Минобрнауки России
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Сыктывкарский государственный университет
имени Питирима Сорокина»

В.П. Одинец

ОБ ИСТОРИИ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПРИНЯТИИ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано УМО по математике педвузов и университетов Волго-Вятского региона в качестве учебного пособия для студентов математических направлений подготовки высших учебных заведений

Сыктывкар
Издательство СГУ им. Питирима Сорокина
2015

УДК 51:93
ББК 22.1: в6 О-
42

Печатается по постановлению научно-методического совета
ФГБОУ ВПО «Сыктывкарский государственный университет имени
Питирима Сорокина»

Рецензенты:

Медников В.В. – профессор, канд. экон. наук, профессор Института государственного управления, права и инновационных технологий (ИГУПИТ) – филиал в г. Санкт-Петербурге;

Якубсон М.Я. – доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа РГПУ им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург).

Одинец, В.П.

О-42 Об истории некоторых математических методов, используемых при принятии управленческих решений : учебное пособие / В.П. Одинец. – Сыктывкар : Изд-во СГУ им. Питирима Сорокина, 2015. – 108 с.

ISBN 978-5-906810-03-8

В основе книги лежат лекции, прочитанные в 2008–2010 гг. в Высшей экономической школе Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов для управленцев ОАО «ГАЗПРОМ». В книге, состоящей из трех частей, рассмотрены как классические, так и неоклассические и, наконец, современные математические методы, опирающиеся на компьютерные технологии и используемые при принятии управленческих решений.

Адресовано студентам, аспирантам и преподавателям вузов экономических и математических специальностей, а также филиалов академии госслужбы.

УДК 51:93
ББК 22.1: в6

ISBN 978-5-906810-03-8

Оглавление

Предисловие

Настоящая книга возникла из потребностей управленцев среднего и высшего звена ОАО «ГАЗПРОМ» в овладении современными математическими методами с использованием компьютерных технологий при принятии тех или иных управленческих решений, касающихся экономических вопросов. Книга дополнена классическими и неоклассическими методами, возникшими в XX веке и позволяющими адекватно сложности задачи применять те или иные методы.

Заметим сразу, что в книге не даются методы, используемые при управлении техническими системами, в частности адаптивное и робастное управление[1], а также методы, применяемые при управлении войсками. Хотя в основе ряда методов, используемых при управлении рисками в экономике, например логико-вероятностных методов, лежат идеи, первоначально нашедшие своё применение в военном деле, в частности в проблеме повышения живучести подводных кораблей.

В конце книги приведена основная литература, а в сносках – дополнительная. Кроме того, даны именной и предметный указатели. Биографии основных творцов приведены в сносках.

Автор благодарит рецензентов: профессора В.В. Медникова и доцента М.В Якубсона за ценные замечания, учтенные автором; профессора Е.Д. Соложенцева за ценную информацию по теории рисков. С особой благодарностью автор вспоминает д-ра экон. наук, профессора В.Е. Есипова, включившего тематику книги в программу повышения квалификации управленцев в ВЭШ СПбГУЭиФ и пригласившего автора для чтения 6 лекций в 2008–2010 гг. по данной теме.

Как обычно, все предложения и замечания можно направлять автору на адрес:w.p.odyniec@mail.ru.

Санкт-Петербург – Сыктывкар, сентябрь 2014 г.

[1] От англ. robust – здравый.

Введение

С глубокой древности человечество использует математические методы при принятии тех или иных управленческих решений в ходе решения разнообразных практических задач. Первоначально это были экономические задачи, позже к ним присоединились задачи военного характера.

Уже в папирусе Ахмеса[1] и в Московском папирусе[2] присутствуют задачи с экономическим содержанием, позволявшие обучать египетских управленцев, т.е. писцов, бывших одновременно «и законоведами, и статистиками, и вычислителями» [2, с. 13]. Так, в Московском папирусе, который старше на 200 лет папируса Ахмеса, в задаче № 24 требуется определить (даём современное изложение), сколько хлебов и сколько кувшинов пива можно получить из одной меры зерна, если из 25 мер получено 200 хлебов, 10 кувшинов пива, при условии, что выход пива составляет 1/10 выхода хлеба [3, с. 31–32][3] .

В.С. Голенищев

В другой культуре – культуре Древнего Двуречья – также издавна отмечается использование математики при

[1] Папирус писца Ахмеса, найденный в Фивах, относится к периоду XII династии Среднего царства Египта, т.е. к 1985–1795 гг. до н. э. [1], и был переписан писцом около 1650 г. до н. э. Большая часть папируса находится в Британском музее (Лондон), а остальная часть – в Нью-Йорке. Поскольку первым владельцем папируса был британский офицер Райнд, то папирус часто называют папирусом Райнда (Rhind Mathematical Papirus).

[2] Московский папирус принадлежит ко времени правления XI династии периода Среднего царства и был составлен в 1850 г. до н. э., т.е. либо при фараоне Сенусерте III, либо при фараоне Аменемхете III. Описание этого папируса сделал его первый владелец русский египтолог Владимир Семёнович Голенищев (1856–1947). Он был одним создателей мировой египтологии; родившись в Петербурге, он умер в Ницце по месту рождения своей жены. Свою знаменитую коллекцию папирусов он передал России ещё в 1909 г.

[3] Ответ: 20 хлебов или 2 кувшина пива.

решении тех или иных экономических задач. Сохранившиеся наиболее ранние клинописные тексты относятся к XXXV в. до н. э.

К периоду написания папирусов Московского и Ахмеса относится деятельность самого известного царя вавилонской династии – Хаммурапи (1792–1750 гг. до н. э.), о которой до нас дошли тысячи клинописных текстов. В них нашло отражение как развитие денежно-весовой системы мер, связанное с развитием торговли, так и зачатки кредитной политики, опирающейся на использование простого процента, хотя вавилонские ростовщические операции «рассчитывались не со ста, а с шестидесяти процентов: брали в год 12 шекелей с 1 мины, равной 60 шекелям» [4, с. 142][1].

Например, в одной из задач требуется «по данной величине уплачиваемых за год процентных денег в размере 1 мина и 40 шекелей определить величину капитала» [3][2].

Кроме простого процента вавилонская математика была близка и к понятию сложного процента. При этом вычисления опирались на наличие вычислительных таблиц. Заметим, что вычислительные таблицы применялись и при принятии решений на строительство с учетом расчета «фундаментов зданий, плотин, осадных насыпей и т. д.» [4, с. 233].

Уже греческий историк Геродот (484 г. до н. э. – 425 г. до н. э.) явно указывает на принятие египетским царем управленческого решения, опирающегося на математический расчет: «Если же от какого-нибудь надела река (Нил) отнимала что-нибудь, то владелец, приходя к царю, сообщал о происшедшем. Царь же посылал людей, которые должны были осмотреть участок земли и измерить, насколько он стал меньше, чтобы владелец вносил с оставшейся площади налог, пропорциональный установленному» [6, с. 184].

Перенесёмся теперь в другой очаг цивилизации – Древний Китай. Поразительно сходство экономических задач, решавшихся математическими методами в Древнем Китае и в древних Вавилоне и Египте.

Необходимость точного предсказания разлива Нила привела египтян к идее постоянного календаря (12 месяцев по 30 дней

---

[1] Следует помнить, что система счисления в Двуречье имеет основанием число 60.

[2] Ответ: 8 мин и 20 шекелей.

плюс 5 дополнительных дней в конце каждого года). Другим вкладом египтян в практическую жизнь, которым мы повседневно пользуемся, явилось разделение суток на 24 часа [7, с. 92]. Очевидно, числа 12, 24, 30, 360, используемые при исчислении времени египтянами, – это отголоски 60-ричного счисления вавилонян, хотя у самих вавилонян календарь был чисто лунный.

Удивительно, но в Древнем Китае уже в эпоху Шань-Инь (XVII–XII вв. до н.э.) солнечный год был также разделён на 12 месяцев (по 29 и 30 дней). Продолжительность года составляла 365 дней, но периодически вставлялись добавочные месяцы[1].

Говоря о принятии управленческих решений на основе математических расчётов в Древнем Китае, нельзя не сказать о знаменитом трактате «Математика в девяти книгах»[2]. Так, в пятой книге, носившей название «Шан гун» (Оценка работ) дан расчёт трудозатрат при строительстве крепостных стен, валов, плотин, каналов, а также других земляных работ. При этом вычислялись объёмы различных тел: прямоугольного параллелепипеда, прямоугольной призмы, пирамиды, конуса и т.д., одновременно постулировались объёмы выработки на одного человека в день, полученные на основе практики [9].

В книге VI из того же трактата идёт речь о распределении налогов (зерновых и стоимостных) между уездами и о пропорциональных «поставках людей» для выполнения государственных повинностей.

К IV в. н. э. относится китайский «Математический трактат пяти ведомств», в котором ставилась узкопрактическая задача: научить будущих чиновников решать с помощью математических методов те задачи, которые им встретятся при работе в ведомостях [10, с. 50][3].

[1] За тысячу лет до новой эры уже при династии Чжоу китайскими астрономами было установлено, что продолжительность солнечного года равна 365,25 суток, а лунный месяц равен 29, 5 суток [8].

[2] *«Математика в девяти книгах»* – это классическое произведение, созда- вавшееся в X–II вв. до н. э. [9].

[3] К практическим задачам, которые должны были решать чиновники с помощью математики, относились: а) умение вычислять площади разной конфигурации; б) определение количества и стоимости снаряжения и провианта для групп людей, посылаемых для выполнения разных работ; в) умение осущест-

Вернёмся вновь на две тысячи лет назад (1700–1450 гг. до н. э.) в Средиземноморье, на остров Крит. Это было время расцвета минойской цивилизации, связанное с именем легендарного критского царя Миноса. Согласно древнегреческому мифу, в окрестностях Кносса, главного города Крита, находился лабиринт, построенный по повелению Миноса архитектором Дедалом, в котором находилось чудовище Минотавр, раз в 9 лет пожиравшее 7 юношей и 7 девушек – дань Афин Миносу. Задача нахождения пути из лабиринта – это, говоря современным языком, типичная задача теории графов. Математическое решение этой задачи было предложено в 1895 г. (т.е. через 3500 лет после постановки задачи) Гастоном Тарри [11][1].

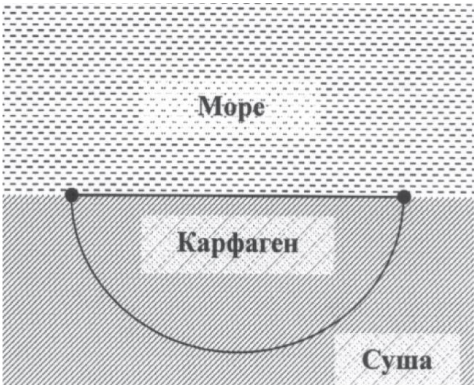


Рис. 1. К задаче Дидоны

влять справедливый обмен зерна на те или иные вещи, включая шелк; г) умение справедливо распределять налоги как между структурными подразделениями (прежде всего уездами), так и между конкретными хозяйственными единицами; д) умение вычислять трудозатраты при строительстве разных объектов и проведении земляных работ.

[1] Чтобы выбраться из лабиринта, достаточно соблюдать следующее правило: «Никогда не проходить дважды по одному и тому же коридору в одном направлении; находясь на перекрёстке x, не выбирать того коридора, который привёл на перекрёсток x в первый раз, если только имеется возможность другого выбора [12, с. 77]. В древнегреческих мифах Тесей, убивший Минотавра, выходит из лабиринта с помощью нити, данной ему заранее Ариадной, дочерью Миноса, и закреплённой одним из концов у входа в лабиринт.

К IX в. до н. э. (точнее к 826–814 гг. до н. э.) относится основание Карфагена (на территории современного Туниса). Карфаген был основан Дидоной, сестрой царя финикийского города Тира. Согласно легенде, Дидона попросила у местного племени участок земли, который можно обхватить шкурой одного быка. После получения согласия племени и получения шкуры Дидона предложила разрезать шкуру на узкие ремни и связать их. Далее, полученным канатом (конечной длины), концы которого закрепляются на прямолинейном побережье, требовалось в зависимости от формы каната и точек закрепления концов охватить наибольшую территорию[1]. Эта задача, интуитивно решенная Дидоной, была исторически первой задачей вариационного исчисления [13, с. 13–14], завершенного в XVIII в. Эйлером (Euler Leonhard: 1707–1783) и Лагранжем (Joseph Louis Lagrange: 1736–1813).

В рамках греческой культуры (VI в. до н.э. – IV в. н. э.) в процессе создания математики как науки решались и прикладные задачи, в том числе с явно экономическим содержанием. К ним можно отнести задачу квадрирования (в данном случае измерения площади) участка земли в форме круга, задачу удвоения (объёма) куба (из золота), задачи по смешению (в частности, золота и серебра) и др. [14; 15].

С VII в. начинается расцвет арабской культуры, сопровождавшийся развитием и математики. Среди задач, решавшихся с применением математики, можно выделить задачи на раздел имущества, в том числе и наследуемого. Живший на рубеже XI и XII вв. великий арабский учёный и поэт Омар Хайям (1048–1131) предложил календарь, по точности превосходящий наш григорианский[2]. Другому выдающемуся арабскому учёному – Мухаммеду ал-Хорезми (787–850) – мы обязаны не только индийскими (названными в Европе арабскими) цифрами, но и понятием алгоритма [16].

Кстати об Индии. Поскольку дроби были там открыты ещё во втором тысячелетии до новой эры, а число «0» появилось уже в 3 в. до н. э., то многие практические задачи решались в Индии и точнее, и проще [16].

---

[1] Дидона предложила форму каната – полуокружность.

[2] Календарь, предложенный О. Хайямом, даёт ошибку в 1 сутки за 5000 лет, а григорианский календарь – за 3200 лет [16, с. 65–66].

Появление в Европе первых университетов (по образцу багдадского Дома Мудрости) на рубеже XI и XII вв., а также новые задачи в области торговли, учёта, страхового дела (здесь и страхование имущества от пожаров в городах и страхование морских перевозок) привели к появлению ученых, решавших эти задачи: это и Леонардо Фибоначчи (L. Fibonacci: 1180–1250)[1], и Лука Пачоли (L. Pacioli: 1445–1517)[2] и Блез Паскаль (B. Pascal: 1623–1662)[3].

---

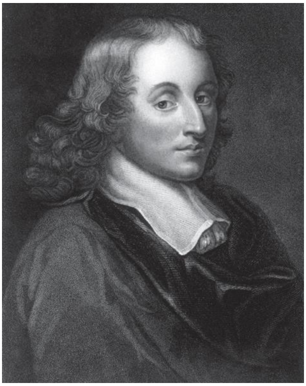
[1] Л. Фибоначчи, называемый также Леонардо Пизанский (именно так он сам называл себя), первый по времени выдающийся европейский математик, в «Книге абака» (Liber abaci, 1202) в трёх главах (VIII–X) рассматривает при- меры принятия решений по торговым операциям на основе коммерческих вы- числений с помощью индийской позиционной системы [17]. В частности, от- рицательные числа он интерпретировал как долг. Более полно эти идеи были представлены в не дошедшем до нас его трактате «Di minor guisa»(«Меньший род») по коммерческой арифметике.

[2] Лука Пачоли еще в детстве был учеником в мастерской знаменитого ху- дожника Пьеро делла Франческа (Pietro della Francesca: 1415□–1492) и воспринял от мастера как любовь к живописи, так и любовь к математике. В возрасте 32 лет он становится профессором математики в университете в Перуджи. Однако не книги по математике принесли ему известность, а опус «Трактат о счетах и записях» (1494 г.) [18], содержащийся в книге «Сумма арифметики, геоме- трии, учения о пропорциях и отношениях». Переизданный отдельно в 1504 г. в Венеции, опус вскоре был забыт, только в XIX в., с развитием капитализма, вспомнили о Луке Пачоли как о первом обобщившем в своём опусе достиже- ния бухгалтерии предыдущих эпох, и прежде всего венецианской бухгалтерии. Впрочем, иллюстрации его друга Леонардо да Винчи (1452□–1519) к рукописно- му подарочному трактату Л. Пачоли «О божественной пропорции» (1498 г.) и так бы сделали его имя знаменитым [19].

[3] Великий французский математик, естествоиспытатель и литератор Блез Паскаль в возрасте 19 лет (т.е. в 1642 г.) начал работу над созданием сумми- рующей машины, необходимой его отцу при распределении пошлин и нало- гов. Первый готовый экземпляр был преподнесён в 1645 г. будущему канцлеру Франции Пьеру Сегье (Pierre Séguer: 1588–1672), выказавшему заинтересован- ность в создании машины, названной «паскалиной». Всего до 1652 г. было соз- дано около 50 «паскалин». К сожалению, изготовление этих машин для того времени оказалось слишком сложным, а потому экономически невыгодным [20]. Любопытно, что Б. Паскаль в 1654 г. получает правильный ответ на вопрос французского писателя Антуана Гомбо, известного под псевдонимом «шевалье де Мере» (Antoine Gombaud:1607–1684), о распределении ставок между игро- ками при прерванной серии партий в кости [21]. Этой задачей занимался ещё Лука Пачоли, но получил неправильный ответ].

Л. Фибоначчи

Л. Пачоли



Б. Паскаль

Хотя, надо признать, основная заслуга в развитии методов торговли, учета и страхования в Европе в XIII–XVI вв. лежала не на ученых, а на практиках. Так, ростовщики во Франции, выходцы из Ломбардии (Италия), организовали в XV в. ломбарды. Не случайно в это же время (1458 г.) в Италии выходит книга итальянского купца, родом из хорватского города-республики Дубровник, Бенедетто Котрульи (Benedetto Cotrugli: 1416–1469) «О торговле и совершенном купце»[1], в которой, приводя пример учёта и опираясь на опыт предшественников, он располагал кредит на левой стороне, а дебет – на правой. Также он приводил (в двух колонках) примеры учёта оригинальных денежных средств, переведенных в местную валюту. Им же высказана совершенно здравая мысль, что бухгалтерский учет служит как для (технического) управления предприятием, так и для принятия тех или иных управленческих решений.

[1] Лат. *«Della Mercatura et del Mercante Perfetto»*.

Часть I

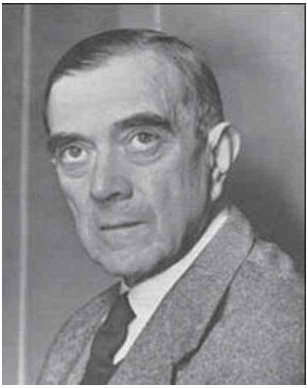
Классические методы

§ 1. Методы классического анализа

И. Кеплер

1. Задача Кеплера. Исторически математический анализ ведет своё начало от работы знаменитого астронома Иоганна (Яна) Кеплера (Johannes Kepler: 1571–1630) «Стереометрия винных бочек» (1615)[1], где решался вопрос о максимальном объёме деревянной бочки при заданных ограничениях на затраты дерева, разумеется с учетом удобства изготовления. Фактически в этой работе было получено необходимое условие экстремума функции одной переменной.

Макс Лоренц



Коррадо Джини

2. Кривая Лоренца**.** Впрочем, и вид графика функции тоже имеет значение. Так, в 1905 г. американский экономист Макс Отто Лоренц (Max Otto Lorenz: 1876–1950)[1] ввёл в рассмотрение кривую, названную кривой Лоренца, которая отражает (в процентах) распределение дохода семьями с разным достатком.

Кривая Лоренца показывает, насколько фактическое распределение доходов между разными семьями отличается от равномерного распределения.

3. Коэффициент Джини. В 1912 г. итальянский статистик Коррадо Джини (Corrado Gini: 1884–1965)[2] предложил на основании кривой Лоренца расчёт дифференциации денежных доходов населения [23]. При этом совокупность получателей доходов делилась на 5 равных групп (квинтильных). Далее определялась доля дохода, которой владеет каждая группа населения. Наконец, сам коэффициент Джини рассчитывается как отношение площади между кривой Лоренца и диагональю к ½ (площади прямоугольного треугольника под диагональю).

---

[1] Макс Лоренц, математик и экономист, в 1905 г. опубликовал статью *«Методы измерения концентрации богатства»* [22].

[2] Коррадо Джини стал профессором статистики в университете Кальяри в 1909 г. С 1913 г. – профессор в Падуе, с 1925 г. до выхода на пенсию – профессор Римского университета. Уже в 1920 г. Джини основал международный статистический журнал «Метрон», а в 1934 г. – международный демографический журнал «Genus», был редактором обоих журналов до самой смерти в 1965 г. Однако нельзя забывать, что циклическая теория роста населения, по которой «молодые нации должны расширяться за счёт более старых наций», предложенная Джини ещё в 1927 г., была не случайно основой идеологии итальянского фашизма [24; 25]. В 1938 г. Джини предложил новое семейство средних, зависящих от двух параметров, для налогообложения. Позже это семейство было названо его именем. (Подробнее см.: Джини К. *Средние величины.* М.: Статистика, 1970. 447 с.)

В 2013 г. в России по заказу одной из общероссийских сетевых компаний был проведен репрезентативный опрос. Заранее было принято (на основе покупательной способности), что семьи с душевым доходом менее 11 тыс. руб. можно будет отнести к числу «бедных». С душевым доходом менее 34 тыс. рублей, но более или равным 11 тыс. рублей − к «среднему классу». И наконец, с душевым доходом более (или равным) 34 тыс. рублей к «богатым». Число бедных составило 50 %, «среднего» класса – 35 %, а богатых – 15 %. Считая, что средний доход «богатых» не превосходит 100 тыс. руб. на человека в месяц, можно посчитать коэффициент Джини. В этом случае площадь ниже графика Лоренца будет равна 0,21475, а коэффициент Джини будет (0.5 – 0.21475)/0,5 = 0,5706. Напомним, что на рис. 2 по вертикали откладывается совокупный доход, а по горизонтали численность населения (всё в процентах). Считается, что коэффициент Джини, рассчитанный для всей страны, не должен превышать 0,3. Таков, например, коэффициент Джини у скандинавских стран и у Швейцарии.

4. Кривая Кузнеца. В 1955 г. американский экономист Саймон Кузнец ((Шимен (Абрамович) Кузнец; Simon Kuznets: 1901–1985), заметил, что неравенство в доходах у групп населения на определённом этапе развития связано с ростом экономического развития [26]. С. Кузнец[1] показал (на примере двухсекторной эко-

[1] Шимен Кузнец родился в Пинске (Российская империя). Окончил реальное училище в Харькове в 1917 г. И тогда же взял имя Семён. С 1918 по 1921 гг. учился в Харьковском коммерческом институте. По окончании института работал в отделе статистики Всероссийского центрального совета профсоюзов (Южное бюро). В это же время Кузнец публикует свою первую научную работу «Денежная заработная плата рабочих и служащих г. Харькова в 1920 г.» [27]. Получив весточку от отца, уехавшего еще до Первой мировой войны на заработки в Нью-Йорк, семья (мать и двое братьев) решаются выехать в 1922 г. в Польшу (а Пинск, по Советско-польскому договору 1921 года, вошел в состав Польши). Оттуда уже Шимен Кузнец выехал в Нью-Йорк (мать умерла в Варшаве). Продолжив учебу в Колумбийском университете, он в 1924 г. защищает магистерскую диссертацию, а еще через 2 года – докторскую. В 1927–1961 гг. С. Кузнец работал в Национальном бюро статистических исследований, одновременно преподавал в Пенсильванском университете, а позже в Университете Джонса Хопкинса. С 1961 г. до выхода на пенсию в 1971 г. С. Кузнец – профессор Гарвардского университета. В том же году С. Кузнец получил премию им. Альфреда Нобеля, учреждённую Шведским Банком, за «эмпирически обосно-

номики), что экономическое развитие ведет первоначально к увеличению неравенства (определяется с помощью коэффициента Джини), а затем к его уменьшению.

