22} = 6.964;\; q = 6.$$

При этом отметим, что авторы этого элемента не знали всех его функциональных возможностей и при его создании ориентировались на то, чтобы модуль реализовал путем настройки 22 формулы из восьми букв, наиболее часто встречающиеся (по их мнению) в алгоритмах управления судовыми техническими средствами [16]. Ограниченность такого подхода и привела автора к разработке метода, излагаемого в настоящей главе.

Рассмотренный модуль имеет 12 логических выводов. В [19] показано, что этим числом выводов обладают в сумме 3- и 4-универсальные модули, которые образуют виртуальный модуль с $q = 6$.

Пример 2.11. Реализовать формулу из примера *2.1* схемой из микросхем К1ЖЛ081 (таблица настройки этой микросхемы приведена в [18]) .

В данном случае $h = 10$, $m = 8$, $q = 5$, и поэтому из соотношения (2.9) следует, что $2 \leqslant L_2\,(10, 5) \leqslant 4$.

Так как эта микросхема путем настройки реализует в том числе и БФ с инверсиями, то синтез выполняется в два этапа.

Первый этап состоит в следующем.

1. В заданной БФ отсутствуют подформулы из восьми букв.

2. Подформула из семи букв (2 + 2) 1 + 2 не может быть реализована одной микросхемой.

3. В заданной БФ отсутствуют подформулы из шести букв.

4. Подформула из пяти букв (2 + 2) 1 реализуется одной микросхемой, так как она 5-универсальна. Остаток: (1 + 2) (1 + 1) + 1.

5. Остаток из шести букв реализуется одной микросхемой. Остаток: 1.

Таким образом, из-за неуниверсальности модуля при $q > 5$ из пяти шагов три не являются результативными.

Второй этап выполняется в обратном порядке.

2. Тип формулы, реализуемой последним элементом, не изменяется. В качестве представителя этого типа таблица настройки содержит формулу $f = (!\,g \vee !\,i\ !\,j)\,(!\,l \vee !\,m) \vee !\,n$.

1. Тип настройки первого элемента изменяется на дополнительный, так как от выхода этого элемента до выхода схемы расположено нечетное число инверторов. В качестве представителя этого типа таблица настройки содержит формулу $z = (!\,a \vee !\,b)\,(!\,c \vee !\,d) \vee !\,e$.

Заданная БФ реализуется при $a = !\,x_1$, $b = x_2$, $c = x_1$, $d = !\,x_2$, $e = x_3$, $g = z$, $i = !\,x_4$, $j = !\,x_5$, $l = !\,x_6$, $m = !\,x_7$, $n = !\,x_8$.

Отметим, что если использовать эту микросхему только в режиме 5-универсального модуля, трудоемкость синтеза уменьшается за счет усложнения схемы: число шагов на первом этапе сокращается на два, а число шагов на втором этапе увеличивается на один, так как в этом случае формула реализуется схемой из трех микросхем.

2.3. Построение универсальных микросборок и плат с высокой логической эффективностью

То обстоятельство, что 3-универсальный модуль с пятью логическими выводами [2] может быть реализован на одной микросхеме К1ЛР333 при $x_1 = x_7 = a$, $x_2 = x_4 = x_6 = d$, $x_3 = x_8 = b$, $x_5 = x_9 = c$, позволило автору решить для ВНИИ «Альтаир» (Москва) в рамках работы над отраслевым стандартом [20] следующую задачу: обеспечить максимальную логическую эффективность универсальной микросборке с 18 логическими выводами, в которой могут быть размещены четыре микросхемы малого уровня интеграции.

Из изложенного следует, что если применить три микросхемы К1ЛР333 и одну микросхему К1ЛБ333 с четырьмя двухвходовыми элементами И—НЕ, то на их основе могут быть построены входящие в состав микросборки [20] три 3-универсальных модуля с прямым и инверсным выходами каждый, у которых суммарное число логических выводов равно 18. Число этих микросборок *M*, необходимое для реализации произвольной булевой формулы в базисе {&, ∨, !} из *h* букв, определяется следующим соотношением [2]:

$$\left]\frac{h-1}{6}\right[\leqslant M \leqslant \left]\frac{2(h-1)}{9}\right[.$$

Этот же подход был использован автором в НПО «Аврора» при создании одной из систем управления судовыми техническими средствами для согласования большого числа логических выводов у микросхем, размещаемых на печатной плате, с относительно небольшим числом ее логических выводов при условии, что универсальная плата должна обладать максимальной логической эффективностью [2].