В общем случае кривая Кузнеца похожа на перевёрнутую букву U.

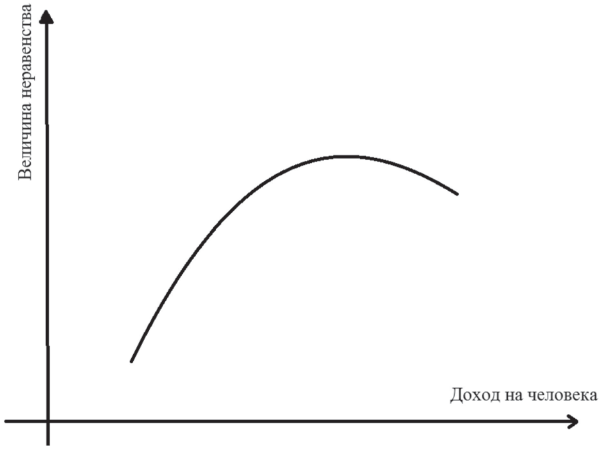
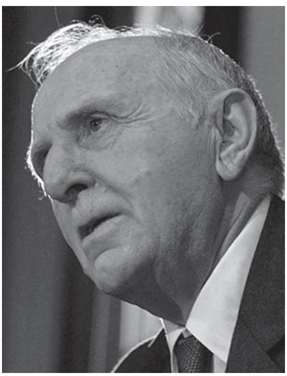


Рис 3. Кривая Кузнеца

Реально кривая Кузнеца отчетливо видна на примере топливно-экономического комплекса и сельского хозяйства Воронежской области на протяжении последних 20 лет, где рост в сельском хозяйстве (устойчивый по 10 % в год) наблюдается только в последние 4 года.



Саймон Кузнец

5. Функция полезности. Функция полезности возникла первоначально в рамках теории потребительского спроса. При этом предполагается, что потребитель действует рационально, т.е. его поведение подчиняется ряду аксиом. В частности, аксиома транзитивности ут-

---

ванное толкование экономического роста». Во время Второй мировой войны он был заместителем директора Бюро планирования и статистики Совета по военному производству [28].

верждает, что если некоторая группа товаров X предпочитается другой группе Y, а Y предпочитается Z, то X предпочитается Z. Аксиома полноты утверждает, что потребитель имеет возможность в соответствии со своими предпочтениями получить любую доступную комбинацию товаров. Наконец, аксиома отбора гласит, что потребитель стремится к своему наиболее предпочтительному состоянию. Теперь уже можно формализовать понятие функции полезности.

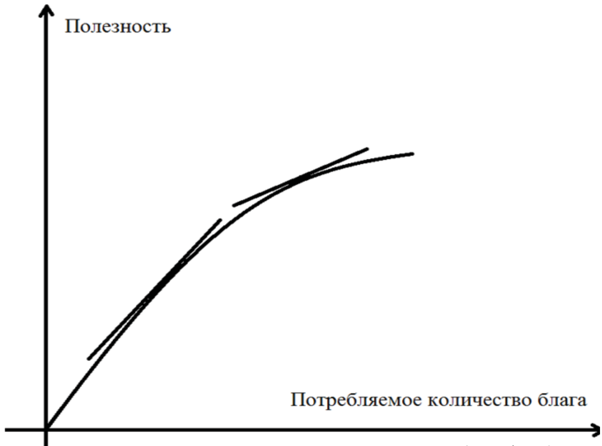


Рис 4. Функция полезности (график)

Первоначально это сделали Джон фон Нейман (John von Neumann: 1903–1957)[1] и Оскар Моргенштерн (Oskar Morgenstern: 1902–1977)[2] в знаменитой работе 1944 г. «Теория игр и экономическое поведение» [29].

Пусть **a** некоторое множество альтернатив и пусть на этом множестве определено отношение предпочтения $\models$[3]. Пусть **R** – множество вещественных чисел. Функцию h: **A** → **R** будем называть *функцией полезности,* если выполнено условие

$$x \models y \leftrightarrow h(x) \geq h(y),\ \ (x, y \in \mathbf{A})$$

[1] Биографию Джона фон Неймана см. далее в § 4.

[2] Биографию Оскара Моргенштерна см. далее в § 4.

[3] Если задано нестрогое отношение предпочтения $\models$, то будем говорить, что $x \sim y$ (x эквивалентно y), если $x \models y$ и $y \models x$; будем говорить, что x строго предпочтительнее y ($x \succ y$), если $x \models y$, но x не эквивалентно y.

Джон фон Нейман

Оскар Моргенштерн

Необходимым условием существования функции полезности является рациональное поведение потребителя, т.е. выполнение у отношения предпочтения $\vdash$ аксиом транзитивности (из условий $x \vdash y$ и $y \vdash z$ следует $x \vdash z$), полноты (для любых $x, y \in A$ либо $x \vdash y$, либо $y \vdash x$, либо $x = y$) и отбора[1].

Достаточным условием существования функции полезности является непрерывность предпочтений. При этом (если **A** несчётно) построенная функция полезности сама является непрерывной [30, теорема 3.1, с. 47].

Если множество **a** является выпуклым, то функция полезности h будет квазивогнутой[2]. Если предпочтения отвечают свойству монотонности (строгой монотонности), то функция полезности h будет монотонной (строго монотонной).

Линия (поверхность, гиперповерхность) уровня функции полезности называют *кривой* (поверхностью, гиперповерхностью) *безразличия*.

Она задаётся уравнением:

$$h(x) = \text{const}.$$

Для двух переменных наиболее известной функцией полезности является производственная функция с постоянной эластичностью замещения (constant elasticity of substitution) вида:

$$h\,(x,y) = (\alpha x^{1/p} + \beta y^{1/p})^p.$$

[1] У Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна аксиома отбора заменена на две аксиомы: независимости и протяженности.

[2] Пусть $A \in R^n$ – выпуклое множество. Пусть $f\colon A \to R$ – непрерывная функция. Будем называть f квазивогнутой, если для любого вещественного числа t множество $\{x \in A\colon f(x) \geq t\}$ выпукло [30, с. 69].

При р = 1 функция полезности принимает вид:

$$h(x,y) = \alpha x+\beta y.$$

Эта функция при постоянной эластичности описывает совершенные заменители.

При р → ∞ получаем функцию

$$h(x,y) = \min\{\alpha x, \beta y\}.$$

Эта функция называется *производственной функцией Леонтьева*[1] («затраты выпуск»). В данном случае она описывает совершенные дополнители.

При р → 0 ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$) получаем *производственную функцию Кобба – Дугласа*[2] (Cobb – Douglas production function) от двух факто-ров:

$$h(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}.$$

При этом, если $\alpha + \beta = 1$, то имеем постоянную отдачу от расширения производства [32].

Возвращаясь к потребительскому спросу, отметим очевидную связь функции полезности и цены. В России первый фундаментальный труд[3] (1895) на эту тему принадлежит Роману Михайловичу Орженцкому (Roman Orzęcki: 1863–1923), в которой автор разделяет предпочтения на два класса: психолого-личностные (в частности, мода) и экономические – цена.

Одним из первых, кто в 60-х годах XIX века сделал попытку дать математическую модель потребления, был Уильям Джевонс (William Stanley Jevans: 1833–1882). Эта попытка содержала две работы[4].

---

[1] О Василии Васильевиче Леонтьеве речь пойдет дальше (см. § 4).

[2] Чарльз Кобб (Charles Wiggins Cobb: 1875–1949) – американский математик и экономист, Пол Дуглас (Paul Howard Douglas: 1892–1976) – американский экономист и общественный деятель, опубликовали в 1928 г. статью *«Теория производства»* [33], в которой и появилась впервые производственная функция, названная позже функцией Кобба – Дугласа.

[3] Орженцкий Р.М. *Полезность и цена. Политико-экономический очерк.* – Одесса, 1895. – 95 с.

[4] Jevons W.S. *Notice of a general mathematical theory of political economy* // British Assoc. for the Advancement of Science. Report of the 32 Meeting Transaction of the Section. London: L.J.Murray, 1862. p. 158–159; Jevons W. S. *Brief of general mathematical theory of political economy* // Journal of Statistic. Society of London, 1866, XXIX, 2, pp. 282–287.

§ 2. Методы дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений

О том, что основу некоторых моделей, позволяющих принимать управленческие решения, представляют дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных), стало ясно на рубеже XVIII–XIX вв. в связи с развитием физики. В середине XIX в. на это указывал К. Маркс[1] (Karl Heinrich Marx: 1818–1883), не случайно часто посвящая свой досуг решению дифференциальных уравнений.

Рассмотрим некоторые примеры. Так, например, фирма-*монополист*, когда путём варьирования объёма выпускаемой ею продукции «y» она имеет возможность корректировать цену p(y) предлагаемого ею продукта.

а) в простейшем виде у фирмы-монополиста получаемый доход **R(y)** имеет вид

$$\mathbf{R}(y) = p(y)\cdot y.$$

Предельный доход **MR(y)** – это производная от **R**(y) по y, т.е.

---

[1] К. Маркс родился в Трире в 1818 г. в еврейской семье, перешедшей в люте- ранство. Учился философии и литературе первоначально в Боннском универси- тете (1835), а затем в Берлинском. В 1841 г. защитил докторскую диссертацию в Йене, что позволило ему жениться на дочери аристократа Женни фон Вестфа- лен (Jenni von Westphalen: 1814□–1881). В 1844 г. в Париже Маркс познакомился с Фридрихом Энгельсом (Friedrich Engels: 1821□□–1894), ставшим его другом на всю жизнь. В условиях поражения революции 1848 г. Маркс переезжает в Лон- дон, посвятив все свое внимание организации коммунистического движения и написанию своего главного труда «Капитал». При жизни Маркса вышел первый том (1867), второй и третий тома, отредактированные Энгельсом, вышли соот- ветственно в 1885 и в 1895 гг. Четвертый том, в котором была дана история раз- вития экономической мысли с названием «Теория прибавочной стоимости», от- редактировал Карл Каутский, вышел в 1905□□–1910 гг. Грандиозный труд Маркса содержит в себе, говоря современным языком, элементы как микроэкономики, так и макроэкономики. В частности, у Маркса появляется двухсекторная мо- дель экономики. В 1965 г. Мичио Моришима (Michio Morishima: 1923□–2004) ввёл понятие модели Маркса – фон Неймана, добавив в модель фон Неймана ряд условий из схемы воспроизводства Маркса. Не случайно М. Блауг в своей книге «100 великих экономистов до Кейнса» [47] пишет: «Тома “Капитала” со- держат множество замечательных образцов анализа, из которых современные экономисты ещё многому могут научиться».

$$\mathbf{MR}(y) = p'(y) \cdot y + p(y).$$

В итоге имеем линейное дифференциальное уравнение с постоянным коэффициентом, если

$$p'(y) = \text{const} \qquad [34, с. 245];$$

б) кредит в 80000 евро должен быть погашен в течение 10 лет в равных ежемесячных взносах при годовой процентной ставке, равной 12 %. Обозначим через *a* ежемесячный взнос, через x_n величину остающегося долга через n месяцев. Очевидно, x_0 = 80000, x_{120} = 0. Тогда имеем:

$$x_{n+1} = (1 + 0.12/12)\, x_n - a$$

Решая это рекуррентное уравнение (см., например [35, с. 41, 44]), получим:

$$x_n = x_0(1.01)^n + 100a(1 - 1.01^n).$$

Откуда

$a \approx 80000 \cdot 0.01437095 \approx 1147.77$ евро;

в) пусть дан парк товаров длительного пользования данного вида (например, яхты, катера, дачные домики, дорогая мебель и т.д), зависящий от времени t, который обозначим через y(t). Через L обозначим уровень насыщения товарами данного вида в данном регионе; через s обозначим некоторую положительную константу, зависящую от вида товаров. Тогда функция спроса будет производной от функции парка товаров, и при этом

$$dy/dt = sy(L - y).$$

Решая это дифференциальное уравнение (с разделяющимися переменными), получаем:

$$y = L/(1 + e^{-Lc - sLt}),$$

где c – некоторая константа.

Положим $b = Ls$, $a = -Lc$.

Тогда

$$y = L/(1 + e^{a - bt})$$

(Подробнее анализ этого решения см. в [36, с. 134–137].

г) к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных сводятся задачи максимизации прибыли в случае двух ресурсов – капитала и труда.

Пусть p_0 – цена выпускаемой фирмой продукции;

p_1 и p_2 – цены на капитал и труд; x_1 и x_2 – количество капитала и количество труда; $f(x_1, x_2)$ – производственная функция фирмы.

Обозначим через **PR**(x_1, x_2) прибыль фирмы. Тогда задача максимизации прибыли может быть записана как

$$\mathbf{PR}(x_1,x_2) = p_0 \cdot f(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2 \to (\max)$$

Для решения задачи остаётся решить систему двух уравнений в частных производных (приравнивая производные от **PR** (x_1, x_2) по x_1 и по x_2 нулю) (см., например [34, с. 162–163]);

д) задача оптимального управления с непрерывным временем обычно задается системой n обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x_1 = f_1 (t, x_1,\dots, x_n, u_1, \dots, u_r),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

$$x_n = f_n (t, x_1,\dots, x_n, u_1,\dots, u_r),$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор состояний управляемой системы (элемент *фазового* пространства); $x(t) = (x_1(t),\dots, x_n(t))$ – траектория состояний (называемая *фазовой* траекторией), она описывает поведение управляемой системы во времени; $u = (u_1,\dots,u_r)$ – управляющий параметр, который может меняться в пределах произвольного замкнутого ограниченного множества U r-мерного векторного пространства $(u^1,\dots, u^r)$.

Пара $(x, u) = (x_1,\dots,x_n; u_1,\dots, u_r)$ называется *процессом управления.*

Ставится задача: выбрать управление u(t) в классе кусочно-непрерывных функций таким образом, чтобы точка x прошла из заданного положения x_0 (начальное положение траектории) в другое заданное положение x_1 (конечное положение траектории) за минимальное время. При этом соответствующие *траектория* x(t) и *управление* u(t) называются *оптимальными*.

Прежде чем переходить к понятию оптимального процесса управления, напомним о решении задачи на условный экстремум функции многих переменных.

Итак, пусть требуется найти максимум или минимум функции:

$$f(X) = f(x_1,\ldots, x_n)$$

при условиях

$$g_i(x_1,\ldots, x_n) = b_i,\ \ i = 1,\ldots, m;\ m < n.$$

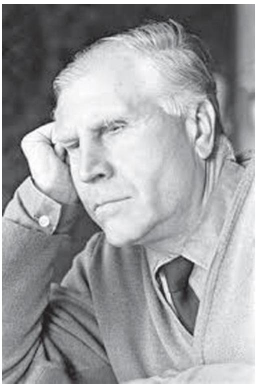
Функцию $F(X, \lambda)$ вида

$$F(X, \lambda) = \lambda_0 f(X) + \lambda_1(b_1 - g_1(X)) + \ldots + \lambda_m(b_m - g_m(X))$$

называют функцией Лагранжа, а числа $\lambda_1,\ldots, \lambda_m$ – множителями Лагранжа.

Для нахождения локального экстремума функции f ищут стационарную точку функции F, дифференцируя функцию F по x_i и по λ_j ($i = 1,\ldots, n$; $j = 1,\ldots, m$) и приравнивая полученные выражения к нулю. В найденной точке $(x_1^*,\ldots, x_n^*; \lambda_1^*,\ldots, \lambda_m^*)$ первые n координат и дадут искомый экстремум.

Возвращаясь к задаче управления, отметим, что в ней качество



Л.С. Понтрягин

А.А. Милютин

А.Я. Дубовицкий

процесса управления оценивается *целевым функционалом* – аналогом функции Лагранжа. Допустимый процесс управления называют *оптимальным*, если он минимизирует целевой функционал.

Необходимые условия оптимальности процесса управления были сформулированы во второй половине 50-х гг. XX в. [37; 38] и названы *принципом максимума* Л.С. Понтрягина (1908–1988)[1] [34, с. 825–826]). Некоторые результаты по развитию принципа максимума Понтрягина были получены ещё учениками Л.С. Понтрягина – В.Г. Болтянским (р. 1925), Р.В. Гамкрелидзе (р. 1927) и Е.Ф. Мищенко [38; 39]. Однако наиболее глубоким обобщением этого принципа мы обязаны в первую очередь А.А. Милютину (1925–2001)[2], который вместе с А.Я. Дубовицким (1923–2007)[3] в

[1] Лев Семёнович Понтрягин родился в Москве. В 14 лет в результате взрыва примуса он стал слепым. Однако, проявив волю, закончил 9-летнюю школу и поступил на механико-математический факультет МГУ. В 1929 г. он заканчивает МГУ, ещё студентом достигнув ярких результатов. В частности, на втором курсе (1926) он получает доказательство теоремы, которую через 4 года назовут теоремой Куратовского, о невложимых в плоскость графах. В следующем году (1927) он обобщает закон двойственности Александера. Неслучайно в 1931 г. Л.С. Понтрягина приглашают для научной работы на год в США. Закон двойственности, опубликованный им в 1932 г., теперь носит имя Понтрягина. До 1952 г. он успешно занимается топологией. Однако в конце 1952 г. круто меняет область исследований, занявшись проблемами управления динамических систем и вернувшись, тем самым, к задачам, которые он начал решать ещё в 1934 г. совместно с А.А. Андроновым (1901–1952), а позже занялся дифференциальными играми. В частности, уже в работе [40] им была решена задача управления антиракетой.

[2] Алексей Алексеевич Милютин родился в 1925 г. в Москве. В 1943 г. он поступает на механико-математический факультет МГУ. В аспирантуре сам выбрал тему диссертации, ответив в итоге (1951) положительно на вопрос С. Банаха (1892–1945) об изоморфизме пространства непрерывных функций на отрезке и на квадрате. Фактически же в диссертации было доказано, что каждое метрическое пространство относится к классу непрерывных образов обобщенных канторовских множеств относительно эпиморфизмов, допускающих линейный оператор усреднения. Этот класс пространств был назван через 15 лет (Александром Пелчинским [41]) пространствами Милютина. К сожалению, результаты диссертации не были опубликованы и математический мир узнал о решенной проблеме только во время проведения XV Математического Конгресса в Москве в 1966 г. После 1954 г. всю свою энергию А.А. Милютин отдал обобщениям принципа максимума, добившись впечатляющих результатов.

[3]Абрам Яковлевич Дубовицкий родился в 1923 г. в городке Лубны Полтавской области. Во время Великой Отечественной войны воевал в танковых войсках. После ранения и получения инвалидности в 1945 г. поступил на механико-математический факультет МГУ. Уже дипломная работа Дубовицкого привлекла внимание Л.С. Понтрягина. Более того, несколько иную и гораздо более слабую теорему Сарда он в работе [44] назвал теоремой Дубовицкого. Кроме работ (вместе с А.А. Милютиным) по обобщению принципа максимума

ряде работ конца 60–70-х гг. строит теорию принципа максимума для задач с регулярными и нерегулярными смешанными ограничениями [42; 43].

§ 3. Методы экстраполяции и построения рекуррентных уравнений

а) рассмотрим следующую задачу:

Пусть машинный парк состоит из x_0 машин, которые постепенно выходят из строя. Поломавшуюся машину заменяют новой. Пусть p_k – вероятность работы машины в течение k единиц времени:

$$(1 \le k \le N;\ p_1 + \ldots + p_N = 1).$$

Для k > N имеем $p_K = 0$, что означает: через N лет пользователь перестаёт пользоваться машиной, ранее не ломавшейся. В первый промежуток времени наступает $p_1 x_0$ аварий, и на столько же нужно пополнить машинный парк. Число новых машин, необходимых в первый промежуток времени:

$$x_1 = p_1 x_0 .$$

Аналогично во второй промежуток времени требуется дополнительно x_2 машин

$$x_2 = p_2 x_0 + p_1 x_1 ,$$

и так далее, вплоть до (N-1) промежутка:

$$x_{N-1} = p_{N-1} x_0 + p_{N-2} x_1 + \ldots + p_1 x_{N-2} .$$

А для натурального n ≥ N имеем:

$$x_n = p_1 x_{n-1} + p_2 x_{n-2} + \ldots + p_N x_{n-N} \qquad (i)$$

Это уравнение (линейное рекуррентное уравнение с постоянными коэффициентами) называется ***уравнением обновления*** [35, с. 7273].

Пусть, например, уравнение обновления имеет вид:

[42; 43) А.А Дубовицкому принадлежит эффективный метод численного решения уравнений химической кинетики.

$$x_n = 0.7\,x_{n-1} + 0.3\,x_{n-2}$$

Решая его, получим:

$$x_n \approx 77 + 23(-0.3)^n \qquad \text{при } n \geq 2;$$

б) рассмотрим теперь динамические системы с дискретным временем, которые описываются с помощью итераций в виде нелинейных рекуррентных уравнений первого порядка

$$x_{n+1} = S\,(x_n), \text{ где } n \in \{\,0, 1, 2,\ldots\},$$

а отображение S задается выражением:

$$S\colon X \to X \subset R, \text{ (где R – множество вещественных чисел),}$$

а $x_0 \in X$ является начальным значением последовательности (траектории).

Если $x_n \equiv c$, то последовательность (x_n) называется *стационарной.*

Если выполняется

$$\lim x_n \to c \qquad \text{при } n \to \infty, \ (x_0 \neq c),$$

то последовательность (x_n) называют *асимптотически стационарной.*

В этом случае будем говорить, что точка «с» является *аттрактором* (или неподвижной притягивающей точкой). В противном случае, когда ни одно решение, кроме стационарного, не сходится к «с», точку с назовём *репульсором* (или неподвижной отталкивающей точкой).

В терминах модуля производной функции S по x в точке «с» существует простой критерий быть точке аттрактором или репульсором (если модуль меньше 1, то это аттрактор, если больше 1, то репульсор). Это во многих случаях позволяет прогнозировать поведение траекторий в зависимости от начальной точки x_0. Однако не всегда. Рассмотрим пример, когда функция S(x) имеет вид:

$$S(x) = \{\, x/(1-x) \text{ при } x \in [0, ½];\ 2x-1 \text{ при } x \in (1/2, 1]\}.$$

Заметим, что почти все траектории в этом примере имеют достаточно большие периоды роста, прерываемые короткими нере-

В.И. Арнольд

Мишель Хенон

гулярными «ямами», после чего случайным образом принимают небольшие значения. Более того, такие траектории являются непрогнозируемыми, точнее нельзя заранее сказать, в какой части пространства будут находиться очередные точки.

Такие траектории (их называют *блуждающими*) обычно исследуют при помощи распределения частот [35, с. 267];

в) в предыдущем пункте нами были рассмотрены одномерные нелинейные отображения. Но можно рассматривать нелинейные отображения и в пространствах больших размерностей. Мы рассмотрим два примера.