2.4. Синтез комбинационных схем из произвольных логических элементов

2.4.1. Синтез схем из двухвходовых элементов И—НЕ

Элемент И—НЕ реализует представителя одного из двух *PN*-типов ББФ в базисе $\{\&, \vee, !\}$ из двух букв, так как $z_1 = !(ab) = !a \vee !b$. Суперпозиция из двух таких элементов реализует ББФ $z = !((!ab)\,c) = ab \vee !c$. Следовательно, при $c = 1$ справедливо соотношение $z_2 = ab$, а при $b = 1$ — соотношение $z_3 = a \vee !c$.

Таким образом, построены виртуальный 2-универсальный модуль и виртуальный МЛМ с $k_{\text{м}} = 2.25$. Для приведенной выше формулы z из трех букв список формул, реализуемых виртуальным МЛМ, не содержит дополнительную к ней формулу, поэтому в дальнейшем для уменьшения трудоемкости двухэтапного синтеза будем применять только виртуальный 2-универсальный модуль. При этом метод в общем случае состоит из трех этапов, два из которых рассмотрены выше, а третий состоит в замене настроенных виртуальных модулей их реализациями из элементов И—НЕ.

Оценка сложности в этом случае имеет следующий вид:

$$h - 1 \leqslant L_4\,(h) \leqslant 2(h - 1).$$

Пример 2.12. Реализовать формулу, рассмотренную в примере *2.1*, схемой из двухвходовых элементов И—НЕ.

На рис. 2.3 приведена схема, построенная в результате первого этапа синтеза, а на рис. 2.4 — схема, построенная на втором этапе.

Так как построенная схема (рис. 2.4) не содержит модулей с пометкой «2», выполнять третий этап нет необходимости. Она состоит из девяти двухвходовых элементов, что соответствует нижней оценке сложности при h = 10. Верификация этой схемы выполняется с помощью подхода, изложенного в разд. 2.1.5. Этот метод был впервые описан в [21].

2.4.2. Синтез схем из набора микросхем серии 133

В [22] перебором было построено более 90 схем из микросхем К1ЛБ333, К1ЛБ334, К1ЛБ331, К1ЛБ332, К1ЛР331, К1ЛР333, при-

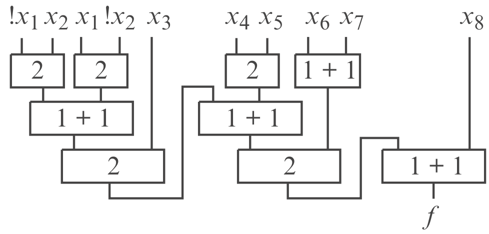

Рис. 2.3

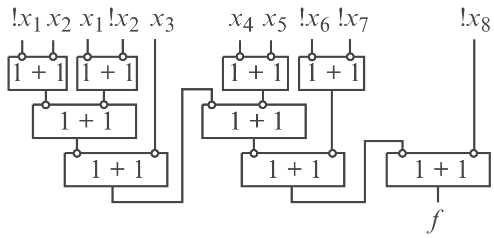

Рис. 2.4

чем суммарная сложность каждой из этих схем не превышала одного корпуса. Анализ этих схем показал, что для построенного виртуального МЛМ

$$k_{\text{м}} = \frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{4}{4} + \frac{10}{10} + \frac{24}{24} + \frac{35}{66} + \frac{16}{180} + \frac{5}{522} + \frac{1}{1532} = 5.63.$$

Таким образом, построен также и виртуальный 5-универсальный модуль.

Реализация БФ схемой из указанных микросхем выполняется в три этапа. На первых двух этапах синтез проводится на виртуальных МЛМ или виртуальных универсальных модулях, а на третьем — каждый из модулей в построенной структуре заменяется соответствующей схемой из заданных микросхем. При табличном задании БФУ число этапов увеличивается до четырех. При этом нулевой этап связан с построением БФ.

Из изложенного следует, что главная особенность предлагаемого метода состоит в предварительном исследовании всех функциональных возможностей заданных элементов в определенном классе формул, что резко упрощает последующий синтез.

Более подробно этот метод описан в [2,22]. Идея этого метода была использована при создании системы автоматизации проектирования дискретных устройств на микросхемах [23] и базовых матричных кристаллах [37].

Изложенный в настоящей главе формульный метод может применяться и при синтезе комбинационных схем в СБИС программируемой логики [24]. Можно считать, что предлагаемый метод вошел в научный «обиход», так как он упоминается или описывается в [25–34].