Первый пример принадлежит В.И. Арнольду (1937–2010)[1]. Он определяется с помощью итерационных уравнений координат:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \pmod 1, \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \pmod 1. \end{cases}$$

Заметим, что **отображение арнольда** сохраняет площадь преобразуемой замкнутой фигуры. Можно также считать, что отображение Арнольда преобразует тор T(x,y)

---

[1] Владимир Игоревич Арнольд родился в Одессе, но учился в московской школе. Окончил механико-математический факультет МГУ в 1959 г. В 1957 г. вместе с А.Н. Колмогоровым решил 13-ю проблему Гильберта. (В 1956 г. Колмогоров показал, что любая непрерывная функция нескольких переменных может быть представлена как комбинация конечного числа функций от трёх переменных. Арнольд же показал, что непрерывная функция трех переменных может быть представлена в виде 18 функций двух переменных, что и завершило решение 13-й проблемы.) Арнольд – соавтор теоремы о стабильности интегрируемых гамильтоновых систем. Внес большой вклад в теорию динамических систем, теорию катастроф, геометрическую и алгебраическую топологию, алгебраическую геометрию, теорию сингулярностей и классическую механику. Многие из написанных им книг переведены на иностранные языки. В.И. Арнольд – создатель большой научной школы.

$= S^1 \cdot S^1$ в себя. При этом длина окружности S^1 считается равной 1 [35, с. 317–318].

Другой пример принадлежит Мишелю Хенону (1931–2013)[1]. **Отображение Хенона** задаётся рекуррентными уравнениями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a \cdot (x_n)^2 + y_n, \\ y_{n+1} = b_n \cdot x_n, \end{cases}$$

где $a < 1$ и $|b| < 1$ являются параметрами. Его каждая итерация уменьшает площадь преобразуемой области [45; 35, с. 320–321].

§ 4. Методы неотрицательных матриц

Теория неотрицательных матриц, используемая при принятии управленческих решений, берёт своё начало в работах Франсуа Кенэ (François Quesnay: 1694–1774)[2] по анализу экономической таблицы [46, с. 360–369].

Мировой кризис начала 30-х гг. XX века привлёк внимание

---

[1] Мишель Хенон (Michel Hénon) – французский математик и астроном, ро- дился в Париже в 1931 г. После Второй мировой войны стал работать в Ин- ституте астрофизики в Париже и в обсерватории этого института в Ницце. Ос- новные работы по астрономии относятся к динамике звезд и эволюции колец Сатурна. В математике он известен как создатель отображения (Хенона) с так называемым странным аттрактором. Не позднее 70-х годов он, модернизировав метод Монте-Карло, построил численный метод, оказавшийся весьма полезным при исследовании звёздных кластеров.

[2] Франсуа Кенэ родился в 1694 г. в городке Мер около Парижа. Проявив большое упорство, он в значительной степени самостоятельно овладел искусством врачевания. В 1718 г. получил докторскую степень по хирургии. В 1737 г. он получает профессорское звание. В 1752 г. становится лейб-медиком короля Франции. В салоне короля его замечает Дидро и просит для своей «Энциклопедии» написать две статьи на экономические темы. Статьи появились в 1756 г. В 1758 г. вышла его «Экономическая таблица», которая, по сути, является таблицей затрат-выпуска, выраженная в терминах денежных потоков [46]. С двумя своими учениками, маркизом де Мирабо (1715–1789) и Дюпон де Немур (1739–1817), с каждым в отдельности, он выпускает книги «Сельская философия» (1763) и «Физиократия» (1769), в которых развиваются фактически реформаторские идеи физиократизма: устранение в сельском хозяйстве остатков средневековых пошлин, замену множества налогов единым налогом на ренту, объединение маленьких участков в крупные земельные владения [47]. Не случайно физиократизм стал одной из духовных предтеч движения «зелёных».

Франсуа Кенэ

не только экономистов к проблеме моделирования структур национальных экономик, но и общественности.

Начнём с модели В.В. Леонтьева.

а) итак, в экономической системе пусть производятся, продаются, потребляются (и инвестируются) n типов продуктов ($i = 1,..., n$).

Каждая отрасль производит только один тип продуктов, а различные отрасли производят различные типы продукции. Под производственным процессом подразумевается преобразование ряда типов продуктов в некоторое количество продуктов одного соответствующего типа.

Если для производства единицы i-го продукта в j-ой отрасли нужно затратить a_{ij} единиц i-го продукта ($i, j = 1, 2\ldots, n$), то эти n^2 величин называются *технологическими коэффициентами* и предполагаются постоянными, а матрица

$$A = (a_{i,j}), \quad (i, j = 1,\ldots, n)$$

называется *матрицей технологических коэффициентов.*

Пусть x_i выпуск i-го продукта в единицу времени (например, в год). Величину x_i называют *валовым выпуском* ($i = 1,\ldots, n$). Часть валового выпуска потребляется в виде затрат, необходимых для производства.

Эта величина будет:

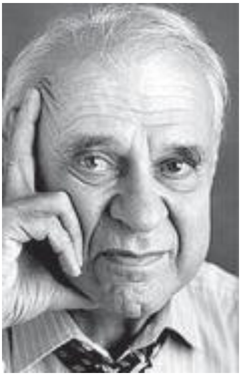
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Соответствующий чистый выпуск получается вычитанием из валового выпуска полного количества затрат и приравниванием к конечному спросу c_i, что даёт систему уравнений:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i \quad (i = 1,\ldots, n). \qquad (*)$$

Перепишем последнее уравнение в матричной форме.

Пусть $X = (x_i)$, $C = (c_i)$ – матрицы столбцы ($i =1,\ldots, n$);



В.В. Леонтьев

$A = (a_{ij})$ – квадратная матрица вида $n \cdot n$. Тогда

$$X - AX = C \text{ или } X(E - A) = C, \qquad (**)$$

где E – квадратная матрица вида $n \cdot n$, у которой по главной диагонали стоят единицы, а остальные нули. Если $(E-A)^{-1}$, обратная матрица к матрице (E–A), (если она существует), то систему (**) можно переписать:

$$X = C\,(E-A)^{-1}.$$

Системы (*) или (**) являются основными в модели Леонтьева[1] и позволяют проводить

[1] Василий Васильевич Леонтьев родился в семье профессора экономики труда Петербургского университета в 1906 г. В 16 лет поступил в Петроградский университет. По окончании университета в 1925 г. преподавал экономическую географию. Поскольку отец в это время работал в Торгпредстве в Берлине, то В.В. Леонтьев подал прошение на получение визы в Германию для продолжения образования в Берлинском университете. В конце 1925 г. он получил разрешение на поездку. В Германии его научными руководителями стали профессора экономии Зомбарт Вернер (Sombart Werner: 1863–1941) и выпускник Санкт-Петербургского университета экономист и статистик Владислав Иосифович Борткевич (Bortkiewicz Ladislaus von: 1868–1931). После успешной защиты диссертации, посвященной исследованию народного хозяйства как непрерывного процесса, Леонтьев едет на год в Китай по приглашению советником министра железных дорог. В 1931 г. В.В. Леонтьев эмигрирует в США и становится сотрудником Национального бюро экономических исследований, а в 1933 г. получает американское гражданство. Несколько позже он стал преподавать в Гарвардском университете. И именно тогда (1936) появилась его статья «Количественные отношения затрат и выпуска в экономической системе Соединённых Штатов» [49]. Именно за эту работу в 1973 г. В.В. Леонтьев получает премию им. А. Нобеля (в просторечии «Нобелевскую премию»). Отметим, что еще в 1925 г. у В.В. Леонтьева вышла работа: Баланс народного хозяйства СССР. Методологический разбор работы ЦСУ // Плановое хозяйство. 1925. № 12. С. 254-258. Во время Второй мировой войны В.В. Леонтьев был консультантом по экономическому планированию ВВС США. В начале января 1947 г. В.В. Леонтьев принял участие в знаменитом симпозиуме в Кэмбридже (США), определившем развитие компьютерных наук в США на десятилетия вперёд [51, с. 37]. В 1970 г. избран президентом Американской экономической ассоциации. В.В. Леонтьев неоднократно посещает СССР. В 1990 г. получает honoris causa Ленинградского университета. Умер в феврале 1999 г.

анализ межотраслевых связей. Этот метод получил название «затраты-выпуск».

Сущность метода «затраты-выпуск» состоит в определении уровней валового выпуска по заданному внешнему конечному спросу [48, с. 124–131; 49]. При этом предполагается, что матрицы X, C и A неотрицательны, т.е. не содержат отрицательных элементов. Это обеспечивает работоспособность, или *продуктивность,* модели Леонтьева [50];

б) теперь рассмотрим модель расширяющейся экономики фон Неймана. Предварительно введем некоторые обозначения. Через **A** и **B** обозначим две матрицы вида m·n, т.е.

$$\mathbf{A} = (a_{ij}),\ \mathbf{B} = (b_{ij}), \text{ где } (i = 1,\ldots m;\ j = 1,\ldots, n).$$

Векторы-столбцы каждой из матриц обозначим через $\mathbf{A}^j$ и $\mathbf{B}^J$, где $j = 1,\ldots, n$.

Векторы-строки каждой из матриц обозначим через $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{B}_i$, где $i = 1,\ldots, m$.

Через $(\mathbf{A}^j)^T$ и $(B^J)^T$ обозначим транспонированные векторы-столбцы, т.е. векторы-строки. Наконец под произведением вектора-строки на вектор-столбец будем понимать сумму попарных произведений соответствующих элементов обоих векторов.

Итак, пусть имеется **m продуктов** и **n производственных** (базисных) **процессов**. При этом j-й базисный процесс преобразует матрицу-столбец $\mathbf{A}^j$ в $\mathbf{B}^j$, т.е. один набор продуктов в другой (возможно совпадающий с первым). Более того, в каждом j-м процессе в столбце $\mathbf{B}^j$ может быть ненулевых элементов больше, чем один. (В этом существенное отличие от модели Леонтьева.)

Будем также предполагать, что

$$a_{ij} \geq 0,\ b_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n)\ . \tag{1}$$

Сумма элементов любого столбца $\mathbf{A}^j$ строго больше нуля

$$(j = 1,\ldots,n). \tag{2}$$

Сумма элементов любой строки $\mathbf{B}_i$ строго больше нуля

$$(i = 1,\ldots m). \tag{3}$$

Условие (1) очевидно. Условие (2) означает, что в каждом процессе j используется хотя бы один тип продукта. Условие (3) означает, что каждый продукт может быть произведен в некотором (из данных) производственном процессе.

Пусть **P** = (p_i) – вектор-столбец цен соответствующих продуктов (i = 1,…,m).

До сих пор время и изменение интенсивности процесса с течением времени нами не учитывалось. Будем считать, что имеем периоды функционирования производственных процессов.

Пусть t – номер периода (t = 0, 1, 2,…).

Пусть оценка i-го продукта $v_i(t)$ будет равна

$v_i(t) = p_i$ + норма ренты за i-й продукт в периоде t (i = 1,…, m).

Пусть **V(t)** = ($v_i(t)$) – вектор-столбец оценок продуктов в периоде t.

Пусть $x_j(t)$ – интенсивность функционирования j-го процесса в периоде t (j = 1,…, n).

Пусть **X(t)** = ($x_j(t)$) – вектор-столбец интенсивностей в периоде t.

Предположим, что неотрицательные величины $v_i(t)$ и $x_j(t)$ (i = 1,…,m; j = 1,…, n) в периоде t уже определены. Тогда величина запаса i-го продукта, готового к производственному употреблению, в периоде (t+1) определяется выражением:

$$b_i(t) = \mathbf{B_i} \cdot \mathbf{X(t)}, \ (i = 1,\dots, m).$$

Через **b(t)** обозначим вектор-строку ($b_i(t)$), (i = 1,…, m).

Полная стоимость выпуска j-го процесса при единичной интенсивности его функционирования, рассчитанная при системе цен p_i, равна

$$c_j = \mathbf{B^J} \cdot \mathbf{P}, \ (j = 1,\dots, n), \text{ а } \mathbf{P} \text{ – вектор-столбец цен } (p_i)$$

Пусть **C** = (c_J) – вектор-строка полных стоимостей.

Рассмотрим теперь ограничения, связанные с номенклатурой выпуска и оценкой всех потребляемых продуктов в денежном выражении в (t+1) периоде:

$$A_i \cdot X(t+1) \le b_i(t), \ (i = 1,\dots, m), \quad (4)$$

$$x_j(t) \ge 0, \ (j = 1,\dots, n), \quad (5)$$

$$(\mathbf{A}^j)^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{V(t)} \geq c_j, \quad (j = 1,\dots, n), \tag{6}$$

$$v_i\,(t) \geq 0, \quad (i = 1,\dots, m), \tag{7}$$

Для получения требования равенства заработанного национального дохода произведенному национальному продукту нам понадобится ещё одно ограничение на $v_i(t+1)$ и $x_j(t+1)$

$$\mathbf{b(t)\cdot V(t+1) = C\cdot X(t+1).} \tag{8}$$

Так как

$$\mathbf{b(t)\cdot P = C\cdot X(t),}$$

то соотношение (8) можно переписать в виде:

$$\mathbf{b(t)(V(t+1) - P) = C\cdot X(t+1) - C\cdot X(t) = C\cdot\,(X(t+1) - X(t)).}$$

Фон Нейман[1], изучая систему (4)–(8), показал возможность су-

[1] Джон (Янош) фон Нейман родился в конце декабря 1903 г. в семье бан- ковского адвоката в Пеште. В 1913 г. его отец Макс Нейман получил дворян- ский титул, с той поры и Янош добавлял к своему имени приставку «фон». В 1911 г. Янош поступает в евангелическую гимназию, проводившую занятия на немецком языке, и, кроме того, с 15 лет занимается дополнительно с только что вернувшимся из Вены после защиты диссертации математиком Габором Шего (Gάbor Szegő: 1895–1985). В 1923 г. были опубликованы первые две матема- тические работы Яноша. В связи с желанием отца Яноша сделать из сына фи- нансиста или хотя бы инженера, в 1921 г. Янош поступает в Будапеште в част- ный католический университет им. Петера Пазманя (Pάzmάny Péter university) и Высшую техническую школу в Цюрихе. В 1926 г. он защищает докторскую диссертацию по философии в университете им. Петера Пазманя (основной предмет – математика, вспомогательные – экспериментальные физика и химия) под руководством Липота Фейера (Lipót Fejér: 1880–1959) и становится при- ват-доцентом Берлинского университета, публикуя чуть ли не ежемесячно ра- боты по математике. В 1930 г. его приглашает университет в Принстоне (штат Нью-Джерси). В Принстоне Янош меняет своё имя на Джон. (Кстати, в Берлине с 1926 г. он назывался Иоганн.) С 1933 г. он приглашается на должность про- фессора Института Перспективных исследований в Принстоне и остаётся на этой должности до самой смерти (от рака) в 1957 г. В 1937 г. в ежегоднике ма- тематического коллоквиума, попеременно проводившегося в Лейпциге и Вене, на немецком языке вышла статья Дж. фон Неймана, содержавшая модель рас- ширяющейся экономики [52]. До 1945 г. эта статья была фактически неизвестна американским экономистам.Только перевод на английский язык (в Rev.Econ. Studies, 13, 1945–1946), сделал её общедоступной. О другой работе фон Нейма- на с Оскаром Моргенштерном [29] шла речь в § 1. Остаётся добавить, что Дж. фон Нейман внес вклад и в создание ядерного оружия, и в создание компью- теров [51], был одним из создателей математических основ квантовой физики.

ществования ситуации динамического равновесия в этой системе, т.е. существования таких последовательностей $\{v_i(t)\}$, $\{x_j(t)\}$, которые удовлетворяют ограничениям (4)–(8) и, кроме того, условиям:

$$v_i(t) = \beta^t \cdot p_i, \quad (i=1,\dots, m); \tag{9}$$

$$x_j(t) = \alpha^t \cdot x_j, \quad (j=1,\dots, n), \tag{10}$$

где α, β, p_i, x_j – неотрицательные специальным образом выбранные константы. При этом суммы элементов векторов $\mathbf{P} = (p_i)$ и $\mathbf{X} = (x_J)$ строго больше нуля.

При анализе существования динамического равновесия системы (4)–(8) Дж. фон Нейман применил обобщение теоремы Брауера (Brouwer)[1] о неподвижной точке [52].

В заключение этого параграфа скажем несколько слов об одной конференции, результаты которой были опубликованы в 1951 г. в Нью-Йорке и Лондоне (см. ниже § 7 и книгу [70]). На этой конференции три доклада[2] о развитии моделей Леонтьева и фон Неймана и их связи с линейным программированием сделал эмигрировавший из Румынии в 1948 г. математик, статистик и экономист Николас Джорджеску-Реген (Nicholas Georgescu-Roegen: 1906–1994)[3]. Из этих работ позже выросла как его зна-

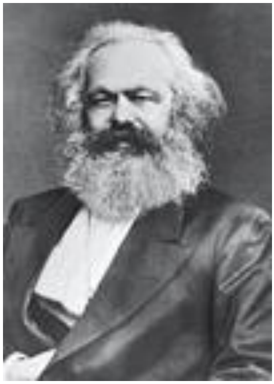
[1] Лейтзен Брауер (Luitzen Egbertus Jan Brouwer: 1881–1966) – голландский математик, один из основателей интуиционизма [51, с. 73]. Теорема о непод- вижной точке, доказанная Брауером в 1909 г., восходит к работе А. Пуанкаре (1886 г.)

[2] 1)*The Aggregate Linear Production Function and its Applications to von Neumann's Economic Model*, p. 98–115; 2) *Relaxation Phenomena in Linear Dynamic Models*, p. 116–131; 3) *Some properties of a Generalized Leontief Model*, p. 165–176.

[3] Николае Георгеску (в США – Николас Джорджеску-Реген) родился в Бухаресте, в Румынии, в 1906 г. В 1926 г. он заканчивает Бухарестский университет по специальности «Математика» и уезжает для продолжения образования в Париж. В Парижском университете он изучает экономику, а уже в 1930 г. защищает докторскую диссертацию. После чего едет на два года в Лондон, где в университетском колледже Лондона изучает под руководством Карла Пирса (Karl Pearson: 1857–1936) статистику. Вернувшись в 1932 г. в Румынию, получает должность профессора статистики в Бухарестском университете, где и работает до 1946 г. Эмигрировав в 1948 г. в США, становится профессором экономики в университете Вандербилта (Нэшвил), где и работал с 1950 до 1976 гг.

менитая теория энтропии в экономике[1], опирающаяся на второе начало термодинамики, так и экологическая экономика.

Николас Джорджеску-Реген



Карл Маркс

Напомним также, что в 1965 г. известный японский экономист М. Моришима[2] предложил динамическую модель фон Неймана дополнить условиями из схемы воспроизводства К. Маркса. С тех пор эта модель носит название модель Маркса – фон Неймана. Заметим также, что разделение всей экономики на n секторов (n>2) позволило перевести трудовые ценности, использованные Марксом, в обыкновенные цены. Впервые это заметил и обосновал крупнейший дореволюционный российский экономист и статистик Владислав Иосифович Борткевич (Ladislaus von Bortkiewicz: 1868–1931)[3], который с 1901 г. преподавал в Берлинском университете.

[1] Georgescu-Roegen N. *The Entropy Law and the Economic Process.* Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press, 1971.

[2] Моришима М. *Равновесие, устойчивость, рост* / пер. с англ. М.: Наука, 1972. – 282 с.; Morishima M. *Marx's Economics: A dual theory of value and growth.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1973; Morishima M., Catephores G. *Value, Exploitation and Growt*h. – New-York: McGraw-Hill, 1978.

[3] О роли В.Л. Борткевича в развитии экономической науки, а также статистики, в частности развитии теории малых выборок, см. в [47, с. 41–43], а также в «Вестнике Санкт-Петербургского университета». Сер. 5. Экономика, (2010), вып. 4, с. 113–124. (*Письма М.В. Птухи к В.И. Борткевичу* / авт. предисл. А.Л. Дмитриев).

§ 5. Методы теории вероятностей и математической статистики

При принятии управленческих решений важной характеристикой является риск. Классическая теория минимизации риска опирается на формулу Байеса. Эта формула позволяет определить вероятность определенного события при условии, что уже произошло другое статистически взаимозависимое с ним событие[1].

Работа Томаса Байеса (Bayes Tomas: 1702–1761)[2] вышла через два года после его смерти под редакцией философа Ричарда Прайса (Price Richard: 1723–1791) [53]. К сожалению, даже публикация не сделала эту работу известной, и через полвека (1812) Лаплас (Laplas Pierre Simon: 1749–1827)[3] в своей знаменитой книге «Аналитическая теория вероятностей» переоткрывает формулу Байеса [54]. Формула Байеса нашла широкое применение с

---

[1] Напомним, что условной вероятностью события В при условии состояв- шегося события А с вероятностью $P(A)>0$ (обозначается $P(B|A)$) называется величина $P(B|A)=P(AB)/P(A)$. В формуле Байеса $P(AB)=P(A|B)\,P(B)$.

[2] Томас Байес родился в Лондоне в семье пресвитерианского священника. Три года (1719–1722) изучал в Эдинбургском университете логику и богосло- вие. Позже сам стал священником в пресвитерианской церкви. Под вероятно- стью подразумевал уровень доверия. Байесу принадлежит также работа *«Очер- ки к решению проблемы доктрины шансов»*.

[3] Пьер Симон Лаплас родился в крестьянской семье в нормандском депар- таменте Кальвадос. Учился в школе бенедиктинцев, а позже в университете города Кан в Нижней Нормандии. Уже в 17 лет он публикует в Турине свои первые мемуары, посвященные интегральному исчислению. Эта работа об- ратила на себя внимание парижских учёных. Лапласа приглашают в Париж, и Д’Аламбер помогает ему устроиться преподавателем в Военную Академию. В 1773 г. за работу по исследованию устойчивости Солнечной системы его из- бирают адъюнктом Парижской Академии наук. Своим главным трудом Лаплас считал написание *«Небесной механики»*: первые два тома вышли в 1799 г., а последний (V том) за два года до смерти □ в 1825 г. Уже с 1795 г. Лаплас читает в Нормальной школе лекции по теории вероятностей, а в 1812 г. выходит его большая книга *«Аналитическая теория вероятностей»*. В этой книге Лаплас развил теорию ошибок и способ наименьших квадратов, позволивших находить наивероятнейшие значения измеренных величин и степень достоверности этих подсчетов. Желая популяризации теории вероятностей, Лаплас в 1814 г. издает
«Опыт философии теории вероятностей», где разъясняет основные положе- ния и значения этой теории. (Эта книга была впервые издана в России ещё в 1908 г.). Умер Лаплас в 1827 г., будучи маркизом и членом палаты пэров.

развитием компьютерной техники. Так, например, в экспертных системах машина логического вывода часто работает на основе байесовской оценки решения.

Томас Байес

Пьер Лаплас

Остальная часть параграфа посвящена изучению, главным образом, теории временных рядов, т.е. последовательности наблюдений, упорядоченных во времени.

Среди других видов статистического анализа анализ временных рядов выделяется наличием порядка, в котором производится наблюдение. Одной из важнейших целей наблюдения временных рядов является возможность предсказать будущее на основании знания прошлого и, как следствие, возможность управлять процессом, порождающим ряд.

Пусть моменты времени t перенумерованы: $t = 1, 2, \ldots, T$, и пусть последовательность наблюдений $\{y_{t}\}$ рассматривается как сумма *детерминированной последовательности* $\{f(t)\}$, которую при анализе временных рядов принято называть *систематической* составляющей и *случайной последовательности* $\{u_t\}$, подчиняющейся некоторому вероятностному закону.

Итак, имеем модель наблюдаемого временного ряда:

$$y_1, y_2, \ldots, y_T \quad \text{или} \quad y_t = f(t) + u_t, \text{ где } t = 1, 2, \ldots, T. \qquad (1)$$

Первоначально анализ временных рядов базировался на моделях, в которых влияние временного параметра проявлялось только в систематической составляющей $\{f(t)\}$.