Выводы

1. Предложен метод синтеза комбинационных схем из произвольных (в указанном выше смысле), априори известных логических элементов, названный формульным, так как он основан на реализации БФ в базисах $\{\&, \vee, !\}$ или $\{\&, \vee, \oplus, !\}$, для двухместных операций которых выполняется сочетательный закон.

2. Главная особенность предлагаемого метода состоит в предварительном исследовании всех функциональных возможностей заданных элементов в определенных выше классах БФ, что резко упрощает последующий синтез.

3. При формульном задании функции в зависимости от свойств элементов синтез может выполняться в один, два и три этапа, а при табличном задании функции число этапов увеличивается еще на один. При этом построение схемы по БФ на первом этапе всегда проводится от ее входов к выходу (снизу вверх) .

4. Показано, что простой синтез обеспечивают модули, универсальные в классе произвольных БФ в указанных базисах из q букв (q-универсальные модули), а наиболее простой — положительно монотонные q-универсальные модули.

5. Предлагаемый метод отличается от известных тем, что он обеспечивает для практически произвольных логических элементов линейные оценки числа этих элементов, требующихся для реализации БФ в указанных базисах, от числа букв в ней, а для булевой функции — от числа заданных ее значений.

6. Показано, что при минимизации числа букв h в реализуемой БФ имеет место тенденция к сокращению числа весьма сложных q-универсальных модулей. Однако для конкретной БФ при сокращении числа букв может измениться ее структура, что в общем случае приводит к увеличению числа модулей. Установлены соотношения, при выполнении первого из которых сокращение числа букв в БФ до h_1 не увеличивает числа модулей, а при выполнении второго — с гарантией уменьшает их количество.

7. Предложен коэффициент многофункциональности логических элементов, позволяющий в отличие от известных показателей их логической эффективности установить линейную зависимость между числом букв в реализуемой булевой формуле и числом элементов в схеме, ее реализующей. Этот коэффициент для q-универсальных модулей равен q.

8. Предложен подход к формированию логически эффективных универсальных микросборок и плат, обеспечивающий согласование

относительно небольшого числа их логических выводов с большим числом этих выводов у микросхем, которые могут быть размещены на этих платах и в микросборках.

9. При использовании рассмотренного метода структура формулы (ее остаточной) «настраивает» применяемые элементы, в качестве которых, в частности, могут быть выбраны табличные преобразователи (постоянные запоминающие устройства) с q входами и мультиплексоры «2^q в 1» (при настройке константами 0 и 1) или «2^{q-1} в 1» (при настройке каждого из них константами 0 и 1, а также одной из переменных и ее инверсией). Использование элементов указанных типов, входящих обычно в состав логических блоков вентильных матриц, программируемых пользователями [35], делает каждый шаг декомпозиции результативным.

Литература

1. *Степановская И. А., Ускач М. А.* Представление булевых функций многофункциональными логическими элементами // Автоматика и вычисл. техника. 1973. № 4.
2. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Настраиваемые модули для управляющих логических устройств. Л.: Энергоиздат, 1981.
3. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* О многофункциональном использовании цифровых интегральных схем // Тез. докл. 5-й Всесоюз.науч.-техн. конференции «Проблемы создания систем управления судовыми техническими средствами». Л.: Судостроение, 1973.
4. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Многофункциональные модули из функциональных элементов // Рефераты докл. VI Всесоюз. совещ. по проблемам управления. М.: Наука, 1974.
5. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Вопросы выбора и применения многофункциональных логических модулей // Дискретные системы. Т.1.Симпозиум IFAC. Рига: Зинатне, 1974.
6. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Синтез комбинационных схем из многофункциональных логических модулей // Построение управляющих устройств и систем. М.: Наука, 1974.
7. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Оценки сложности предстоящих реализаций в задачах логического и технического проектирования // Теория релейных устройств. Труды XVI Всесоюз. школы-семинара. Челябинск: ЧПИ, 1976.
8. *Артюхов В. Л., Иванов А. А., Шалыто А. А.* Автоматизация проектирования комбинационных схем из универсальных модулей для управляющих систем. Л.: ИПК СП, 1987.
9. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Об оценках сложности реализации булевых формул древовидными схемами из настраиваемых модулей // Автоматика и телемеханика. 1981. № 11.
10. *Кукинов А. М.* Простой метод синтеза скобочных формул для недоопределенных булевых функций // Синтез дискретных автоматов и управляющих устройств. М.: Наука, 1968.
11. *Редькин Н. П.* О сложности реализации недоопределенных булевых функций // Автоматика и телемеханика. 1969. № 9.
12. *Данем Б., Норт Д.* Проблемы выбора логически эффективных основных ячеек // Синтез релейных структур. М.: Наука, 1965.
13. *Бабичева Е. И., Прангишвили И. В., Ускач М. А., Шаипов Н.* Некоторые критерии оценки эффективности логических модулей // Автоматика и телемеханика. 1968. № 3.