Связано это было с тем, что К. Гаусс (Carl Friedrich Gauss: 1777–1855), один из создателей теории временных рядов, применял теорию, главным образом, в астрономии и геодезии, где среднее значение случайной составляющей (т.е. математическое ожидание $E(u_t)$) тождественно равно нулю, дисперсия равна некоторой постоянной, и значения u_t в различные моменты времени не коррелированы, что приводит к тому, что любую зависимость от времени включают в систематическую составляющую $\{f(t)\}$.

Последовательность $\{f(t)\}$ может зависеть как от некоторых неизвестных величин, так и от известных величин, меняющихся со временем. В этом случае функцию $f(t)$ принято называть *функцией регрессии.*

Временные последовательности $\{f(t)\}$ часто называют *трендами.*

Обычно различают два типа трендов. Один тип представляют медленно меняющиеся функции времени, например ежегодный национальный доход.

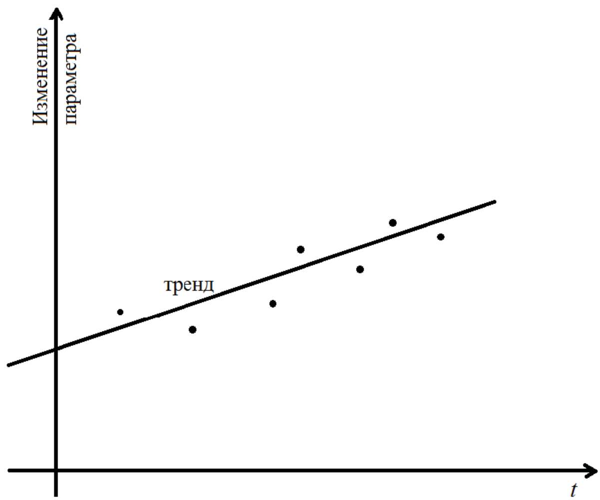


Рис. 5. Изменение параметра и его тренд

К другому типу принадлежат циклические последовательности, например котировка акций компаний, производство которых носит сезонный характер. Пусть $y_t = f(t) + u_t$, где случайная составляющая u_t нормально распределена с нулевым средним и единичной дисперсией.

Последовательные значения y_t разбросаны случайным образом по обе стороны от кривой $y = f(t)$.

К сожалению, даже зная вид кривой и зная закон распределения ошибки, информация о значениях $y_1,\ldots, y_{t-1}$ не помогает в предсказании значения y_t.

Одной из моделей, в которой влияние временного параметра проявляется в случайной составляющей, является стационарный случайный процесс.

Примером такого процесса является простейший процесс авторегрессии, когда последовательность $\{y_t\}$ задается стохастическим рекуррентным уравнением первого порядка вида

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t,\ t = 2, 3,\ldots \tag{2}$$

(Подробнее о процессах авторегрессии см. [55, с. 16–19]).

Влияние времени может быть представлено в обеих составляющих: систематическая составляющая $f(t)$ может быть трендом во времени, а случайная составляющая u_t образует стационарный случайный процесс.

Например, временной ряд $\{f(t)\}$ может складываться из долговременного и сезонного изменений, а колебательные компоненты, образующие $\{u_t\}$, могут быть описаны процессом авторегрессии.

Тренд $f(t)$ может иметь вполне определённую структуру и определяться конечным числом параметров. Например, при изучении потребления населением продуктов шоколадной группы важнейшими параметрами являются: реакция спроса на продукты шоколадной группы при изменении общего расхода на душу населения (условно отражающего изменение дохода), реальной цены на шоколадные изделия и, наконец, реальной цены на товар-субститут (заменитель с теми же свойствами, например конфеты, глазированные шоколадом) [36, с. 60].

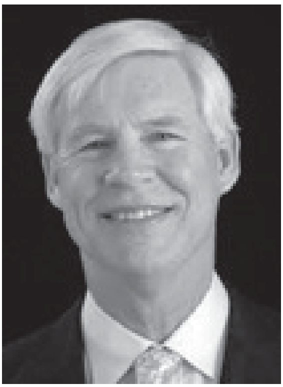
Если тренд не описывается столь точно, то для его оценивания можно использовать непараметрические методы, такие как сглаживание [53, с. 60–76]. Подробный пример см. в [36, с. 54–68].

При моделировании экономических процессов и принятии на основе анализа этих моделей управленческих решений кроме анализа временных рядов используется регрессионный и корреляционный анализы, а также проверка гипотез [56, гл. 11–13].

Впрочем, ещё в 30-е гг. XX столетия большинство экономистов относились отрицательно к использованию статистических методов в обосновании экономических теорий, считая, что экономические теории носят необратимый характер.

В 1941 г. норвежец Трюгве Магнус Ховельмо (Trugve Magnus Haavelmo: 1911–1999) в своей диссертации «Вероятностный подход в эконометрии»[1] попытался совместить вероятностный и математико-статистический подходы для эмпирической проверки постулатов экономической теории. В 1989 г. Трюгве Ховельмо получил Нобелевскую премию по экономике (будем уж так говорить) «за свои разъяснения в основах теории вероятностей и анализ одновременных экономических структур».

Ховельмо показал, что если сформулировать теоретические положения в терминах теории вероятностей, то методы, применяемые в математической статистике, могут использоваться в тестировании экономических теорий и прогнозировании экономических процессов. В основе такого подхода лежит очевидный постулат, что экономическая теория имеет дело не с решениями отдельных индивидуумов, а с результатом деятельности и приня-


Трюгве Ховельмо ***Роберт Ф. Ингл*** ***Клайв Грэнджер***

[1] Опубликована диссертация в Гарварде в 1944 г. [57].

тием решений большим числом людей, действующих в изменяющихся с течением времени условиях [57].

Вернёмся снова к временным рядам. В 2003 г. американец Роберт Ф. Ингл (Robert Fry Engle: 1942) «за разработку метода анализа экономических временных рядов на основе а*вторегрессионной гетероскедастической* (= предполагающей переменный разброс) *модели*» получил Нобелевскую премию. Сама работа была им опубликована ещё в 1982 г. и применена к оценке инфляции в Соединённом Королевстве [58].

В том же 2003 г. британец Клайв Грэнджер (Clive Granger: 1934) за разработку своего *метода коинтеграции* для анализа временных рядов в экономике тоже получил Нобелевскую премию. Известно, что большинство макроэкономических временных рядов не являются стационарными. Грубо говоря, они колеблются не вокруг постоянной величины, а вокруг величины, меняющейся со временем. Тем не менее зачастую эту переменную величину можно представить как линейную комбинацию асимптотически стационарных рядов. И для этих рядов применимы методы, хотя бы того же Ингла. Этот метод и назвал Грэнджер методом коинтеграции. Метод применим для динамических рядов, в которых краткосрочно значения испытывают значительные колебания, а долгосрочно – ограничены экономическим равновесием, например динамика колебаний рубля по отношению к евро. Работа Грэнджера позволяет строить более достоверные прогнозы развития экономики [59].

§ 6. Методы теории игр

Для начала дадим несколько определений. Эти определения следуют книжке Э.Й. Вилкаса [60]. *Игроком* назовем тот объект, которому приписываются возможные действия и интересы. Множество игроков будем обозначать через N. Действия и интересы будем приписывать группам игроков $K \subset N$, $K \neq \varnothing$, которые будем называть *коалициями*. Коалиция может состоять и из одного игрока.

Каждая коалиция K располагает некоторым множеством действий X_K, которое будем называть множеством стратегий коалиции K, а его элементы $x^K \in X_K$ – *стратегиями* коалиции K.

Будем считать, что каждая допустимая коалиция имеет хотя бы одну стратегию. (Запись $X_K = \varnothing$ означает, что коалиция K не может быть образована.) Выбор коалицией любой своей стратегии $x_K \in X_K$ одновременно будет означать, что коалиция образовалась.

Интересы коалиции $K \subset X_K \neq \varnothing$ задаются в виде транзитивного предпочтения на множестве всех исходов принимаемых решений S. Предпочтение будем обозначать через $\vdash_K$. Индивидуальные предпочтения будут представляться их функциями полезности f_i на S, которые называют *функциями выигрыша*, или просто *выигрышами.*

Для каждой коалиции K и каждой её стратегии $x^K \in X_K \neq \varnothing$ будем считать заданными множества $S(x^K) \subset S$, которые будут нами интерпретироваться как *множества возможных исходов* в условиях применения стратегии x^K.

Теперь мы уже готовы, чтобы дать определение игры.

Игрой будем называть набор (квинтет):

$$\Gamma = (N, S, \{X_K\}, \{S(x^K)\}, (\vdash_K)), \quad (1)$$

где N – произвольное множество игроков; S – произвольное множество всех исходов игры; X_K – произвольное множество стратегий коалиции $K \subset N$; $S(x^K) \subset S$ – множество возможных исходов, если коалиция K применяет стратегию $x^K \in X_K$; $\vdash_K$ – транзитивное отношение предпочтения коалиции $K \subset N$ на S.

Пару (K, x^K), $x^K \in X_K \neq \varnothing$ будем называть угрозой против исхода $s \in S$, если $s' \llcorner_K s$ (словами: s' строго предпочтительнее для коалиции K, чем s) для всех $s' \in S(x^K)$[1].

Пару (Q, x^Q), $x^Q \in X_Q \neq \varnothing$ будем называть *контругрозой* на угрозу (K, x^K), если $Q \cap K \neq \varnothing$, и для некоторого $s' \in S(x^K)$ и для всех $s'' \in S(x^Q)$ имеет место $s'' \llcorner_Q s'$ (словами: s'' строго предпочтительнее для коалиции Q, чем s').

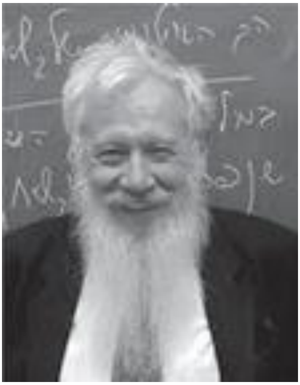
Угроза называется *эффективной*, если на неё нет контругроз.

---

[1] $\llcorner_K$ – отношение строгой предпочтительности для коалиции K (см. сноску к §1, п. д).

Оптимальными принято называть те исходы игры, против которых нет эффективных угроз. Множество всех оптимальных исходов называют *V-решением,* или просто *решением игры*.

Иными словами, исход является оптимальным, т.е. потенциально реализуемым, если ни одна коалиция не заинтересована, чтобы исключить его из числа возможных, или, другими словами, каждая коалиция, которая заинтересована в этом, не может этого сделать.



Роберт Ауман

Остаётся добавить, что для бескоалиционных игр понятие V-решения совпадает с понятием равновесия, а в частном случае антагонистических игр[1] (например, матричных игр с нулевой суммой) – с понятием седловой точки.

Если на конечном множестве (пусть их m) стратегий некоторого игрока задано некоторое распределение вероятностей t , то вектор $t = (t^1, \ldots, t^m)$ называют *комбинированной стратегией*[2] игрока *x*. Как показывает теорема фон Неймана-Нэша [12, с. 246; 61, с. 70–73], в комбинированных стратегиях всегда существует точка равновесия.

Томас Шеллинг

В 2005 г. нобелевскими лауреатами (по экономике) стали израильтянин Роберт Ауман (Yisrael Robert John Aumann: 1930)[3] и американец Томас Шеллинг (Thomas Crombie Schelling:

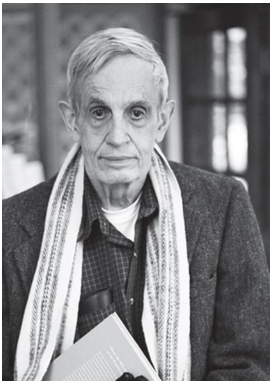
---

[1] Пусть X, Y □– множества стратегий игроков 1 и 2. Пусть f □– функция вы- игрыша игрока 1 (проигрыша игрока 2). Пусть исходами игры являются вы- игрыши игрока 1: f (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Пара (x^0, y^0) называется *седловой точкой,* если $f(x, y^0) \le f(x^0, y^0) \le f(x^0, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. При этом число $f(x^0, y^0)$ называют *значением* антагонистической игры.

[2] Комбинированная стратегия есть линейная комбинация простых стратегий вида (0, …, 1, 0, …, 0), где 1 пробегает места от 1 до m-го.

[3] У Р. Аумана на войне погиб единственный сын.

Джон Харсаньи



Джон Нэш

Райнхард Зельтен

1921), награждённые «за углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путем анализа теории игр». Это награждение было несколько запоздалым (на 30 с лишним лет) признанием роли теории игр в принятии решений в условиях неопределённости, важным не только для военных (не случайно нобелевская лекция Р. Аумана называлась «Война и мир»), но в первую очередь в изучении именно экономических процессов [62; 63].

Разумеется, «проникновение» теории игр в экономику активно началось еще в середине XX в. Достаточно вспомнить работы нобелевских лауреатов 1994 г. Джона (Яноша) Харсаньи (John Charles Harsanyi: 1920–2000)[1], Дж. Нэша (John Forbes

[1] Янош Харсаньи родился в 1920 г. в еврейской семье в Будапеште, приняв- шей ещё в 1919 г. католичество. Во время Второй мировой войны он окончил Будапештский университет по специальности «Фармацевтика». Католичество родителей не спасло сына от отправки в концентрационный лагерь, но ему удалось бежать. После войны (1947) он защищает диссертацию по социологии в Будапештском университете. В 1950 г. он вместе с родителями и невестой бежит из страны в Австрию, оттуда в Австралию. Там он меняет своё имя на Джон. В Австралии не признают его диплом, и ему приходится днём зараба- тывать на жизнь, а вечером учиться в Сиднейском университете. Наконец, в 1953 г. Харсаньи получает диплом магистра. В 1956 г. Харсаньи едет на два года в США в Стэнфордский университет изучать экономику, получает Рок- феллеровскую стипендию. В 1959 г. он защищает докторскую диссертацию по экономике, а его жена Анна – магистерскую диссертацию по психологии. По возвращении в Австралию он некоторое время работает в Национальном

Nash, Jr.: 1928)[1] и Райнхарда Зельтена (Reinhard Selten : 1930)[2] по анализу и выбору равновесия в теории некооперативных игр [64–66].

университете в Канберре. Наконец, при поддержке будущих лауреатов Нобе- левской премии по экономике (1972 и 1981 г., соответственно) американских экономистов Кеннета Эрроу (Kennet Joseph Arrow: 1921) и Джеймса Тобина (James Tobin: 1918–2002), переезжает в США, где с 1964 г. преподаёт в уни- верситете Беркли (Калифорния). Здесь он занимается байесовскими играми и теорией равновесия в некооперативных играх. Умер Харсаньи в 2000 г. в Кали- форнии от сердечного приступа.

[1] Джон Нэш родился в 1928 г. в строгой протестантской семье. После шко- лы поступил в Политехнический институт Карнеги, где слушал курс химии, международной экономики, но остановился на математике. По окончании ин- ститута (1947), получив дипломы бакалавра и магистра, продолжил учебу в Принстонском университете, где стал заниматься теорией игр. В 1949 г. Нэш защитил докторскую диссертацию под руководством Альберта Такера (Albert William Tucker: 1905–1995). Фактически за эту диссертацию, а также за работы 1950–1953 гг., в которых он исследует равновесие некооперативных игр, как теперь говорят, равновесие по Нэшу [64], он и получил в 1994 г. Нобелевскую премию по экономике. Интересно, что в своих работах начала 50-х гг. в Масса- чусетском технологическом институте (МТИ) Нэш обосновывает чисто мате- матически теорию прибавочной стоимости К. Маркса (Karl Marks: 1818–1873), что в условиях маккартистской «охоты на ведьм» не прошло для Нэша даром. Его помещают (1959) в психиатрическую клинику, поставив диагноз шизофре- ния. Выйдя из больницы, Нэш пытался укрыться в Европе, но под давлением США его депортировали на родину, где вновь поместили в психиатрическую клинику. Нэш до 2000 г. вёл достаточно замкнутый образ жизни. Отступила ли болезнь? Мы не знаем, однако в 2008 г. во время конференции в Высшей школе менеджмента Санкт-Петербургского университета, где он выступал, ни- каких следов болезни не наблюдалось. Широчайшую известность Нэшу принёс фильм 2011 г. Рона Ховарда «Игры разума» по мотивам книги профессора эко- номики Сильвии Назар, описавшей биографию Нэша.

[2] Райнхард Зельтен родился в 1930 г. в Бреслау (ныне Вроцлав) в семье ев- рейского книготорговца. Мать, немка-протестантка, после смерти отца (1942) сама воспитывала троих детей. В 1957 г. Р. Зельтен получает диплом Франк- фуртского (на Майне) университета, а четыре года спустя защищает там док- торскую диссертацию. В 1968 г. защищает хабилитацию (аналог российской докторской диссертации). В 1984 г. Р. Зельтена приглашают в Боннский уни- верситет, где он и работает до выхода на пенсию. Теорией игр Зельтен увлекся под влиянием профессора Хайнца Зауерманна (Heinz Sauermann: 1905–1981), ставшего научным руководителем его диссертации 1961 г. Позже они вместе с Р. Зельтеном явились основателями экспериментального исследования эконо- мики Германии.

Часть II

Неоклассические методы

§ 7. Методы оптимизации с использованием линейного и нелинейного программирования

Человечество с давних пор стоит перед проблемой нехватки ресурсов. В пустынях это нехватка воды, в тундре – нехватка продовольствия и т.д. Оптимизация расходов при планировании поставки товаров, оптимизация результата работы при назначении на должности с учетом производительности труда назначаемых лиц и т.д. – всё это примеры оптимизации ресурсов, которая насчитывает, вероятно, не одно столетие. Фактически одну из первых задач оптимизации приписывают Гаспару Монжу (Monge Gaspard: 1746–1818), который в 1781 г. поставил задачу переноса земли с одной поверхности на другую таким образом, чтобы стоимость транспортировки была наименьшей [67].

Гаспар Монж

Задача Монжа – это пример транспортной задачи, которой занимались и Поль Аппель (1928)[1] (Paul Appel: 1855–1930), и Фрэнк Хичкок (1941)[2] (Frank Lauren Hitchcock: 1875–1957), и Л.В. Канторович (1942)[3], а также большая группа американских

[1] *Appell P. Le problème géometrique des déblais et remblais* / Mém. des Sciences Math., 27. □ Paris: Gauthier-Villar, éd, 1928.

[2] Hitchcock F.L. *The distribution of a product from several sources to numerous localities* // MIT J. Math. and Phys., 20, (1941). p. 224□–230. Среди тех, кто защитил под руководством Хичкока докторскую диссертацию, можно выделить одного из пио- неров компьютерной техники, Клода Шеннона (Claude Shannon: 1916□–2001) [51].

[3] Канторович Л.В. *О перемещении масс* // ДАН СССР. 37 № 7□8,(1942). С. 227–230; Канторович Л.В. *Об одной проблеме Монжа* // УМН, 3. Вып. 2(24), 1948. □ С. 225□–226; Канторович Л.В., Гавурин М.К. *Применение математиче- ских методов в вопросах анализа грузопотоков* // Проблемы повышения эффек-

математиков, занимавшаяся обеспечением поставок (между континентами) при открытии в 1944 г. второго фронта. В их числе отметим Тьяллинга Купманса (Koopmans Tjalling: 1910–1985)[1] [12, с. 250–251, 301].

А между тем в СССР уже в 1938 г. было получено решение проблемы оптимизации в условиях ограниченности ресурсов для достаточно широкого класса задач. При этом под главным богатством любой страны «понималось наличие рентонесущих факторов. А рентонесущими факторами являются не только урожайные земли, но и любой ограниченный фактор», будь это нефть или ученые [68, с. 166].

Вот как об истории решения проблемы оптимизации в условиях ограниченности ресурсов пишет автор решения Л.В. Канторович[2]: «В 1938 г. в порядке научной консультации по зада-

---

тивности работы транспорта: сборник. □ М.: Изд. АН СССР, 1949. □ С. 110□–138. Остаётся добавить, что последняя работа докладывалась авторами ещё в январе 1941 г. на математической секции Ленинградского Дома ученых [68, с. 56].

[1] Koopmans T.C., Reiter S. *A model of Transportation.* 1951 [70, с. 222□–259].

[2] Леонид Витальевич Канторович родился в 1912 г. в Петербурге в семье известного врача-венеролога Виталия Моисеевича Канторовича (1855–1922). В 1926 г. Леонид поступил в Ленинградский университет на математический факультет, будучи самым молодым студентом. Уже в 1929 г. появились его научные статьи в Польше, во Франции и в СССР. По окончании университе- та в 1930 г. Л.В. Канторович начинает преподавать. В 1934 г. он профессор, год спустя – доктор наук без защиты диссертации. До 1938 г. научные труды Канторовича связаны в первую очередь с развитием функционального анализа. Не случайно через 20 лет в 1959 г. появится знаменитая монография «Функ- циональный анализ в нормированных пространствах», написанная совместно с учеником Канторовича, Глебом Павловичем Акиловым (1921□–1986). В 1939 г. Л.В. Канторович соглашается возглавить кафедру в Военном инженерно-техни- ческом училище. Во время блокады Ленинграда училище было эвакуировано в Ярославль. При эвакуации погиб 9-месячный сын Канторовича. В послевоенное время Л.В. Канторович совмещает преподавание в ЛГУ, ВИТУ (до 1948 г.) с работой в ЛОМИ и участием (с июня 1948 г.) в атомном проекте [51, с. 56]. В 1960 г. переезд в Новосибирск (до 1971 г.), научная работа и преподаватель- ская деятельность в Новосибирском университете и в Сибирском отделении АН СССР. Затем вновь переезд, теперь уже в Москву: работа в Институте управ- ления народным хозяйством (1971–1976), Институте системных исследований Госплана СССР (1976–1986). Именно в Москве Л.В Канторовича застает весть о присуждении ему (вместе с Т. Купмансом) в 1975 г. Нобелевской премии по экономике «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

Л.В. Канторович

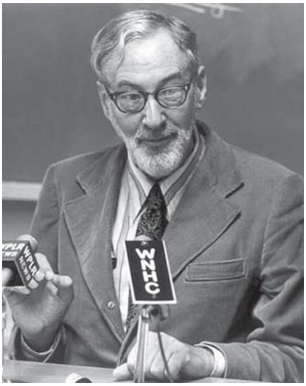
нию фанерного треста мной было предпринято изучение чисто практической задачи – выбора наилучшей производственной программы загрузки группы лущильных станков. Тогда же стало ясно, что эта задача не случайная, изолированная, а является типичным представителем нового, не исследованного ещё класса задач, к которым приводят различные вопросы нахождения наилучшего производственного плана» [69, с. 8].О решении этой и более общей задачи[1] Л.В. Канторович доложил на Октябрьской сессии 1938 г. Педагогического института им. А.И. Герцена, где он стал работать по совместительству на кафедре математического анализа[2]. По существу, в этой работе описывается симплекс-метод. В январе 1939 г. Л.В. Канторовичу удаётся построить удобный алгоритм (так называемый метод разрешающих множителей), позволявший решать задачу даже вручную[3]. Это открыло дорогу для издания в том же

---

[1] Доклад Л.В. Канторовича назывался *«О некоторых математических про- блемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта»*. Опу- бликован впервые (без двух страниц, найденных позднее) в сборнике научных трудов Воронежского университета, посвященном памяти Л.В. Канторовича: Экономико-математические модели и методы. Воронеж, 1989. С. 13–18.

[2] Заведующим кафедрой с 1937 г. стал учитель Л.В. Канторовича Григорий Михайлович Фихтенгольц (1888–1959).