14. *Майоров С. А., Павленко В. В., Петухов Г. А., Скорубский В. И.* О выборе эффективных булевых функций // Изв. вузов. Приборостроение. 1970. № 1.

15. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Оценка логической эффективности интегральных микросхем // Автоматика и вычисл. техника. 1981. № 1.

16. *Прангишвили И. В., Ускач М. А., Копейкин Г. А.* Комплекс логических МДП-интегральных схем для систем автоматики и телемеханики // Приборы и системы управления. 1970. № 4.

17. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Применение многофункциональных модулей среднего уровня интеграции для построения комбинационных схем // Третье совещание «Логический синтез в дискретных однородных средах». М.: Ин-т проблем передачи информации, 1974.

18. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Применение многофункциональных модулей среднего уровня интеграции для построения комбинационных схем // Теория конечных автоматов и ее приложения. Рига: Зинатне, 1975. Вып. 5.

19. *Артюхов В. Л., Шалыто А. А.* Многофункциональный логический модуль. А. с. СССР № 1096637 // Бюл. изобр. 1984. № 21.

20. *Микросхемы* гибридные сложные — микросборки «Пакет». Руководство по применению. Отраслевой стандарт. ОСТ 5.8354—74.

21. *Артюхов В. Л., Бородулин В. К., Каталажнов Ю. В., Шалыто А. А.* Алгоритм построения логической схемы в базисе «И—НЕ» («ИЛИ—НЕ») по заданной формуле // Обмен опытом в радиопромышленности. 1973. № 10.

22. *Артюхов В. Л., Копейкин Г. А., Шалыто А. А.* Судовые управляющие логические системы. Л.: ИПК СП, 1977.

23. *Лекарев М. Ф., Мелехин В. Ф.* Автоматизация проектирования структур цифровых устройств. Л.: ЛПИ, 1984.

24. *Антонов А. П., Мелехин В. Ф., Филиппов А. С.* Обзор элементной базы фирмы ALTERA. СПб.: ЭФО, 1997.

25. *Гаврилов М. А.* Композиция и декомпозиция комбинационных автоматов // Теория автоматов. М.: Наука, 1976.

26. *Якубайтис Э. А.* Теория автоматов. Многофункциональные логические модули // Итоги науки и техники: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. М.: ВИНИТИ, 1976. № 13.

27. *Гаврилов М. А., Девятков В. В., Пупырев Е. И.* Логическое проектирование дискретных автоматов. М.: Наука, 1977.

28. *Малев В. А.* Структурная избыточность в логических устройствах. М.: Связь, 1978.

29. *Вирьянский З. Я.* Проектирование логических устройств судовой автоматики. Л.: Судостроение, 1979.

30. *Мищенко В. А., Козюминский В. Д., Семашко А. Н.* Многофункциональные автоматы и элементная база цифровых ЭВМ. М.: Радио и связь, 1981.

31. *Колосов В. Г., Мелехин В. Ф.* Проектирование узлов и систем автоматики и вычислительной техники. Л.: Энергоатомиздат, 1983.

32. *Пупырев Е. И.* Перестраиваемые автоматы и микропроцессорные системы. М.: Наука, 1984.

33. Справочник по микропроцессорным устройствам / А. А. Молчанов, В. И. Корнейчук, В. П. Тарасенко, Д. А. Россошинский. Киев: Техника, 1987.

34. *Угрюмов Е. П.* Проектирование элементов и узлов ЭВМ. М.: Высшая школа, 1987.

35. *Угрюмов Е. П., Грушвицкий Р. И., Альшевский А. Н.* БИС/СБИС с репрограммируемой структурой. СПб.: Гос. электротех. ун-т, 1996.

36. *Артюхов В. Л., Викентьев Л. Ф., Аляев Ю. А.* Автоматизация синтеза комбинационных схем из настраиваемых модулей. Л.: ИПК СП, 1985.

37. *Мелехин В. Ф., Душутина Е. В., Пышкин Е. В.* Автоматизация синтеза при логическом проектировании цифровых устройств на основе базовых матричных кристаллов // Труды СПб ГТУ. 1994. № 449.