[3] Между Октябрьской сессией 1938 г. и январём 1939 г. был драматический период. До Л.В. Канторовича дошли слухи о его скором аресте. В стране ца- рил «большой террор», или, как его назвали позже, «ежовщина». И тогда его старший брат, Николай Витальевич Канторович (1901–1969), в 1938 г. ставший доцентом и заведующим психиатрическим отделением 3-го Ленинградского медицинского института, предложил брату лечь к нему в клинику. События в стране развивались стремительно: 25 ноября 1938 г. Н.И. Ежов был освобож- дён от обязанностей наркома Министерства внутренних дел, а 9 декабря на эту должность назначен Л.П. Берия. В конце декабря появились первые освобож- денные из лагерей, и тогда Л.В. Канторович вышел из больницы. 3-й медицин- ский институт вскоре был преобразован в Военно-морскую медицинскую ака- демию, брат же в 1944 г. был послан для «укрепления кадров» в медицинский институт г. Фрунзе (ныне Бишкек), где стал не только заведующим кафедрой психиатрии, но и ученым с мировым именем. Помощь брата пригодилась Лео-



Тьяллинг Купманс

1939 г. в Ленинградском университете книги «Математические методы организации и планирования производства»[1], в которой был описан широкий круг задач: «размещение производства, распределение работ, рациональный раскрой, некоторые транспортные задачи и т.д., то есть практически весь круг задач линейного программирования на низовом уровне» [68, с. 59].

В чем же идея линейного программирования, а конкретно, симплекс-метода?

Итак, во-первых, ограничения. Пусть их будет m. Все ограничения описываются как линейные уравнения (или неравенства n переменных). Геометрически – это гиперплоскости. (Для наглядности будем считать, что все m неравенств в трехмерном пространстве ограничивают многогранник X, все координаты которого положительны.)

Во-вторых, функция f, которая задана на X (обычно X называют множеством допустимых планов), чей максимум и минимум ищется в задаче, тоже линейная. Эту функцию принято называть *целевой.*

Рассмотрим уравнение $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Это уравнение задаёт гиперплоскость, проходящую через начало координат. Будем двигать эту гиперплоскость параллельно себе до тех пор, пока она не коснется многогранника. При этом, по крайней мере, одна из точек касания будет вершиной Y_0 многогранника. Если продолжить движение, то будет и другая точка, в которой гиперплоскость покинет многогранник. Без нарушения общности можно считать, что это тоже вершина многогранника. Назовём её Y_1. Обе точки Y_0, Y_1, в которых целевая функция достигает минимума и максимума, и будут *точками оптимума* нашей задачи, хотя,

---

ниду Витальевичу ещё раз в начале 60-х гг. в Новосибирске: он вытащил его из местной «психушки», куда ученого отправили по доносу.

[1] Перепечатано в сборнике: Применение математики в экономических исследованиях. – М.: Соцэкгиз,1959.

возможно, и не единственными. Для их нахождения в симплекс-методе переходят от вершины к вершине многогранника (им соответствуют так называемые опорные планы) по направлению точки (точек) оптимума [69].

Вернёмся к продолжению истории линейного программирования. В июне 1947 г. в Пентагоне появился проект SCOOP (Scientific Computation of Optimal Programs) – развития линейного и математического программирования. С марта 1948 г. этим проектом фактически руководили экономист Маршалл Вуд (Marshall Wood), математик Джордж Данциг (George Bernard Dantzig: 1914–2005) и ведущий специалист по военной логистике Меррей Гейслер (Murray Aaron Geisler: 1917–1985), получившие важные приложения к экономике, статистике, операционному исчислению и к компьютерным наукам. Итоги их работы были подведены в материалах конференции, опубликованных в 1951 г. [70, издатель Т. Купманс[1]]. (Кстати, именно на этой конференции в двух работах, соответственно Роберта Дорфмана[2] (Robert Dorfman: 1916–2002) и Джорджа Данцига[3], уже встречаем название *симплекс-метод.* Принадлежит это название Джорджу Данцигу[4]. На

[1] Тьяллинг Чарльз Купманс родился в 1910 г. в Северной Голландии. В 1930 г. поступил в университет в Утрехте, где изучал математику. В 1933 г. едет в Амстердам, чтобы продолжить учебу, но теперь уже экономики. В 1936 г. по- лучает степень доктора по экономике университета в Лейдене за диссертацию по регрессионному анализу экономических рядов. В 1940 г. переезжает в США, где работает на правительство США, занимаясь проблемой оптимальных пере- возок между континентами. В 1946 г. получает американское гражданство, а с 1948 г. возглавляет Комиссию Cowles, некоммерческую организацию по изуче- нию экономики, связанную с Чикагским университетом, с которой он сотруд- ничал во время войны, до переезда в 1955 г. в Йел. Анализ работ Т. Купманса показывает, что он не относится к числу создателей линейного программирова- ния, но бесспорно много сделал для его популяризации и внедрения. В 1975 г. Т. Купманс получил Нобелевскую премию по экономике (вместе с Л.В. Канто- ровичем) [74].

[2] Dorfman R. *Application of the Simplex Method to game Theory Problem.* (См. [70, p. 348–358]).

[3] Dantzig G.B. *Application of the Simplex Method to a Transportation Problem.* (См. [70, p. 359–373]).

[4] Джордж Данциг родился в 1914 г. в г. Портленде (штат Орегон) в семье выходцев из Российской Империи. Отец, Тобиас Данциг, был математиком, мать, Анна Урисон, филологом. После переезда в начале 20-х гг. в Вашингтон,

этой же конференции в двух докладах, соответственно Д. Гейла, Г. Куна, А. Таккера[1] и вновь Дж. Данцига[2], была показана связь линейного программирования и теории игр.

С 1952 г. проектом SCOOP стал руководить Сол Гасс (Saul Gass: 1926), сын выходцев из Российской империи, ветеран Второй мировой войны [51, с. 279–280]. В 1958 г. выходит его знаменитая книга «Линейное программирование» [71], переведённая уже в 1961 г. на русский язык. Не менее важным было знакомство математического мира с работами школы Л.В. Канторовича благодаря библиографии на английском языке, выпущенной в том же 1958 г. Солом Гассом и Верой Райли (Vera Rilay) [72]. Среди упомянутых в этой библиографии работ отметим совместную (1951) работу [73] Л.В. Канторовича с тогда ещё младшим научным сотрудником ЛОМИ, выпускником (1948) математико-механического факультета ЛГУ В.А. Залгаллером (р. 1920)[3], поды-

отец стал преподавать в Мэрилендском университете, а мать стала лингвистом в Библиотеке Конгресса. С детства Джордж был окружен книгами и увлечен математикой. Степень бакалавра математики и физики Мэрилендского универ- ситета он получил в 1936 г. Два года спустя – степень магистра математики Мичиганского университета. Работа в Бюро трудовой статистики в Министер- стве труда не давала удовлетворения, и Джордж становится докторантом Ка- лифорнийского университета в Беркли. Здесь он изучает статистику под руко- водством Ежи Неймана. Но начинается война, и Джордж берет академический отпуск. Служит в Статистическом управлении ВВС США. В 1946 г. возвраща- ется в Беркли и в том же году защищает докторскую диссертацию. Сохранив связь с Управлением исследований ВВС США, с 1948 г. вместе с М. Вудом и М. Гейслером руководит проектом SCOOP, в рамках которого и создаёт симплекс- метод. С 1952 г. Данциг переходит в RAND Corporation. В 1966 г. переходит в Стэнфордский университет на должность профессора, оставаясь на этой долж- ности до ухода на пенсию в 1985 г. В 1974 г. Д. Данцига награждают первой в истории премией им. Дж. фон Неймана. В 1976 г. он получает Национальную научную медаль США [75].

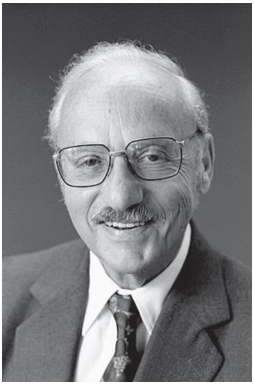
[1] Gale D., Kuhn H.W., Tucker W. *Linear Programming and the Theory of Games.* (См. [70, p.317–329]).

[2] Dantzig G.B. *A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem.* [70, p.330–338].

[3] Виктор Абрамович Залгаллер поступил на математико-механический фа- культет ЛГУ ещё в 1937 г. В 1941 г. пошел добровольцем в народное ополче- ние Ленинграда. Закончил войну на Эльбе. Награжден орденами и медалями за храбрость и отвагу. Он стал известным геометром, доктором физико-мате- матических наук, профессором, уникальным ученым-педагогом. В 1966 г. на

тожившую работы Л.В. Канторовича по оптимальному раскрою промышленных материалов[1].

Мы рассмотрели случай нахождения оптимума для линейной целевой функции при линейных же ограничениях. Если же либо целевая функция, либо ограничения выражаются нелинейными функциями (либо то и другое одновременно), то говорят о задаче *нелинейного программирования.*



Джордж Данциг

Заметим, что в отличие от задачи линейного программирования целевая функция может иметь оптимум не обязательно в крайних точках множества допустимых планов. Более того, она может иметь глобальные оптимумы внутри множества допустимых планов. Это резко усложняет решение задачи.

Какой же выход? Общего решения пока не найдено, но существуют разные способы решения в зависимости от конкретной задачи. В частности, если область допустимых планов выпуклая и целевая функция выпуклая (как, например, функция $f(x,y) = x^2 + y^2$), то решение находят с помощью *выпуклого программирования* [31]. Доказано, что минимум выпуклой функции на выпуклом множестве точек может быть только один. В этом случае, как говорят, локальный минимум совпадает с глобальным (т.е. на всем множестве допустимых значений). В этом случае задачу нелинейного программирования удаётся как угодно приблизить (как говорят, аппроксимировать) задачей линейного программирования и в результате получить точку оптимума.

На практике для некоторых видов производства, в частности эксплуатации месторождений полезных ископаемых, естествен-

---

XX международном математическом конгрессе в Москве были доложены но- вые научные результаты 12 школьников, которыми он руководил, работая по совместительству в физико-математической школе № 239 г. Ленинграда. В 1999 г. он переехал к дочери в Израиль.

[1] Канторович Л.В. *Подбор поставок, обеспечивающий максимальный вы- ход пилопродукции в заданном ассортименте* // Лесная промышленность. 1949. № 7. С. 15–17; 1949. № 8. С. 17–19.

но допущение о выпуклости функции производственных затрат (т.е. затраты на единицу продукции возрастают с объемом добычи), а также о выпуклости множества ограничений.

Отдельным видом нелинейного программирования является так называемое *целочисленное программирование.* Здесь в первую очередь речь идет о том, что ищется не просто оптимум, а целочисленный оптимум.

Например, в задаче об оптимальном размещении дилерских центров речь, конечно, идёт о целых числах.

В.А. Залгаллер

Ричард Беллман

Для решения задачи целочисленного программирования используются различные модификации алгоритма, предложенного ещё в 1957/58 гг. американским математиком Ральфом Гомори (Ralph Edward Gomory: 1929) и основанного на пошаговом решении задачи линейного программирования с отсечением на каждом шаге «лишней» области допустимых значений.

Ещё одним видом задач, посвященных изучению многошаговых методов принятия решений, экономисты и математики столкнулись в 50-е гг. XX века. Процитируем из книги [69, с. 64] задачу:

«Требуется загрузить в самолет грузоподъёмности W груз максимальной стоимости, состоящий из N предметов различных типов, если P_i – вес одного предмета i-го типа; V_i – стоимость предмета i-го типа; x_i – число предметов i-го типа, загружаемых в самолёт».

В этой задаче появляется новое ограничение: $x_i = 0, 1, 2, \ldots$ (предметы неделимы).

Решение обычной задачи линейного программирования здесь не годится. Эта задача относится к так называемым задачам *динамического программирования.*

Концепция решения этих задач была создана американским математиком Ричардом Беллманом (Richard Ernest Bellman: 1920–1984)[1] и его школой.

В последнем параграфе этой книги мы будем говорить о другом подходе к задачам управления с очень большим числом параметров, с которыми не справляется метод Беллмана (даже на мощнейших компьютерах). Метод был разработан в России школой В.П. Маслова.

Наконец, есть ещё один тип задач оптимизации, которые характеризуются случайным характером некоторых параметров. Например, долгосрочный прогноз погоды или прогноз урожая некоторых сельскохозяйственных культур. Это примеры задач *стохастического программирования.* Один из подходов к решению этих задач будет нами рассмотрен в конце этой части, в § 10.

§ 8. Методы функционального анализа

Функциональный анализ возник в первой трети XX в. в связи с построением теории операторов в бесконечномерных про-

---

[1] Ричард Беллман родился в 1920 г. в Нью-Йорке в еврейской семье выход- цев из Российской империи. Школу закончил в 1937 г. Далее был Бруклинский колледж, где он изучал математику и где в 1941 г. получил степень бакалавра. Степень магистра он получил уже в университете Висконсин-Мэдисон. Далее□ группа теоретической физики в Лос-Аламосе и участие в атомном проекте. После войны учеба в Принстонском университете, защита (1946) докторской диссертации под руководством Соломона Лефшеца. Преподавал в Принстон- ском университете (1946□–1948), ассоциированный профессор Стэнфорда, а с 1953 г. – сотрудник RAND Corporation. Здесь и было разработано динамическое программирование. И, наконец, профессор Университета Южной Калифорнии (1965□–1984). В 1976 г. он получил премию Дж. фон Неймана, а в 1979 г. Ин- ститут инженеров-электриков и инженеров по электронике (IEEE) наградил Р. Беллмана почетной медалью «за вклад в теорию процессов принятия решений и теорию управления системами, особенно за создание и применение динами- ческого программирования». Многие написанные Р. Беллманом книги (их у него с соавторами □36) переведены на русский язык. К экономике, в частности, имеет отношение книга, изданная в США в 1962 г. с С. Дрейфусом (Stuart E. Dreyfus)«*Applied Dynamic Programming.* Princeton (NJ): University Press, 1962. □ 363 р. На русский язык её перевели в 1965 г. [76].

странствах Гильберта, являющихся обобщением конечномерных евклидовых пространств, развитием теории линейных нормированных пространств в работах (1918–1923) венгерского математика Фридьеша Рисса (Frigyes Riesz: 1880–1956)[1] и особенно в работах польского математика Стефана Банаха (Stefan Banach: 1892–1945)[2], завершившихся изданием его книги «Теория линейных операторов» на польском (1931) и французском языках (1932).

Интерес к функциональному анализу вырос, когда выяснилось, что его аппарат пригоден не только для описания процессов квантовой физики, но и для описания и решения конкретных задач экономики.

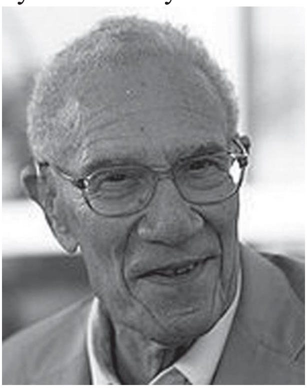
Пусть поле скаляров – множество вещественных чисел R с обычными операциями сложения и умножения. Пусть X,Y – векторные пространства над R. Отображение U: X→ Y называется *линейным отображением,* или *линейным оператором,* если

$$U(\lambda x + \mu y) = \lambda U(x) + \mu U(y)$$

для всех $\lambda, \mu \in R$ и $x, y \in X$.

Линейное отображение f векторного пространства X в поле R называют *линейным функционалом*.

В экономических задачах чаще всего приходится решать задачу на максимум или минимум линейного функционала при самых разнообразных ограничениях.



Роберт Солоу

В макроэкономике функциональный анализ позволяет описать и проанализировать проблему оптимального экономического роста и выбор эффективной (при заданных ограничениях) траектории роста. Другой проблемой, решаемой с помощью функционального анализа, является проблема связи безработицы и инфляции в условиях снижения Резервной системой учетной ставки (речь первоначально шла о США).

---

[1]Работы Ф. Рисса подытожены в книге [77], написанной совместно с Бела Секефальви-Надем (Béla Szökefalvi-Nagy (1913–1998).

[2] О биографии С. Банаха и его работах см. [78].

Среди тех, кто занимался этими проблемами, выделим Роберта Солоу (Robert Merton Solow: 1924)[1], получившего Нобелевскую премию в 1987 г. «за вклад в теорию экономического роста».

Простейшая модель Солоу исследует влияние на экономический рост сбережений, рост населения и технологический прогресс. В модели рассматриваются четыре переменные: капитал K, труд L, E-эффективность труда одного работника и выпуск Y. При этом E отражает состояние здоровья, образования и квалификацию работника.

В простейшем случае предполагается, что инвестиции равны сбережениям, государство отсутствует, экономика закрытая. Лаг капитальных вложений отсутствует. Понятия «население» и «рабочая сила» совпадают. Сбережения пропорциональны доходу. Норма сбережения s задаётся экзогенно и постоянна во времени ($0<s<1$).

Существующий капитал изнашивается с постоянной нормой δ. Тогда изменение запасов капитала $\acute{K}$ определяется разностью общей величины инвестиций sY и износа капитала δK:

$$\acute{K} = sY - \delta K$$

Дальнейший анализ модели показывает, что устойчивый рост производительности труда и капиталовооруженности достигается только при наличии технологического прогресса. (Здесь под капиталовооруженностью и производительностью труда понимаются эти показатели в расчете на единицу труда с постоянной эффективностью.) [80, с. 185–203].

[1] Роберт Солоу родился в 1924 г. в Бруклине (Нью-Йорк) в еврейской семье. В 1940 г. поступил в колледж Гарвардского университета. В 1942 г. ушел добровольцем на фронт. Воевал в Африке, в Италии на Сицилии. Вернулся в Гарвард в 1945 г. Научным руководителем выбрал В.В. Леонтьева. В 1949 г. отправился на год в Колумбийский университет для лучшего изучения математической статистики. Это дало ему возможность закончить работу над докторской диссертацией, в которой он применил марковские процессы для изучения проблемы занятости. Сразу после защиты Солоу перешел в MIT, где и проработал почти 40 лет, занимаясь проблемами оптимального роста, теорией капитала, линейным программированием и изучением кривой Уильяма Филлипса (William Phillips: 1914–1975), родившегося в Новой Зеландии и введшего в научный оборот кривую, связывающую безработицу и изменение инфляции. Кроме Нобелевской премии (1999) Солоу был награжден Национальной научной медалью США [79].

К числу недостатков модели Солоу, несомненно, относится экзогенное задание постоянной во времени нормы сбережений. Солоу создавал свою модель ещё в 50-е гг. Десять лет спустя независимо друг от друга Дэвид Касс (David Cass: 1937–2008) и Тьяллинг Купманс создали модель, опирающуюся на модель Фрэнка Рамсея (Frank Plumton Ramsey: 1903–1930), в которой траектория потребления, а значит и сбережений, определяется в ходе решения задачи оптимизации поведения домашних хозяйств и фирм, взаимодействующих друг с другом в условиях совершенной конкуренции.

Анализ этой модели (её называют моделью Рамсея–Касса–Купманса), в частности, показывает, что снижение налогов без соответствующего снижения государственных расходов не меняет траектории потребления, так как образовавшийся излишек домашние хозяйства сберегают [80, с. 228–245]. Отметим, что за последние полвека появилось много различных динамических моделей, учитывающих разные особенности отдельных стран и экономик.

В заключение этого параграфа остается пожалеть, что не дожил до широкого внедрения методов функционального анализа творец первой динамической модели в экономике Дж. фон Нейман. Закончим же этот параграф словами другого ученого, одного из творцов функционального анализа – Л.В. Канторовича, сказанными им в 1968 г.: «Оптимальные динамические модели, учитывающие реализацию достижений технического прогресса и трудовые ресурсы, предусматривают не только функционирование экономики, но и оптимальное развитие её» [69, с. 83].

§ 9. Методы теории графов

Прежде чем говорить о методах теории графов, дадим необходимые определения.

Пусть даны два множества X и U : $X \cap U = \varnothing$. Множество X будем называть *множеством вершин*, множество U – множеством веток (edge). Пусть M – подмножество в X x U x X, $M \neq \varnothing$. Если

$(x,u,y) \in M$, будем говорить, что вершины x и y *инцидентны* ветке u или соединены веткой u, а ветка *иинцидентна* вершинам x и y. Тройку (X, U, M) будем называть *графом*, если из условий $(x, u, y) \in M$ и $(x', u, y') \in M$ следует, что либо $x = x'$ и $y = y'$, либо $x = y'$ и $y = x'$. Иными словами, в графе каждая ветка может соединять не более двух вершин.

Если $M = \varnothing$, $U = \varnothing$, $X \neq \varnothing$, то будем причислять к графам также тройку $(X, \varnothing, \varnothing)$. Такой граф, не содержащий веток, будем называть *вершинным*.

Ветку $u \in U$ будем называть *дугой*, или ориентированной веткой, если для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, из того, что $(x, u, y) \in M$ следует, что $(y, u, x) \notin M$. Вершину x назовем *началом дуги*, а вершину y – *концом дуги*, другими словами, из вершины x дуга выходит, а в вершину y – входит.

Граф (X, U, M) будем называть *диграфом* (ориентированным графом), если все его ветки будут дугами. Дорожная сеть в районе, где только одностороннее движение, как раз отвечает диграфу.

Последовательность дуг в диграфе $u_1, u_2, \ldots, u_n$ назовем *путем*, если начало дуги u_k совпадает с концом дуги u_{k-1} ($k = 2, 3, \ldots, n$) [61, с. 13].

Диграф (X, U, M) будем называть *сетью*, если в нем есть ровно две вершины x_0 и z: из вершины x_0 пути только выходят, а в вершину z – только заходят, и при этом есть путь из x_0 в z (и других вершин с такими свойствами нет).

Функцию $c : U \to R_+ \cup \{0\}$ назовём *пропускной способностью сети*; (R_+ – множество всех положительных чисел).

Функцию $\varphi : U \to R_+ \cup \{0\}$ назовём *потоком на сети*, если

1) $0 \leq \varphi(u) \leq c(u)$ для любого $u \in U$;

2) для каждого $x \in X$, $x \neq x_0$, $x \neq z$ сумма потока на всех дугах, входящих в вершину x, равна сумме потока на всех дугах, выходящих из вершины x.

Основная задача – ***максимизировать*** поток на сети. Именно эта задача была поставлена правительством США перед открытием второго фронта, считая, что множествам вершин отвечают порты по обеим сторонам Атлантики. Для построения сети введены были две фиктивные вершины: x_0 соединялось с портами в

Америке, z – в Европе. Пропускным способностям соответствующих дуг отвечали пропускные способности портов [61, с. 250–260].

Для задачи максимизации транспортного потока было предло-

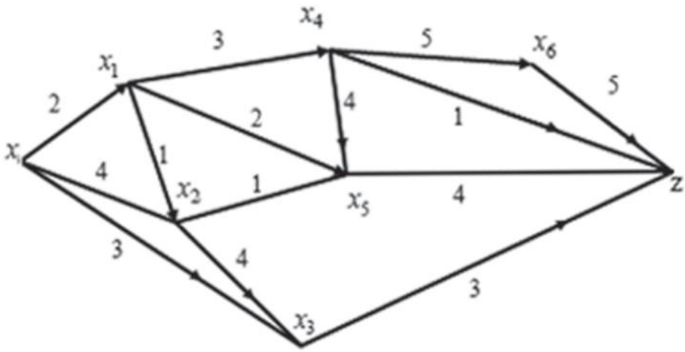


Рис. 6. Сеть и ее пропускные способности

жено сразу несколько решений. Одно с помощью симплекс-метода предложил Данциг (см. стр. 48), другое – Харольд Кун (Harold William Kuhn: 1925–2014)[1], Лестер Форд мл. (Lester Randolf Ford, Jr.: 1927) и Делберт Фалкерсон[2] (Delbert Ray Fulkerson: 1924–1976), названное венгерским методом, а третье решение принадлежит Т. Купмансу (см. с. 46). И второй, и третий метод используют специфику графов и намного проще симплекс-метода. (В методе Т. Купманса минимизируется стоимость перевозок.)

Есть ещё одна задача, ставшая весьма актуальной в последние 80 лет.

Речь идет о прокладке всевозможных сетей: электрических, телефонных, оптико-волоконных и т.д. – с минимальной стоимостью с учетом маршрутов прокладки. Экономия при строительстве и эксплуатации, даже в масштабах средней европейской страны, может быть многомиллиардной.

Для формулировки нам понадобятся два почти очевидных

---

[1] Kuhn H.W. *The Hungarian method for the assignment problem* // Naval Research Logistics Quarterly, 2 (1955). – p. 83–97.

[2] Ford L.R, Fulkerson D.R. *Solving the transportation problem* // Management Sci., 3 (1956).□ p. 24□–32.

определения: связного неориентируемого графа и цикла. Ветку $u \in U$ в графе (X, U, M) назовем *неориентируемой* (или ребром), если она инцидентна разным вершинам x и y и не является дугой. Ветку $u \in U$ назовём *петлёй*, если существует $x \in X : (x, u, x) \in M$.

Последовательность $x_0, u_1, x_1, u_2, \ldots, x_{k-1}, u_k, x_k$ назовем *цепью*, если любая тройка вида $(x_{i-1}, u_i, x_i) \in M$, $i = 1, 2, \ldots, k\text{-}1$. Будем говорить, что цепь *соединяет* вершины x_0 и x_k, если $x_0 \neq x_k$.

Цепь назовём *замкнутой* (или *циклом*), если $x_0 = x_k$. Граф назо-

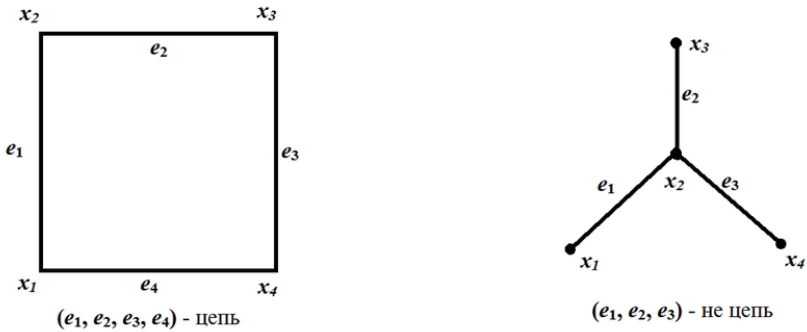


Рис. 7. Цепь и не цепь

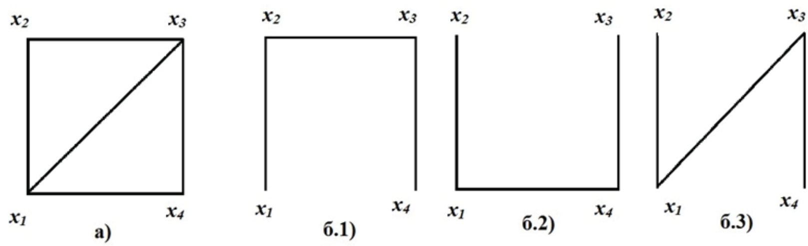


Рис. 8. Граф (а) и его остовные деревья (б.1), (б.2), (б.3)

вем *связным*, если для любых двух вершин графа найдётся цепь, их соединяющая.

Далее мы будем рассматривать (конечные) графы с конечным множеством вершин и с конечным множеством веток. Их называют *конечными графами*. Кроме того, будем рассматривать только неориентированные графы, т.е. графы без дуг и без петель. Связный граф без циклов назовём *деревом* [12].

Пусть даны два графа: (X', U', M') и (X, U, M), где $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, $M' \subseteq M$.

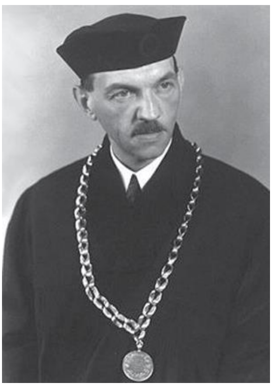
Тогда граф (X', U', M') назовём *подграфом* графа (X, U, M). Если при этом X' = X и подграф являются деревом, то его назовём *остовным* деревом.

Функцию $r: U \to R+\cup\{0\}$ назовём *весовой* на связном конечном неориентированном графе (X, U, M), а значение r(u) – весом на ребре u. Под весом подграфа (и, в частности, остовного дерева) будем понимать сумму весов ребер этого подграфа.

Основная задача: найти минимальное (по весу) остовное дерево связного конечного неориентированного графа (X, U, M) без петель, у которого n вершин (n > 3).

Ответ был получен ещё в 1930 г. чешским математиком Войтеком Ярником (Vojtek Jarnik: 1897–1970), но был забыт и переоткрыт заново американцем Робертом Примом (Robert Prim: 1921) в 1957 г., в ту пору ещё сотрудником фирмы Bell.

Алгоритм Прима – Ярника заключается на первом шаге в выборе произвольной вершины и инцидентного этой вершине ребра с минимальным весом. Это первый элемент искомого дерева. Последующие шаги сводятся к присоединению к построенному на предыдущем шаге дерева нового ребра, один из концов которого принадлежит уже построенному дереву, а другой не принадлежит, и при этом новое ребро имеет минимальный вес среди всех ребер, не принадлежащих уже построенному дереву. Очевидно, будет сделано (n-1) шагов.



Войтек Ярник

Роберт Прим

Заметим, что инспирировала постановку и решение задачи

Отакар Борувка

Джозеф Краскал мл.

конкретная экономическая проблема: в 1925 г. в Чехословакии требовалось соединить электрической сетью 40 населенных пунктов с минимальными затратами на строительство и эксплуатацию.

Первое решение дал чех Отакар Борувка (Otakar Borůvka: 1899–1995) в 1926 г. По существу, аналогичный алгоритм (в других терминах) предложил в 1956 г. американец Джозеф Краскал (Joseph Bernard Kruskal, Jr.: 1928–2010), также как и Р. Прим, работавший в фирме Bell. Отличие алгоритма Краскала от алгоритма Прима в том, что уже с первого шага ищется ребро с минимальным весом, а в последующих шагах ищется ребро с минимальным весом среди оставшихся, такое, которое не образует цикла с уже построенными ребрами. (Это новое ребро, если оно не (n-1)-е, не обязано быть связано с уже построенными ребрами.) На практике это оказалось не совсем удобным [81].

§ 10. Методы теории случайных процессов

Случайные процессы (в частности, броуновское движение), которые первоначально изучались физиками и биологами ещё в XIX в., во второй половине XX в. привлекли внимание и экономистов.

В 1900 г. уже 30-летний математик Луи Башелье (Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier: 1870–1946) защищал в Сорбонне докторскую диссертацию «Théorie de la speculation». Комиссия во главе с Анри Пуанкаре (Poincaré Jules Henri: 1854–1912) хотя и не поставила высшей оценки, но рекомендовала диссертацию к публикации [82]. Через 64 года перевод работы Башелье в издании MIT[1] сделал его имя широко известным, но он этого уже не дождался, скитаясь по провинциальным университетам Франции[2]. В своей диссертации Башелье вводит понятие случайного блуждания для движения цен опционов, аналогичное движению пылинок в броуновском движении. Работа Башелье фактически была первой работой в направлении развития стохастических дифференциальных уравнений (сокращенно, СДУ). Не случайно, Пуанкаре во время защиты диссертации посетовал, что Башелье занимался больше опционами, а не развитием СДУ.

Начало развития СДУ обычно связывают с появлением знаменитого стохастического дифференциального уравнения Ланжевена (Paul Langevin: 1872–1946)[3], описывающего броуновское движение с постоянным потенциалом:

$$ma = m(dv/dt) = \Phi(x) - \gamma v + \eta(t),$$

---

[1] Напомним, что MIT □– это Массачусетский технологический институт.

[2] Луи Башелье родился в Гавре в 1870 г. Его отец, ученый-любитель, привил сыну любовь к науке, хотя сам был лишь торговцем винами. После смерти ро- дителей в возрасте 20 лет Башелье взял на себя семейный бизнес, будучи лишь бакалавром, заботился о младших сестре и брате. К этому периоду относится и его знакомство с финансовыми рынками. Кстати, опционы были разрешены во Франции только с 1884 г. С 1892 г. – Сорбонна, в 1900 г. □– защита диссертации Ph.D. под руководством А. Пуанкаре. При этом диссертация, кроме публикации в журнале, была издана в виде книги в том же году издательством Gauthier- Villars в Париже. В 1914 г. Башелье после публикации монографии «Игры, слу- чай, риск» [83] получил постоянное профессорское место в Сорбонне. Затем началась Первая мировая война, Башелье служит рядовым. После войны □ вре- менная работа в разных университетах: Безансоне, Дижоне, Ренне. В 1927 г., наконец, он стал постоянным профессором в университете Франш-Конте, где и работал до выхода на пенсию.

[3] Поль Ланжевен родился в Париже. После окончания Высшей школы промышленной физики и химии, а также Нормальной школы, продолжил учебу и работу в Кэмбридже под руководством сэра Джозефа Томсона (Joseph John Thomson: 1856–1940) в Кавендишской лаборатории. В 1902 г. вернулся во Францию и защитил докторскую диссертацию (руководитель Пьер Кюри (Pierre Curie: 1859–1906)). В 1934 г. избран членом Академии наук Франции. Основ- ные работы по парамагнетизму и диамагнетизму. Во время Второй мировой войны был арестован немцами, дочь отправлена в Освенцим, зять Жак Соло- мон (1908–1942), член Компартии Франции, расстрелян. После освобождения Франции, узнав о гибели зятя, Ланжевен вступает в члены Компартии Франции.

где ускорение «а» броуновской частицы массы m выражается через сумму силы вязкого трения, пропорциональную скорости частицы v, шумового члена η(t) (так называют стохастический процесс непрерывных соударений частицы с молекулами жидкости), и Φ(x) – систематической силы, возникающей при межмолекулярных и внутримолекулярных взаимодействиях.

В 1932 г. в своём докладе на IX математическом Конгрессе в Цюрихе Сергей Натанович Бернштейн (1880–1968), рассматривая броуновское движение, заметил: «Я остановился довольно подробно на анализе этого простого случая [т.е. броуновского движения. – авт.], чтобы показать с полной очевидностью, что метод дифференциальных уравнений, введённый физиками Эйнштейном[1], Смолуховским[2], Фоккером и Планком[3] для исследования стохастических зависимостей, … представляет полезный технический приём». С.Н. Бернштейн не упоминает ещё Ланжевена.

Поясним уравнение Фоккера – Планка на следующем примере. Рассмотрим стандартное скалярное уравнение броуновского движения, генерируемое СДУ вида:

---

[1] Альберт Эйнштейн (Albert Einstein: 1879–1955) родился в Ульме (Германская империя) в еврейской семье. Лауреат Нобелевской премии по физике (1921). Броуновскому движению была посвящена работа 1905 г., когда он жил в Швейцарии: Einstein A. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen / Annalen der Physik, 322 (8), 1905. p. 549–560.

[2] Мариан Смолуховский (Marian Ritter von Smolan-Smoluchowski: 1872– 1917) родился в Фордер-Брюле близ Вены (Австро-Венгерская империя) в польской семье. Учился в Вене. Преподавал в Вене, Лемберге (Львов) и Кракове. Броуновскому движению была посвящена работа, написанная в Лемберге: von Smoluchowski M. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen / AnnalenderPhysik, 326(14), 1906. p. 756–780.

[3] Адриан Фоккер (Adriaan Daniel Fokker: 1887–1972) родился в Бейтензорге, остров Ява (Нидерландская Ост-Индия, ныне Индонезия), голландский физик. Броуновскому движению посвящена работа: Fokker A.D. Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Stralungsfeld / AnnalenderPhysik, 348 (4 Folge 43), (1914). S. 810–820;

Макс Планк (Max Karl Ernst Ludwig Planck: 1858–1947) родился в Киле (Германская империя), лауреат Нобелевской премии по физике (1918). Броуновскому движению посвящена работа, написанная в Берлине: Plank M. Über ein Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie / Sitzungberichte der Preuss. Akad. der Wissenschaft, (1917). S. 324–341.

$$dX_t = dB_t,$$

где $X_t \in R^N$ – функция состояния системы, R^N – N-мерное евклидово пространство, $B_t \in R^N$ – стандартное N-мерное броуновское движение, t –время.

Пусть W (x, t) – плотность вероятности состояния системы X_t. Пусть скорость сноса равна нулю и коэффициент диффузии равен 1/2. Тогда соответствующее уравнение *Фоккера – Планка* запишется в виде:

$$\partial W(x,t) / \partial t = ½ (\partial^2 W(x,t)/\partial x^2).$$

Получили простейшую форму так называемого уравнения диффузии (теплопереноса).

Вернёмся в 1932 год. В течение последующих шести лет С.Н. Бернштейн[1] публикует три работы на французском языке (в 1933 г. в Париже в Compte Rendu[2], 196; в 1934 г. – в Ленинграде

[1] Сергей Натанович Бернштейн (Bernstein S.N.) родился в Одессе в семье доктора медицины, приват-доцента Новороссийского университета. Отец Сер- гея Натановича умер за три месяца до рождения сына. Мать воспитала одна четверых детей, дав им хорошее образование. По окончании гимназии в 1888 г. Бернштейн едет учиться в Париж. Парижский университет (Сорбонну) он за- канчивает досрочно в 1891 г. В 1892 г. Бернштейн едет в Гёттинген, чтобы под руководством Д. Гильберта написать докторскую диссертацию. В качестве темы диссертации Гильберт дал 19-ю проблему, поставленную им в докладе на II Математическом конгрессе (1900) и касающуюся ответа на вопрос: будет ли решение эллиптического уравнения при определённых условиях аналитической функцией? Бернштейн решил эту проблему положительно. На основе мемуа- ров (об этом решении) он защищает в Париже (1904) докторскую диссертацию. Вернувшись в Россию в 1905 г., Бернштейну приходится заново защищать ма- гистерскую диссертацию. В ней он решает 20-ю проблему Гильберта. С 1908 г. Бернштейн профессор теории вероятностей на высших женских курсах в Харькове. К 1912 г. относится построение им своих знаменитых многочленов, используемых в теории приближений. В 1917 г. он первым строит аксиоматику теории вероятностей, основанную на булевых алгебрах. В 1929 г. Бернштейна избирают академиком АН СССР. В 1933–1941 гг. Бернштейн живет постоянно в Ленинграде, с 1943 г. до кончины – в Москве, читая лекции (до 1947 г). вначале в Ленинградском, а затем в Московском университетах и ведя научный семи- нар. С 1955 г. Бернштейн – иностранный член Французской Академии Наук (после Петра I и П.Л. Чебышева) [87].

[2] Bernstein S.N. *О дифференциальном уравнении Фоккера-Планка* [84, с. 256–258].

Поль Ланжевен

С.Н. Бернштейн

в Трудах физико-математического института им. В.А. Стеклова, Отд. Мат.51; и в 1938 г. – в Женеве в трудах Confér. Internat. Sci. Math. Univ. Genève. Théorie des probabilities.V.2), посвящённые СДУ. Отметим, что СДУ в теоретической физике привлекли в 30-е гг. внимание и А.Н. Колмогорова, им были получены столь глубокие результаты, что С.Н. Бернштейн к уравнению Фоккера – Планка стал добавлять фамилию Колмогорова [84, с. 510, 522].

В СССР начиная с 40-х гг. СДУ становятся востребованы не только в теоретической физике, но и в рамках развития теории процессов управления (статистической динамики). Основоположником статистической теории управляемых систем является Владимир Семенович Пугачев (1911–1998), работа которого (1944) «Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями» [86] положила начало развитию нового направления СДУ. В развернутом виде результаты развития этого направления были изложены Пугачевым в работе 1957 г. [87].

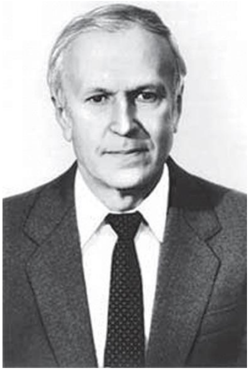
Дальнейшему развитию СДУ в СССР способствовало создание в 50–60-х гг. XX в. стохастического исчисления Стратоновича[3], особенно востребованного в условиях развития ракетной

[1] Bernstein S.N. *Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений* [84, с. 291–315].

[2] Bernstein S.N. *Стохастические дифференциальные уравнения* [84, с. 334– 357].

[3] Стратонович Руслан Лазаревич родился в 1930 году в Москве в семье инженера-механика и преподавательницы физики. В конце 1944 г. стало известно, что отец, ушедший с ополчением в 1941 г., освобожден из плена и по действовавшему тогда закону осужден трибуналом на 10 лет с конфискацией имуще-

В.С. Пугачев



Р.Л. Стратонович

техники, атомного подводного флота и радиотехники. Как итог развития исследований по СДУ в СССР можно назвать книги И.И. Гихмана и А.В. Скорохода (1982) [90] и В.С. Пугачева и И.Н. Синицина [91].

Что касается развития СДУ в последние 30 лет вне России, то довольно полная характеристика различных направлений исследований и приложений (включая и новые направления: биологию, генетику, информатику, геологию, химию) дана в книге профессора Х. Юнека (Heinz Junek: 1944) [92] и в предисловии к книге [93].

Вернёмся в 1944 год. В этот год японский математик Киёси Ито (Itō Kiyosi: 1915–2008)[1] ввёл в рассмотрение свой стохастический интеграл.

ства. Семью (мать и двое детей) от полного разорения спасло то, что родители не были официально расписаны. Чтобы быстрее встать, как тогда говорили, «на собственные ноги», Руслан перепрыгивает 9-й класс и заканчивает в 1947 г. 10-й класс экстерном с золотой медалью, что позволяло поступить без экзаменов в любой вуз. Руслан выбрал физический факультет МГУ. К моменту окончания МГУ (1952/1953) у него уже есть научные публикации; получена рекомендация в аспирантуру на кафедру П.И. Кузнецова. Защита кандидатской диссертации состоялась в мае 1956 г. В этом же году в книге «Математика в СССР за сорок лет» т. 2 [94, с. 664] уже дается краткая биография Стратоновича Р.Л. и перечисляются восемь его работ. В 1961 г. вышла книга Стратоновича [88], переведенная на английский язык и принесшая ему мировую славу. В 1965 г. состоялась защита докторской диссертации. Публикация в 1966 г. в книге [89] интеграла Стратоновича вызвала резкое неприятие проф. А.В. Скорохода, опубликовавшего (1967) разгромную рецензию в журнале «Теория вероятностей и её применения». Тем не менее с 1969 г. Р.Л. Стратонович — профессор МГУ. В 1988 г. награжден Госпремией СССР, а в 1994 г. — Госпремией России [95].

[1] Как выяснилось в 90-е гг., Ито построил свой интеграл раньше (публикация в Японии ещё в 1942 г.). Но историков науки ждал сюрприз: в 2000 г. случайно было обнаружено запечатанное письмо 1939 г. во Французскую академию наук, содержащее неопубликованную работу Винцента Доблина (Vincent

Луи Башелье

Киёси Ито

Винцент Доблин

Пусть y(t), (где время $t \in T$) – случайный процесс с независимыми нормальными приращениями. *Стохастическим интегралом* называют интеграл вида

$$\int f(t)dy(t).$$

Интегралом Ито назовем интеграл вида:

$$\int_0^T f(t)dy(t) = \lim \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\,(y(t_{i+1}) - y(t_i)) \qquad (\text{при } N \to \infty),$$

где как обычно интервал [0, T] разделён точками: $0 = t_1, t_2, \ldots, t_{N+1} = T$.

В 1951 г. в издании Американского математического общества появилась работа [96] К. Ито, в которой интеграл Ито использовался при решении стохастических дифференциальных уравнений (см. также [97]). Позже интеграл Ито нашел применение прежде всего на финансовых рынках.

В вышедшей в 1966 г. в МГУ книге [89] Р.Л. Стратоновича используется (в интересах прежде всего радиофизики) другой сто-

Doblin (франц.); Wolfgang Döblin: 1915–1940), в которой по существу строится интеграл Ито. Работа Döblina была в том же году опубликована: Döblin W. «Sur l'équation de Kolmogoroff. Pli cachet à l'Académie des Sciences» (éd.par B.Bru et M. Yor). Paris: CRAS, (331), 2000. Добавим, что Вольфганг изучал статистику в институте Анри Пуанкаре. Защитил докторскую в 1938 г. под руководством Мориса Фреше (Moris René Fréchet: 1878–1973). Во Францию приехал после прихода в Германии к власти нацистов, так как был наполовину еврей. Попав в окружение немецких войск во время Второй мировой войны, покончил с собой.

хастический интеграл – *интеграл Стратоновича,* т.е. интеграл вида:

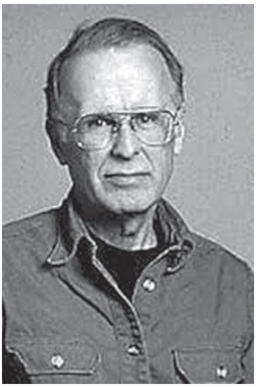
$$I = \lim \sum_{i=1}^{N} f((t_{i+1} + t_i)/2)\,(y(t_{i+1}) - y(t_i)) \qquad (\text{при } N \to \infty).$$

В 1958 г. вышла книга американского математика (и философа) Норберта Винера (Norbert Wiener: 1894–1964), в которой, исследуя одномерное броуновское движение, он поставил в соответствие каждой траектории некоторое число β. Тогда эту траекторию можно описать посредством стохастической функции x(t,β), а интеграл вида

$$\int_0^5 f(t)dx\,(t, \beta)\,dt$$

называется теперь *стохастическим интегралом Винера*. Интеграл Винера нашел применение прежде всего в теории управления: от управления роботами до управления беспилотными космическими аппаратами.

Вернёмся теперь в 1953 год. В этот год М. Дж. Кендал (Kendall M.G)[1], используя логарифмы ценовых серий, обнаружил, что их изменение случайно. В 1963 г. Клайв Грейнджер (Granger Clive: 1934–2009) и Оскар Моргенштерн в работе [99] показали, что краткосрочные колебания цен подчиняются случайному



Фишер Блэк

Майрон Шоулз

Роберт Мёртон

[1] Kendall M.G. *The Analysis of Economic Time-Series – Part I: Prices,* Journal of the Royal Statistical Society. SeriesA. (General), 116 (1), 1953. p. 11–25.

блужданию, а долгосрочные – нет. Через год (т.е. в 1964 г.) в MIT была переведена на английский работа Башелье [83], и началось её триумфальное шествие по финансовым рынкам.

Прошло ещё 9 лет. 26 апреля 1973 г. в стенах Чикагской торговой палаты открылась торговля фондовыми опционами. Заметим, что с 1936 г. в США действовал закон, запрещавший деривативы, т.е. производные ценных бумаг. (Полная отмена этого закона произошла в 1983 г.)

В том же 1973 г. Фишер Блэк (Fischer Black: 1938–1995)[1] и Майрон Шоулз (Myron Samuel Scholes: 1941) в работе [100] построили модель, основанную на решении стохастического дифференциального уравнения, которая определяет теоретическую цену на европейские[2] опционы. Среди 6 основных допущений теории выделим только одно: *торговля ценными бумагами ведется непрерывно, и поведение их цены подчиняется модели геометрического броуновского движения с известными параметрами.*

В том же 1973 году Роберт Мёртон (Robert Carhart Merton: 1944)[3] публикует теорию рационального ценообразования при опционной торговле [101], уточнившую ряд положений модели Блэка – Шоулза.

Итак, модель ценообразования Блэка – Шоулза использует-

---

[1] Фишер Блэк родился в Вашингтоне в 1938 г. В Гарварде в 1959 г. получил степень бакалавра по физике, в 1964 г. – PhD по прикладной математике. Затем последователи Чикагский университет (1971), где была написана знаменитая работа [100] 1973 г., Школа менеджмента Массачусетского Института. С1984 г. работал в фирме Goldman Sachs. Умер в 1995 г., не успев получить Нобелев- скую премию по экономике.

[2] В случае *европейского опциона* права владельца могут быть предъявлены только в последний день его обращения на биржу. В случае *американского оп- циона* права могут быть предъявлены в любой момент после заключения сделки вплоть до срока истечения контракта.

[3] Роберт Кархарт Мёртон родился в 1944 г. в семье социолога (Robert King Merton: 1910–2003), родители которого были выходцами из Российской империи (деда звали Аарон Школьников). Р. Мёртон стал бакалавром в Колумбийском университете, магистром – в Калифорнийском технологическом институте, по- лучил PhD по экономике в MIT (Массачусетском технологическом институте). В работе 1973 г. [101] существенно дополнил модель Блэка – Шоулза. Вместе с Шоулзом получил Нобелевскую премию (1997 г.) «за новый метод определения стоимости производных ценных бумаг». Профессор школы бизнеса в Гарварде.

ся для оценки деривативов и собственного капитала компаний. Напомним, что фьючерсная сделка – это сделка на цену товара, поставка которого состоится в будущем[1]. К началу XX в. на американских товарных биржах уже были не только фьючерсы, но и опционы[2]. Договорённости по ним были как у фьючерсов, но без обязательства осуществления покупки.

Опционы делятся на *call* и *put*. Опцион *call* даёт право (но не обязывает) совершать покупку по зафиксированному в контракте курсу. При покупке опциона *call* его владельцу желательно, чтобы актив рос в цене.

Опцион *put* – это контракт, дающий его владельцу (но не обязывающий) право совершить продажу актива по зафиксированному в контракте курсу. При покупке опциона put для его владельца желательно, чтобы актив снижался в цене.

Практика проведения так называемого европейского опциона на бирже предполагает следующее:

1. Любой покупатель ценной бумаги может получать ссуды по краткосрочной безрисковой ставке для оплаты любой части её цены.
2. Отсутствуют трансакционные затраты, связанные с покупкой или продажей акций или опциона.
3. По базисному активу опциона дивиденды не выплачиваются в течение всего действия опциона.
4. Краткосрочная безрисковая процентная ставка известна и является постоянной в течение всего срока действия опциона.
5. «Короткая» продажа разрешается без ограничений, и при этом продавец получает немедленно всю наличную сумму за проданную без покрытия ценную бумагу по сегодняшней цене. (Про-

[1] Первые фьючерсы появились в XVII в. на японской рисовой бирже.

[2] Считается, что впервые опционы стали использовать в Голландии в XVIII в. на рынке цветов. Опционы делятся по виду базисных активов на: а) валютные опционы – опционы, дающие право на покупку или продажу определенного объема иностранной валюты по определённой цене в течение определенного времени (Currency option); б) фондовые опционы – в основе лежат обыкновенные акции корпораций (Stock option); в) товарные опционы – в основе определенное количество товара (Commodity option). Есть ещё опционы на индекс, опционы на процентную ставку, опционы на фьючерсный контракт, а также процентные опционы на ценные бумаги с фиксированной доходностью.

давец опциона занимает короткую позицию по контракту, покупатель – длинную.)

Эти положения естественно вошли в модель Блэка – Шоулза.

Обозначим теперь через σ – волатильность (квадратный корень из дисперсии базисной акции);

(T-t) – время до истечения срока опциона;

К – цена исполнения опциона;

S – текущая цена базисной акции;

r – безрисковая процентная ставка;

N(x) – вероятность того, что отклонение будет меньше x в условиях стандартного нормального отклонения (cumulative normal density function). (Для определения N(x) можно использовать Excel-функцию НОРМСТРАСП(x)).

Тогда текущая стоимость опциона *call* в момент t до истечения срока опциона может быть вычислена по формуле:

$$C(S,t) = S\cdot N(d_1) - K\cdot e^{-r(T-t)\cdot}\cdot N(d_2),$$

где $d_1 = (\ln (S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)) / (\sigma\cdot\sqrt{(T - t)})$, а

$$d_2 = d_1 - \sigma\cdot\sqrt{(T - t)} \text{ или } d_2 = (\ln (S/K) + (r\ \sigma^2/2)(T - t)) / (\sigma\cdot\sqrt{(T - t)}).$$

Цена же европейского опциона *put* в момент t будет вычисляться по формуле:

$$P(S,t) = K\cdot e^{-r(T-t)}\cdot N(-d_2) - S\cdot N(-d_1).$$

Период 1983–2000-х гг. – это время широчайшего распространения деривативов (производных) ценных бумаг на всех биржевых площадках. В начале 2000-х гг. стало понятно, что неограниченное использование деривативов может привести США к тяжелому экономическому кризису.

Вину за это решили переложить на ученых. В 2003 г. Шоулза[1]

[1] Майрон Шоулз родился в г. Тимминс (штат Онтарио, Канада). Степени ба- калавра и магистра получил в Канаде (Гамильтон) в университете Мак-Мастер. Степень PhD – в Чикагском университете. Знаменитую работу [100] 1973 г. вы- полнил, работая в MIT. (Кстати, статья пришла в редакцию ещё в ноябре 1970 г., но дважды поправлялась.) Позже преподавал в Чикагском и Стэнфордском уни- верситетах. В 1997 г. получил вместе Р. Мёртоном Нобелевскую премию «за новый метод определения стоимости ценных бумаг».

и Мёртона обвинили в уклонении от уплаты налогов в созданном ими хедж-фонде LTCM. После 2008 г. в странах Запада резко уменьшилось число ученых, разрабатывающих далее модель Блэка – Шоулза. В России же школа Альберта Николаевича Ширяева (р. 1934), профессора МГУ, академика РАН (2011), продолжает исследования по этой тематике, но, главным образом, в математическом аспекте [102].

Напомним в этой связи, что в 1908 г. в США разразился сильнейший экономический кризис. Правительство США обратилось к крупнейшему экономисту того времени Ирвингу Фишеру (Irving Fisher: 1867–1947) с вопросом: «Что делать?» Он ответил: «Дайте спокойно умереть банкам-банкротам». Между прочим, тогда разорился в первый раз банк «Lehman Brothers», основанный ещё в 1850 г. Через год о кризисе все забыли.

Часть III

Современные математические методы, используемые при принятии управленческих решений

§ 11. Метод теории нечетких множеств

В 1920 г. польский логик Ян Лукасевич (Jan Łukasiewicz: 1878–1956)[1] опубликовал работу [103], в которой впервые появилась не классическая двузначная логика, идущая ещё от Аристотеля (384–322 до н. э.), а трёхзначная логика, которая получила позже обозначение $Ł_3$.

В 1929 г. в учебнике [104] для вузов Лукасевич строит и многозначные логики, как конечнозначные логики вида $Ł_n, (n \geq 3)$, так и бесконечнозначную логику $Ł_\infty$ (в континуальном случае берётся множество действительных чисел в отрезке [0,1]).

В 1965 г. американский ученый, родившийся в Азербайджане, Лотфи Заде (Lotfi Alasker Zadeh: 1921)[2] опубликовал работу [105],

---

[1] Ян Лукасевич родился в Лемберге в 1878 г. Гимназию окончил в 1897 г. и в том же году поступил в университет Лемберга на философский факультет. По окончании учебы (1901) стал работать учителем. В 1902 г. защитил докторскую диссертацию под руководством Казимира Твардовского (Kazimierz Twardowski: (1866–1938) в области логики. После стажировки в Берлине и Лувене (Бельгия) в 1904/1905 гг. защитил в 1906 г. хабилитацию в университете Лемберга, а в 1911 г. стал там экстраординарным профессором. В 1915 г. переехал в Варшаву и стал преподавать в Варшавском университете (UW). В 1920 г. получил кафедру философии в UW. Дважды в 20-х и 30-х гг. выбирался ректором. Во время Второй мировой войны работал в архиве Варшавы, а в конце войны оказался в Германии. В 1946 г. Я. Лукасевич получил кафедру математической логики Королевской Ирландской Академии в Дублине [78]. Работы Я. Лукасевича нашли широкое применение в теории принятия решений и при создании экспертных систем.

[2] Лотфи родился в 1921 г. в Новхане (Азербайджанская ССР) в семье иностранного журналиста (азербайджанца иранского происхождения) и врача-педиатра (еврейки из Одессы). Учился в русской школе, а после возвращения в Иран в 1932 г. Лотфи продолжил учебу в Американском колледже в Тегеране, а с 1940 г. – на электроинженерном факультете Тегеранского университета. В

в которой ввел понятие нечеткого множества.

Как показал ряд исследователей [106, с. 263], континуальная логика Лукасевича $Ł_{\infty}$ относится к теории нечетких множеств точно так же, как классическая логика к обычной теории множеств.

В 1973 г. Заде предложил собственную версию нечеткой логики. Перейдем теперь к определениям. Для наглядности множества будут расположены на евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$, но вместо $\mathbf{R}^2$ можно рассматривать любое , как говорят универсальное, множество $\mathbf{E}$.

Напомним, что если множество A лежит в евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$, то

функция $\lambda_A : R^2 \to \{0,1\}$ такая, что $\lambda_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A \\ 1, & \text{если } x \in A \end{cases}$,

называется характеристической функцией множества A.

Пару $(\bar{A}, \lambda_A)$, где $\bar{A} = \{(x, \lambda_A(x)) : x \in \mathbf{R}^2\}$, будем называть *четким множеством.*

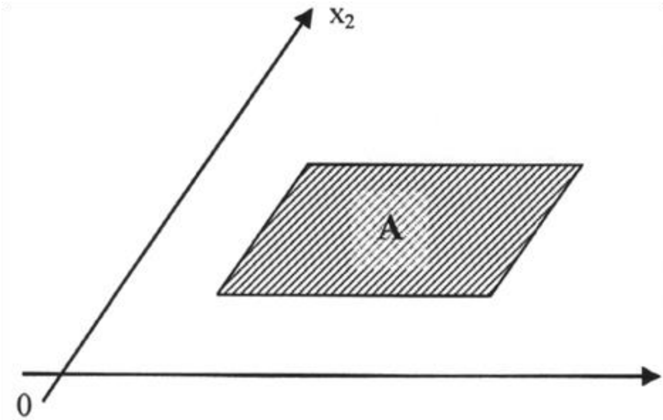


Рис 9. Четкое множество

Если же у нас есть функция $\mu_A : \mathbf{R}^2 \to [0,1] = M$, то пару $(\tilde{A}, \mu_A)$,

1944 г. переехал в США и поступил в MIT. В 1946 г. получил диплом магистра-инженера электротехники. Родители Лотфи жили в Нью-Йорке, поэтому Лотфи продолжил учебу в аспирантуре Колумбийского университета. После получения PhD (1949) продолжил работу ассистентом на инженерном отделении. С 1959 г. работает профессором в Беркли.

где $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) : x \in \mathbf{R}^2\}$, называют *нечетким множеством*, а функцию μ_A – *функцией принадлежности*.

Если образ $\mu_A(\mathbf{R}^2) = \{0,1\}$, т.е. в точности два значения, то нечеткое множество будет четким (или обычным множеством).

Пусть A – как на рис. 9 и пусть B – область вокруг A, полученная обкатыванием диска с диаметром, равным четверти наибольшего расстояния между точками из A (рис. 10).

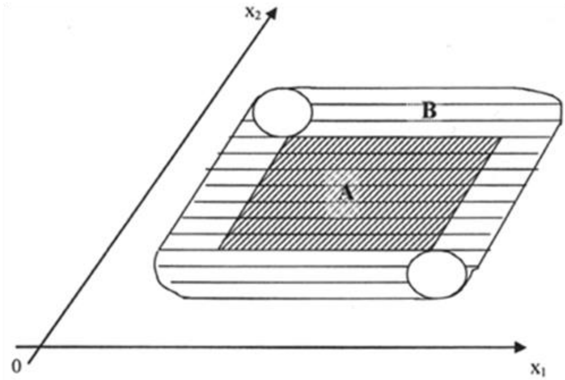


Рис.10. Нечеткое (размытое) множество

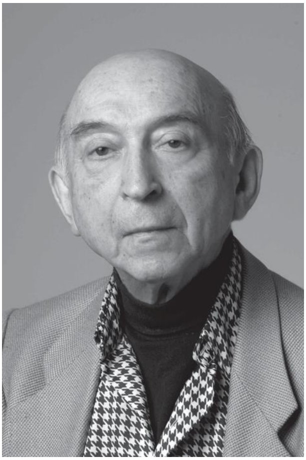
Для построения нечеткого множества введем функцию принадлежности $\mu_U(x)$.

Положим $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, x \notin A \cup B, \\ 1, x \in A, \\ \frac{1}{2}, x \in B. \end{cases}$$

Тогда пара $(\bar{U}, \mu_U(x))$, где $\bar{U} = \{(x, \mu_U(x)) : x \in \mathbf{R}2\}$ будет размытым множеством. При этом множество тех x, для которых $\mu_U(x) > 0$, называется *носителем нечеткого множества*. В случае нашего примера носитель – $U = A \cup B$.

Введем теперь операции над нечеткими множествами вместо пары, рассматривая только носители, так как носители вместе с функцией принадлежности однозначно определяют нечеткое множество. Предварительно введем понятия «содержится» и «равно».

Ян Лукасевич



Лотфи Заде

Пусть $\bar{A}$ и $\tilde{Y}$ – два нечетких множества универсального множества **e**.

Если для любого $x \in \mathbf{e}$ справедливо:

$$\mu_A(x) < \mu_Y(x),$$

то говорят, что $\bar{A}$ содержится в $\tilde{Y}$. (Обозначение: $\bar{A} \subset \tilde{Y}$).

Говорят, что $\bar{A}$ равно $\tilde{Y}$ (запись: $\bar{A} = \tilde{Y}$), если для $\forall\, x \in \mathbf{E}$ справедливо:

$$\mu_A(x) = \mu_Y(x).$$

Обозначим через $A \cap Y$ – носитель наибольшего нечеткого подмножества, который содержится одновременно в A и в Y. Положим

$$\mu_{A \cap Y}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_Y(x)\}$$

$$\text{для } \forall\ \square x \in \mathbf{E}.$$

Тем самым определена операция *пересечения двух нечетких множеств*.

Обозначим через $A \cup Y$ – носитель наименьшего нечеткого подмножества, которое включает как A, так и Y, с функцией принадлежности :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_Y(x)\}$$

$$\text{для } \forall\ \square x \in \mathbf{E}.$$

Тем самым определена операция *объединения двух нечетких множеств.*

Пусть теперь M = [0,1] и $\bar{A}$ и $\tilde{Y}$ – нечеткие множества, заданные на **e**. Будем говорить, что $\bar{A}$ и $\tilde{Y}$ *дополняют друг друга*, если

$$\mu_A(x) = 1 - \mu_Y(x) \text{ для }_{\forall} x \in E.$$

Уже появление этих операций нашло своё применение в машинах логического вывода экспертных систем к концу 70-х – началу 80-х гг. XX в. Дальнейшие применения нечетких множеств: прогнозирование итогов выборов, оценки загрязнения атмосферы, гистограммы фактора цена/качество – доказали их пригодность к принятию управленческих решений.

Мы рассматривали континуальный отрезок множества М, но можно в качестве значений функции принадлежности рассматривать и конечные дискретные и секвенциальные (состоящие из последовательностей) подмножества в М.

В 80-е гг. всё больше стало появляться электронных систем, использующих нечеткие управляющие алгоритмы. В 90-е гг. стали появляться массовые микрочипы, базирующиеся на нечеткой логике, особенно полезные при создании всевозможных роботов.

Нулевые годы XX в. характеризуются созданием правдоподобных сценариев развития различных экономических систем, базирующихся на нечеткой логике и нечетких множествах, прежде всего для большого бизнеса и военных. Отметим в этой связи, что уже в 1919 г. Людвиг фон Мизес[1] фактически использовал понятие нечеткого множества, говоря об определенной вероятности, для описания разных сценариев развития экономических систем.

§ 12. Метод экспертных систем

В 1971 г. появился интерпретатор для масс-спектрограмм DENDRAL, послуживший прототипом всех экспертных систем[2]. В 1976 г. система MYCYN (фактически дочерняя версия

---

[1] Людвиг фон Мизес (Ludwik von Mises: 1881–1973) – экономист, основа- тель новоавстрийской экономической школы. По окончании Первой мировой войны выпустил книгу: *Mises L. Nation, Staat und Wirtschaft.* Wien: 1919, в кото- рой прогнозировал развитие разных экономических систем. Добавлю, что его брат Рихард (1883–1953) в это же время строит стохастическую аксиоматику теории вероятностей. Оба брата родились в Лемберге (с 1918 г. – это Львов). С приходом нацистов к власти оба, будучи евреями, покидают Австрию: Людвиг едет в Швейцарию, а оттуда – в США (1940). Рихард едет в Турцию, а оттуда (1939) – в США. В 1991 г. сбылся прогноз Людвига Мизеса о невозможности длительного существования социализма только на плановой основе без привле- чения рынка, сделанный им ещё в 1922 г.

[2] Создатель системы DENDRAL – Эдвард Фейгенбаум (Edward Albert Feigenbaum;1936) – родился в интеллигентной еврейской семье в Нью-Джерси. Учился в Университете Корнеги-Меллон: 1956 – бакалавр; 1960 – PhD по фи- лософии. В своей докторской диссертации (под руководством Герберта Сай- мона (Herbert A. Simon: 1916–2001)) он строит первую компьютерную модель (EPAM), обучающуюся как человек. В 1973 г. выходит его знаменитая статья

DENDRAL) для диагностики бактериальных инфекций крови уже являла собой настоящую экспертную систему.

По определению специальной группы Британского компьютерного сообщества, «экспертная система рассматривается как результат создания в компьютере компоненты, основанной на знаниях, соответствующей навыку эксперта, в такой форме, которая позволяет системе дать разумный совет или принять разумное решение о функции обработки данных» [109, с. 15].

Рис. 11. Схема типичной экспертной системы

Типичная экспертная система включает в себя:

1) базу знаний;
2) машину логического вывода;
3) модуль извлечения знаний;

---

[107], дающая описание DENDRAL. Длительное время Э. Фейгенбаум работал в научном отделе ВВС армии США, позже стал профессором Стэнфордского университета. В 1994 г. награжден премией Тьюринга, в 2013 г. – премией «Computer Pioneer» [108].

Эдвард Фейгенбаум

4) систему объяснения (т.е. интерфейс, рис. 11).

База знаний содержит как факты (утверждения), так и правила (алгоритмы поведения). Это фактически способ представления знаний. Обычная база данных содержит только факты.

Машина логического вывода работает с неопределенностью в данных, (чаще всего либо на основе байесовской логики, либо нечеткой логики, либо многозначной логики), с «прямой» и «обратной» цепочками рассуждений.

Модуль усвоения знаний – это модуль обучения машины чаще всего на основе стратегии индукции.

Наконец, интерфейс позволяет в любой момент спросить систему, почему была сделана такая дедукция или почему система задала такой вопрос пользователю?

В 80-е и особенно в 90-е гг. XX в. и 2000-е гг. XXI в. экспертные системы нашли широчайшее применение в экономике, прежде всего для принятия управленческих решений [51, с. 135–149]. Производство экспертных систем составляет львиную долю продукции программистов.

§ 13. Метод кратномасштабного анализа

В последние 20 лет для обработки результатов фондового рынка всё шире используется кратномасштабный (вейвлетный) анализ, появившийся на рубеже 1988/1989 гг., который первоначально создавался для обработки сигналов. Позже этот анализ стал применяться для архивирования данных в компьютерах, в системах управления роботов.

Идея кратномасштабного анализа (КМА) основана на разложении сигнала, по ортогональному базису, образованному сдвигами и кратномасштабными копиями специальной функции, называе-

Альфред Хаар

Стефан Малла

Ив Мейер

мой вейвлетной функцией. Тригонометрический базис, используемый при разложениях функций в ряд Фурье, здесь не подходит.

Пространство сигналов отождествляют обычно с гильбертовым пространством $\boldsymbol{L_2}$ ***(R)*** над полем **R** – вещественных чисел. (Подробнее см. [110, с. 123–127; 111].)

Создателями КМА были Ив Мейер (Yves Meyer: 1939)[1] и Стефан Малла (Stéphan Mallat)[2]. Первоначально они получили свои результаты независимо: С. Малла опубликовал свои работы в 1989 г. [112; 113], а Ив Мейер – в 1990 г. [114].

Разумеется, у понятия всплеска были «предшественники», в частности функция, называемая ныне всплеском Хаара (рис.12).

---

[1] Ив Мейер – французский математик, окончил École Normale Supérieure в 1957 г.; защитил PhD □ в 1966 г. Профессор в университете Дофин в Пари- же, а далее (1980–1986) □ в École Politechnique, а затем до 2000 г. – профессор в Conservatoir National des Arts et Métiers (высшем ремесленном училище). С 2000 г. профессор-пенсионер. В 1990 г. И. Мейер опубликовал работу [114], по- служившую основой для награждения его в 2010 г. премией им. К. Гаусса.

[2] Стефан Малла родился в Париже. С 1986 по 1996 гг. был профессором Ин- ститута Куранта в Нью-Йоркском городском университете; преподавал в MIT, в Тель-Авивском университете, в École Politechnique и École normale supérieure. В 1989 г. опубликовал две пионерские работы [112; 113], посвященные КМА.

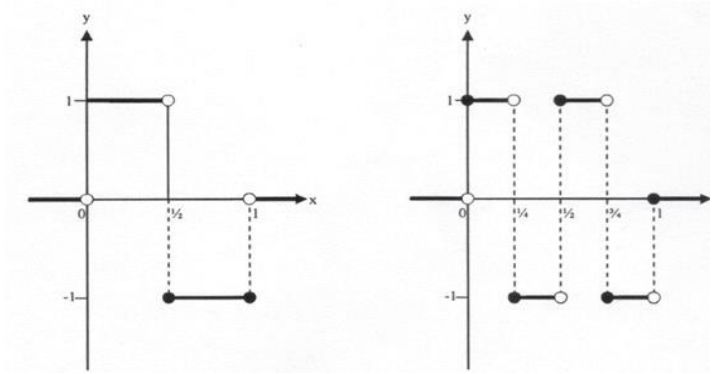


Рис. 12. Графики двух всплесков Хаара

Правда, сам Хаар (Alfred Haar: 1885–1933)[1] строил ортонормированную систему не для прямой **R**, а для отрезка [0,1] [115].

Теория базисов всплесков нашла в последние два десятилетия широкое применение в астрофизике, акустике, сейсмологии, геологоразведке, в ядерной физике, в системах противовоздушной обороны и т.д.

§ 14. Метод идемпотентного анализа

Прежде чем говорить о методе идемпотентного анализа применительно к теории принятия управленческих решений, введем некоторые определения.

Пусть на множестве М введена бинарная операция $\oplus$. Эта операция называется *идемпотентной,* если $a \oplus a = a$ для $\forall\ a \in M$.

[1] А. Хаар родился в Будапеште в 1885 г. После блестящего окончания (1903) Евангелической школы он поступает в университет Будапешта. В 1905 г. переходит в университет Гёттингена. Уже в 1909 г. он защищает докторскую диссертацию на философском факультете университета Гёттингена. При этом Гильберт является его консультантом. Уже в диссертации было видно начало построения специальной ортогональной системы, завершившееся работой [116]. Пробыв какое-то время ассистентом у Гильберта, в 1912 г. получает должность ассоциированного профессора в университете Колошвара (Трансильвания). В 1917 г. становится «полным» профессором. После Первой мировой войны Трансильвания отходит к Румынии, а Хаар едет в Шегед (Венгрия) и преподает там в университете до своей смерти в 1933 г.

Если на множестве M существует отношение $\leq$, то операция $\oplus$ может быть восстановлена с помощью формулы:

$$a \oplus b = \inf \{a,b\}, \text{ либо формулы } a \oplus b = \sup\{a, b\}.$$

В идемпотентном анализе важную роль играют метрические полугруппы (или полукольца), т.е. алгебраические структуры, снабженные метрикой $\rho : M \times M \to R$ (где R – вещественная прямая), задающей на M такую топологию, в которой на ограниченных в смысле порядка множествах равномерно непрерывна операция $\oplus$ (соответственно, в случае полукольца операции $\oplus$ и $\otimes$), причем метрика удовлетворяет дополнительным аксиомам: *минимаксности*

$$\rho(a \oplus b, c \oplus d) \leq \max \{\rho(a, c), \rho(b, d)\}$$

и монотонности

$$a \leq b \to \rho(a, b) = {}_{c \in [a,b]} \sup \sup\{\rho(a, c), \rho(c, b)\}.$$

Характерным и наиболее распространенным примером полукольца такого типа является числовая прямая с бесконечно удаленной точкой[1]

$$M = (\mathbf{R} \cup \{+\infty\}) \text{ с операциями } \oplus \text{ и } \otimes,$$

задаваемыми соответственно:

$$a \oplus b = \min (a,b)\ ,\ a \otimes b = a + b \text{ для любых } a, b \in M.$$

Нейтральными элементами операций $\oplus$ и $\otimes$ будут соответственно:

$$0_M = +\infty \text{ и } 1_M = 0 \in M.$$

Порядок на M совпадает с естественным порядком. Метрику на M зададим формулой

$$\rho (a,b) = \left| \exp(-a) - \exp(-b) \right|$$

для всех $a, b \in M$, при соглашении, что $\exp (-\infty) = о$. (Подробнее см. [117; 118, с. 223–259].)

[1] Это одноточечная компактификация (П.С. Александрова: 1896–1982).

В. П. Маслов

Перечислим теперь некоторые задачи, которые можно решать с помощью идемпотентного анализа:

1. Неклассическая задача траекторного типа: отыскание кратчайшего пути через сеть с переменным временем пробега по дугам.
2. Задача классификации изделий по конструктивно-технологическим признакам.
3. Обобщенная задача о назначении: многоитерационный алгоритм.
4. Обобщенная задача о назначении: одноитерационный алгоритм.
5. Модифицированная задача коммивояжера в вычислительной среде.
6. Анализ параллельных вычислений.

Именно последняя, шестая, задача и послужила отправным пунктом для создания и развития (1984) идемпотентного анализа [119].

Главную роль при этом сыграла школа академика В.П. Маслова (р. 1930)[1].

---

[1] Виктор Павлович Маслов родился в Москве в 1930 г. Учился в МГУ им. М.В. Ломоносова на физическом факультете, который окончил в 1953 г. В 1957 г. защитил кандидатскую диссертацию под руководством Сергея Васильевича Фомина (1917–1975), а в 1966 г. – докторскую диссертацию. С 1968 по 1998 гг. заведовал кафедрой прикладной математики в МИЭМ, позже – профессор этой кафедры. Одновременно руководит кафедрой квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ. С 1988 г. главный редактор журнала «Математические заметки». Основные направления его научных интересов лежат в квантовой термодинамике и квантовой механике. Награждался Госпремией СССР и дважды – Российской Федерации.

Заключение

В настоящей работе представлены далеко не все математические методы, используемые при принятии управленческих решений.

Сама жизнь ставит новые задачи, и для их решения приходится разрабатывать новые методы. Иногда это аналоги известных уравнений, как, например, уравнение Клапейрона – Клаузиуса[1], как прогноз дефолта 1998 г. в России или мировой рецессии 2008 г., сделанные В.П. Масловым на основе уравнений, аналогичных уравнениям фазового перехода [120]. Иногда это совсем новые методы, как, например, логико-вероятностный метод управления рисками Рябинина – Соложенцева, возникший из задачи повышения живучести подводного корабля, но оказавшийся востребованным банками, предприятиями общепита, любыми организациями и фирмами, где есть коррупционная составляющая, где есть риск при принятии управленческих решений, где задевается экономическая безопасность страны [121; 122].

Наконец, в условиях быстрых социально-экономических перемен и трудностей адаптации к ним миллионов людей представляется перспективным перенос методов управления и принятия решений, возникших первоначально в технике и названных адаптивно-робастными (см., например, [123]), на экономические системы.

[1] Уравнение Клапейрона – Клаузиуса – термодинамическое уравнение, относящееся к равновесным процессам перехода вещества из одной фазы в другую (испарение, плавление, сублимация и т.д).

Список литературы

[1] Peet T.E. *The Rhind mathematical papyrus*. – Liverpool: Hodder&Stoughton, 1923.

[2] Вандер Варден Б.Л. *Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции.* – М.: Физматгиз, 1959. – 459 с.

[3] Раик А.Е. *Очерки по истории математики в древности.* – Саранск: Мордовское книжное изд-во, 1977. – 370 с.

[4] Выгодский М.Я. *Арифметика и алгебра в древнем мире.* – М.: Наука, 1967. – 369 с.

[5] Нейгебауэр О. *Лекции по истории античных математических культур:* пер. с нем. С.Я. Лурье. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. Т. 1. – 242 с.

[6] Herodotis Halicarnassei. *Histiriarum libri IX*. – Lipsiae, 1828.

[7] Нейгебауэр О. *Точные науки в древности:* пер. с англ. Е.В. Гохман; под ред. А.П. Юшкевича. – М.: УРСС, 2003. – 240 с.

[8] Needham J. *Science and Civilization in China.* Vol. 1. – Cambridge, 1954.

[9] Берёзкина Э.И. *О «Математике в девяти книгах»* // Историко-математические исследования. – М.: ГИТТЛ, 1957. № 10. – С. 427–538.

[10] Берёзкина Э.И. *Математика древнего Китая*. – М.: Наука, 1980. – 312 с.

[11] Tarry G. *Le problem des Labyrinthes* //Nouvelles Annales de Math. 14 (1895). С. 187–189.

[12] Берж К. *Теория графов и её применение:* пер. с фр. А.А. Зыкова; под ред. И.А. Вайнштейна. – М.: ИЛ, 1962. – 319 с.

[13]Тихомиров В.М. *Рассказы о максимумах и минимумах.* – М.: Наука, 1986. – 192 с.

[14] Перельман Я.И. *Знаете ли вы физику?* – М.; Л.: ГИЗ, 1934.

[15] Прасолов В.В. *Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга.* – М.: Наука, 1992. – 80 с.

[16] Одинец В.П. *Зарисовки по истории математики :* учебное пособие. – Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2005. – 232 с.

[17] Sigler L.E. *Fibonacci's Liber Abaci, Leonardo Pisano's Book of Calculations.* – New York: Springer, 2002.

[18] Пачоли Лука. *Трактат о счетах и записях* /под ред. Я.В. Соколова. – М.: ФиС, 2001. – 368 с.

[19] Пачоли Л. *О божественной пропорции.* (Репринт издания 1508 г.) С приложением перевода А.И. Щетникова. – М.: Фонд «Русский авангард», 2007.

[20] Тарасов Б.Н. *Паскаль.* – М.: Молодая гвардия,1979. – 330 с.

[21] Keith D. *The Unfinished Game: Pascal, Fermat, and the Seventeenth-Century Letter That Made the World Modern.* New York: Basic Books, 2008.– 208 с.

[22] Lorenz M.O. *Methods of Measuring the Concentration of Wealth* // Publications of American Statistical Association. (Jun., 1905). № 70. Vol. 9. – P. 209–219.

[23] Gini C. *Variabilità e mutabilità.* – Bologna: C. Cupponi, 1912. – 156 p.

[24] Favero G. *Corrado Gini and Italian Statistics under Fascism* // XIII Congress of the International Economic History Association (Buenos Aires, July 23, 2002). – Buenos Aires, 2002.

[25] Gini C. *The scientific basis of fascism* // Political Science Quarterly. 1927. XLII, 1. – P. 99–115.

[26] Kuznets S. *Economic Growth and Income Inequality* // American Economic Review. 1955. 45 (March). – P. 128.

[27] Кузнец С. *Денежная заработная плата рабочих и служащих фабрично-заводской промышленности г. Харькова в 1920 г.* // Материалы по статистике труда на Украине / под ред. И.Н. Дубининой. – 1921 (июль). Вып. 2. – С. 53–64.

[28] Abramovitz M. *Simon Kuznets (1901–1985)* // The Journal of Economic History. 1986 (March). № 1. V. 86. – P. 241–246.

[29] фон Нейман Дж., Моргенштерн О. *Теория игр и экономическое поведение*: пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 707 с.

[30] Фишберн П. *Теория полезности для принятия решений.* – М.: Наука, 1978. –352 с.

[31] Одинец В.П., Шлензак В.А. *Основы выпуклого анализа:* авториз. пер. с польск. В.П. Одинца при участии М.Я. Якубсона / под ред. В.Н. Исакова. – М.: Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. – 520 с.

[32] Rubinstein A. *Lecture notes in Microeconomic Theory*. – 2nd. – Princeton: Princeton University Press, 2013. – 153 p.

[33] Cobb Ch., Douglas P. *A Theory of Production* // American Economic Review. 1928. Vol. 18. № 1. – P. 139–165.

[34] Черемных Ю.Н. *Микроэкономика. Продвинутый уровень* : учебник. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 844 с.

[35] Бобровски Д. *Введение в теорию динамических систем с дискретным временем:* пер. с польск. Ю.Н. Сироты / под ред. В.П. Одинца. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 360 с.

[36] Одинец В.П., Тарасевич В.М., Цацулин А.Н. *Рынок, спрос, цены: стратификация, анализ, прогноз.* – СПб.: Изд-во СПбУЭФ, 1993. – 157 с.

[37] Понтрягин Л.С. *Некоторые математические задачи, возникающие в связи с теорией оптимальных систем автоматического регулирования* // Сессия АН СССР по научным проблемам автоматизации 15–20 октября 1956 г. – М.: Изд. АН СССР, 1957. Т. II.

[38] Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Понтрягин Л.С. *К теории оптимальных процессов* // ДАН. – 1956. – Т. 110. –№ 1. – С. 7–10.

[39] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Физматгиз, 1961.– 392 с.

[40] Понтрягин Л.С. *О некоторых дифференциальных играх* // ДАН. – 1964. – Т. 156. – № 4. – С. 738–741.

[41] Пелчинский А. *Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения.* – М.: Мир, 1970. – 144 с.

[42] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. *Задачи на экстремум при наличии ограничений* // Вычисл. матем. и матем. физики. 1965. – Т. 5. – № 3. – С. 395–453.

[43] Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. *Необходимые условия экстремума в общей задаче оптимального управления.* – М.: Наука, 1971. – 113 с.

[44] Понтрягин Л.С. *Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий.* – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 140 с.

[45] Henon M. *A two – dimensional mapping with a strange attractor* // Communications in Math. Physics. 1976(50). –№ 1. – P. 69–77.

[46] Кенэ Ф. *Избранные экономические произведения.* – М.: Соцэгиз, 1960. – 421 с.

[47] Блауг М. *100 великих экономистов до Кейнса.* – СПб.: Экономическая школа» ГУ ВШЭ, «Экономикус», 2008. – 348 с.

[48] Никайдо Х. *Выпуклые структуры и математическая экономика.* – М.: Мир, 1972. – 350 с.

[49] Leontief W.W. *Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States* // Revue of Economic Statistics.–1936. – № 18. – P. 105–125.

[50] Леонтьев В.В., Ченери Х.В., Кларк П.Г. *Исследование структуры американской экономики. Теоретический и эмпирический анализ по схеме «затраты-выпуск»*: пер. с англ. А.С. Игнатьева; под ред. А.А. Конюса. – М.: Госстатиздат, 1958. – 640 с.

[51] Одинец В.П. *Зарисовки по истории компьютерных наук*: учебное пособие. – Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2013. – 421 с.

[52] von Neumann J. *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes* // Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums. № 8. – 1935–1936. Leipzig – Wien, 1937.

[53] Bayes T., Price R. *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chance. By the late Rev. Mr. Bayes communicated by Mr. Price, in the letter to John Canton, and F.R.S.* // Philosophical Transaction of the Royal Society of London, 53 (1763). – P. 370–418.

[54] Laplace P.S. *Théorie analytique des probabilités.* – Paris: 1812.

[55] Андерсон Т. *Статистический анализ временных рядов.* – М.: Мир, 1976. – 757 с.

[56] ван дер Варден Б.Л. *Математическая статистика.* – М.: Мир, 1960. – 435 с.

[57] Haavelmo T. *The Probability Approach in Econometrics* // Econometrica. Supplement. – 1944. – Vol. 12.

[58] Engle R.F. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation* // Econometrica. 1982(50). – № 4. – P. 987–1008.

[59] Engle R.F., Granger C.W.J. *Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing* // Econometrica. 1987(55). – № 2. – P. 251–276.

[60] Вилкас Э.Й. *Оптимальность в играх и решениях.* – М.: Наука, 1990. – 256 с.

[61] Воробьев Н.Н. *Основы теории игр. Бескоалиционные игры.* – М.: Наука, 1984. – 496 с.

[62] Aumann R.J. *Mixedand Behavior Strategies in Infinite Extensive-Games* // Advances in game theory. Annals of Mathematics Studies, 52 (ed. by M. Dresher, L.S. Shapley, and A.W. Tucker). P. 627–650. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1964.

[63] Шеллинг Т. *Стратегия конфликта:* пер. с англ. – М.: ИРИСЭН, 2007. – 366 с.

[64] Harsanyi J. *Rational behavior and bargaining equilibrium in games and social situations.* – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977.

[65] Nash J. *Equilibrium points in n-person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1951. – V. 36. – P. 48–49.

[66] Selten R. *Valuation of n-person games* // Advances in game theory. Annals of Mathematics Studies, 52 (Ed. by M. Dresher, L.S. Shapley, and A.W. Tucker). – P. 527–626. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1964.

[67] Monge G. *Déblai et remblai.* Memoires de l'Acad. des Sci. – Paris: 1781.

[68] *Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый*: в 2 т. / ред.-сост.: В.Л. Канторович, С.С. Кутателадзе, Я.И. Фет. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, Филиал «Гео», 2002. – Т. 1. – 544 с.

[69] Канторович Л.В., Горстко А.Б. *Математическое оптимальное программирование в экономике.* – М.: Знание, 1968. – 96 с.

[70] *Activity Analysis of Production and Allocation //* Proceedings of a Conference (Edited by T.C.Koopmans). – New York: John Wiley&Sons, Inc.; London: Chapman & Hall, Lim. 1951. – 395 p.

[71] Gass S.I. *Linear Programming.* – New York: McGraw-Hill, 1958.-xii+223 p.

[72] Riley V., Gass S. *Bibliography on Linear Programming and Related Techniques. A Comprehensive Bibliography. Operations Re-*

search Office. – Chevy Chase, (Maryland), Baltimore: Johns Hopkins Press, 1958.

[73] Канторович Л.В., Залгаллер В.А. *Расчет рационального раскроя промышленных материалов.* Л.: Лениздат, 1951. – 138 с.

[74] Блауг М. *Купманс Тьяллинг Ч.* // 100 великих экономистов после Кейнса. СПб.: Экономикус, 2009. – С. 135–137. – 384 с.

[75] Cottle R.W. *George B. Dantzig: a legendary life in mathematical programming* // Mathematical Programming. – 2005. – № 1 (105). – P. 18.

[76] Беллман Р., Дрейфус С. *Прикладные задачи динамического программирования.* – М.: Наука, 1965. – 460 с.

[77] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: ИЛ, 1954. – 500 с.

[78] Одинец В.П. *Предтечи и первые творцы польской математической школы. 1860–1922.* – Сыктывкар: Изд-во КГПИ, 2014. – 61 с.

[79] *Robert Merton Solow (1924). The Concise Encyclopedia of Economics. Library of Economics and Liberty. (2nd ed.) (*D.R. Henderson ed.) – Monterey (California): Liberty Fund, 2008.

[80] Туманова Е.А., Шагас Н.А. *Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода*: учебник. – М.: ИНФРА-М, 2007. – 400 с.

[81] Одинец В.П. *К истории двух знаменитых оптимизационных алгоритмов в теории графов* // Математика в высшем образовании. – 2013 (11). – С.115–120.

[82] Bachelier L. *Théorie de la speculation* // Annals Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieuré. – 1900. – № 3 (17). – A. 21–86.

[83] Bachelier L. *Le Jeu, la Chance, et le Hasard.* – Paris: Bibliothéque de Philosophie, Ernest Flammarian, Éd., 1914. – 380 A.

[84] Бернштейн С.Н. *Собрание сочинений.* – М.: АН СССР, 1964. – Т. IV. – 577 с.

[85] Виденский В.С. *Академик Сергей Натанович Бернштейн (к 120-летию со дня рождения)* // Вестник молодых ученых. – 2000. № 2. – С. 211. Серия: прикладная математика и механика.

[86] Пугачёв В.С. *Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.* – М.: Изд-во ВВМА им. Н.Е. Жуковского, 1944. – 36 с.

[87] Пугачев В.С. *Теория случайных функций и её применение к задачам автоматическко управления.* – М.: Гостехиздат, 1957. – 563 с.

[88] Стратанович Р.Л. *Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике.* – М.: Советское радио, 1961. – 558 с.

[89] Стратанович Р.Л. *Условные Марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.* – М.: Изд-во МГУ, 1966. – 319 с.

[90] Гихман И.И., Скороход А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.* – Киев: Наукова думка, 1982. – 612 с.

[91] Пугачев В.С., Синицин И.Н. *Стохастические дифференциальные системы.* – М.: Наука, 1990. – 632 с.

[92] Junek H. *Stochastische Differentialgleichungen.* – Potsdam: Potsdam. Univ., 2008. –150 S.

[93] *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications.* (Editors: P.H. Baxendale, S.V. Lototsky) / Interdisciplinary Mathematical Sciences. Vol. 2. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2007. – 393 p.

[94] *Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957.* – М.: Гос-издат; Физматлит., 1959. – Т. 2. – Библиография.– 820 с.

[95] *Профессор Р.Л. Стратонович: воспоминания родных, коллег и друзей* / под ред. Ю.М. Романовского. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, РХD, 2007. – 174 с.

[96] Itō K. *On Stochastic Differential Equations.* (Memoirs of the American Mathematical Society, № 4). Amer. Math. Soc., 1951.

[97] Itō K. *On a formula concerning stochastic differentials* // Nagoya Math. J. – 1951(3). – P. 55–65.

[98] Винер Н. *Нелинейные задачи в теории случайных процессов.* – М.: ИЛ, 1961.

[99] Granger C., Morgenstern O. *Spectral Analysis of New York Stock Market Prices.* – Kyklos, 16 (1963). P. 1–27.

[100] Black F., Scholes M. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* // The Journal of Political Economy. (May – Jun., 1973). Vol. 81. № 3– P. 637–654.

[101] Merton R.C. *Theory of Rational Option Pricing* // Bell. J. Econ. and Manegement Sci., 4 (1973). – P 141–183.

[102] Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики.* – М.: ФАЗИС, 1998. – Т. I. Факты. Модели.

[103] Łukasiewicz J. *O logice trójwartosciowej* // Ruch Filozoficzny. T.5 (1920).

[104]] Łukasiewicz J. *Elementy logiki matematycznej.* Warszawa: 1929.

[105] Zadeh F.A. *Fuzzy sets* // Information and Control. 8 (1965). – P. 338–353.

[106] Карпенко А.С. *Логики Лукасевича и простые числа.* – М.: Наука, 2000. – 319 с.

[107] Feigenbaum E. *On generality and problem solving* // Mashine Intelligence, 6 (1973).

[108] Grier D.A. *Edward Feigenbaum (interview)* // Annals of the History of Computing. (Oct. Dec. 2013). – P. 74–81.

[109] *Экспертные системы. Принципы работы и примеры* / под. ред. Р. Форсайта. – М.: Радио и связь, 1987. – 224 с.

[110] Одинец В.П., Якубсон М.Я. *Проекторы и базисы в нормированных пространствах.* 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Едиториал УРСС,2004. – 152 с.

[111] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. *Теория всплесков.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 616 с.

[112] Mallat S. *A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet Representation* // IEEE Transactions on Pattern Recognition and Machine Inteligence. 1989. 11 (7). – P. 674–693.

[113] Mallat S. *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L_2(R)$ // Transaction AMS. 315 (1989). – P. 69–87.

[114] Meyer Y. *Ondelettes et Opérateurs.* – Paris: Hermann, 1990.

[115] Haar A. *Zur Theorie der orthogonalen Funktionen systems* // Math. Ann., Bd.69, (1910). – S. 331–371.

[116] Маслов В.П., Колокольцов В.Н. *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении.* – М.: Физматлит, 1994. – 144 с.

[117] Одинец В.П., Шлензак В.А. *Избранные главы теории графов*: авториз. пер. с польск. В.П. Одинца при участии М.В. Поспелова ; под ред. П.А. Головача. – М.; Ижевск: Институт ком-

пьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 504 с.

[119] Авдошин С.М., Белов В.В., Маслов В.П. *Математические аспекты синтеза вычислительных сред.* – М.: Изд-во МИЭМ, 1984.

[120] Медведев Ю. *Он рассчитал катастрофу* // Российская газета. – 12 марта 2009 г.

[121] Соложенцев Е.Д. *Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике.* 2-е изд., исправ. и доп. – СПб.: Бизнес-пресса, 2006. – 530 с.

[122] Соложенцев Е.Д. $И^3$-технологии для экономики. – СПб.: Наука, 2011. – 387 с.

[123] Sokolov V.F. L_1-Optimal Robust Controller for SISO Plant under Coprime Faktor Perturbations / IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, № 12 (December, 2000). – P. 2339–2345.

Именной указатель

а

Б

В

Г

Д

е

ж

з

и

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Предметный указатель

Список иллюстраций

1. Список рисунков

2. Список портретов и фотографий

Учебное издание

Владимир Петрович Одинец

Об истории некоторых математических методов, используемых при принятии управленческих решений

Учебное пособие

Редактирование и компьютерный макет *Л.Н. Руденко*
Корректор *С.Б. Свигзова*

Подписано в печать 2.06.2015. Формат 60х84 1/16.
Тираж 100 экз. (1-й завод 77 экз.).
Печать ризографическая. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 5,8. Заказ № 131.

Издательский центр СГУ им. Питирима Сорокина
167023. Сыктывкар, Морозова, 25